18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

KÖN. PR. REGIERUNG ZU POTSDAM

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Achter Band,

in 4 Heften.

Mit 4 Kupfertafeln.

Berlin, 1832.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des achten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung		Heft	Seite
4.	Über die Summirung gewisser Kettenbrüche. Vom Herrn Dr. *Stern* zu Göttingen.	I.	42
6.	Potenzial- oder cyklisch-hyperbolische Functionen. Vom Herrn Prof. *Gudermann* zu Cleve. (Fortsetzung der zu der Abhandlung No. 1., 16. und 28. im VI. Bande gehörigen Tafeln No. 9. und 21. im VII. Bande.)	I.	64
17.	Fortsetzung dieser Tafeln.	II.	194
22.	Fernere Fortsetzung dieser Tafeln.	III.	301
8.	Auflösung einiger Aufgaben aus gegenwärtigem Journale. Vom Herrn *Th. Clausen* zu München.	II.	138
9.	Über die Zerlegung reeller gebrochener Functionen. Von Demselben.	II.	142
10.	Über die höheren Differentiale der Function $z = \frac{x}{x^2+y^2}$, und über die Entwickelung einiger bestimmten Integrale. Vom Herrn Professor Dr. *Grunert* zu Brandenburg.	II.	146
15.	Ableitung des Fermatschen und Wilsonschen Satzes aus einer gemeinschaftlichen Quelle. Von Demselben.	II.	187
16.	Observationes in fractiones continuas. Auct. *Stern*, Dr. phil. Goett. (Epitome dissertationis mense Mart. anni 1829 script.)	II.	192
19.	De transformatione integralis duplicis indefiniti $\int \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi}$ in formam simpliciorem $\int \frac{\partial\eta\,\partial\vartheta}{G-G'\cos\eta\cos\vartheta-G''\sin\eta\sin\vartheta}$. Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. Regiom.	III.	253
25.	Cont. diss. illius.	IV.	321
21.	Über die Function $\sin\varphi+\frac{1}{2^2}\sin 2\varphi+\frac{1}{3^2}\sin 3\varphi+$ etc. Von Hrn. *Th. Clausen* zu München.	III.	298
23.	Auflösung der Aufgabe im 2ten Bande dieses Journals, S. 99. No. 14. Vom Herrn Prof. *W. A. Förstemann* zu Danzig.	III.	317

2. Geometrie

2.	Nachtrag zu dem Eulerschen Lehrsatze von Polyëdern. Vom Herrn Prof Dr. *Hessel* zu Marburg.	I.	13
18.	Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques. (Pour faire suite aux *Mémoires sur les centres de moyennes harmoniques et la théorie générale des polaires réciproques.*) Par Mr. *J. V. Poncelet*, chef de Bataillon dn génie à Paris.	I.	21
7.	Suite de ce mémoire.	II.	117
18.	Suite de ce mémoire.	III	213
29.	Suite et fin de la première partie de ce mémoire.	IV.	370

Nr. der Abhandlung		Heft	Seite
5.	Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie. Par Mr. *A. J. Magnus* à Berlin.	I.	52
8.	Auflösung einiger Aufgaben aus gegenwärtigem Journale. Vom Herrn *Th. Clausen* zu München.	II.	138
11.	Über die Verwandlung der Coordinaten im Raume. Vom Herrn Prof. Dr. *Grunert* zu Brandenburg..	II.	153
12.	Beweis des im zweiten Bande dieses Journals Seite 190. vom Herrn Steiner aufgestellten Lehrsatzes No. 27. und Ableitung anderer eben so einfacher Relationen. Von Herrn Prof. *C. Gudermann* zu Cleve. .	II.	160
14.	Einige Sätze aus der Geometrie der geraden Linien. Vom Herrn Professor *M. L. Frankenheim* zu Breslau.	II.	178
20.	Mémoire sur la courbure des surfaces. Par Mr. *Poisson*, membre de l'académie des sciences à Paris.	III.	280
26.	Note sur les surfaces réglées. (Lettre de Mr. *Hachette*, membre de l'académie des sciences à Paris, à l'éditeur.)	IV.	358.
27.	Note sur la surface dont l'aire est un minimum entre des limites données. Par Mr. *Poisson*, membre de l'académie des sciences à Paris.	IV.	361
28.	Über die niedere Sphärik. Vom Herrn Prof. *Gudermann* zu Cleve.	IV.	363

3. Mechanik.

1.	Du mouvement d'un corps sur un plan fixe, quand on a égard à la résistance du frottement. Par Mr. *A. A. Cournot*, Dr. ès sciences à Paris. (Suite du mémoire No. 17. tom. V. cah. 3.)	I.	1

II. Angewandte Mathematik.

13.	Zur Theorie der Fuhrwerke. Vom Herrn Dr. *Dietlein* zu Berlin. .	II.	169

Aufgaben und Lehrsätze.

24.	Aufgaben zur Auflösung.	III.	320

Nachrichten von Büchern und Anzeigen.

30.	Prix de mathématiques proposé par l'académie imperiale de St. Petersbourg dans sa séance du 29. Decembre 1831.	IV.	411
31.	Anzeigen und Nachrichten von Büchern.	IV.	413
Druckfehler-Verzeichnifs.		III. und IV.	320 420

1.

Du mouvement d'un corps sur un plan fixe, quand on a égard à la résistance du frottement.

(Par Mr. *A. A. Cournot*, Dr. ès sciences à Paris.)

(Suite du mémoire No. 17. tom V. cah. 3.)

---

14. Comme les calculs, dans le cas général, seraient extrêmement compliqués, et que la conséquence singulière à laquelle nous voulons arriver, peut également s'établir sur un cas très simple, supposons, pour fixer les idées, que le corps soit un parallèlépipède rectangle, reposant sur le plan par une de ses faces, soumis à une impulsion qui passe par son centre de gravité, en sorte que les axes des x', y', z' soient respectivement parallèles à ceux des x, y, z, et que la force d'impulsion se trouve comprise dans le plan des xz. La face par laquelle le parallélépipède repose sur le plan, et les arêtes qui la terminent parallèlement aux y, étant supposées également polies dans toute leur étendue, désignons par ε le coëfficient du frottement en chaque élément superficiel de la base, et par ε' le coëfficient du frottement en chaque élément linéaire des arêtes. Désignons de plus par $2f$, $2g$, $2h$ les longueurs des arêtes parallèles aux axes des x, y, z; f, g, h étant des nombres positifs de leur nature. Si l'on avait $Z>0$, le parallèlépipède se détacherait entièrement du plan, mais en commencant par exclure ce cas, il faut de toute nécessité 1° ou que le frottement de la base empêche le corps de prendre aucun mouvement; 2° ou que le frottement de la base étant surmonté, le corps glisse sur cette base dans la direction de l'axe des x; 3° ou que le parallèlépipède se soulève sur une des arêtes parallèles aux y, mais que la résistance du frottement empêche cette arête de prendre aucun mouvement; 4° ou bien enfin que le corps se soulève sur une des arêtes, et que cette arête glisse parallèlement à elle-même, en surmontant la résistance du frottement.

Si le corps reste immobile sur sa base, on aura:

$$0 = X + \iint F_1\,dx\,dy, \quad 0 = Z + \iint P\,dx\,dy, \quad 0 = \iint Px\,dx\,dy + h\iint F_1\,dx\,dy;$$

ou bien, comme P et F_1 sont indépendants de y:

$$46. \qquad 0 = X + 2g\int F_1\,dx, \quad 0 = Z + 2g\int P\,dx, \quad 0 = 2g\int Px\,dx + 2gh\int F_1\,dx.$$

Il faut que la fonction P puisse être censée positive en chaque élément du contact, et pour cela qu'on ait

$$47. \quad \int P\,dx > 0, \quad \frac{\int P x\,dx}{\int P\,dx} > -f, \quad \frac{\int P x\,dx}{\int P\,dx} < f;$$

la première condition est satisfaite à cause de $Z<0$, les deux autres donnent, après les transformations convenables:

$$48. \quad hX - fZ > 0, \quad hX + fZ < 0.$$

Il faut en outre que l'on puisse concevoir la pression répartie de telle sorte, que pour chaque élément du contact, F_1 soit numériquement inférieur à εP. Cette dernière condition ne peut être établie analytiquement, qu'autant qu'on suppose que la fonction F_1 conserve le même signe dans toute l'étendue de l'intégration, ce qui est d'ailleurs conforme à la nature de la question. Si donc l'on pose $\varphi = \varepsilon P \mp F_1$, selon que F_1 est positif ou négatif, la fonction φ sera dans le même cas que P, c'est-à-dire qu'elle devra être positive dans toute l'étendue de l'intégration, ce qui exige qu'on ait

$$\int \varphi\,dx > 0, \quad \frac{\int \varphi x\,dx}{\int \varphi\,dx} > -f, \quad \frac{\int \varphi x\,dx}{\int \varphi\,dx} < f;$$

mais comme, d'après les équations (46.), $\int F_1 x\,dx$ est entièrement indéterminé, $\int \varphi x\,dx = \varepsilon \int P x\,dx \mp \int F_1 x\,dx$ le sera pareillement, et l'on se trouvera dispensé d'avoir égard à ces deux dernières inégalités; il suffira que l'on ait $\int \varphi\,dx = \varepsilon \int P\,dx \mp \int F_1\,dx > 0$, selon que $\int F_1\,dx$ est positif ou négatif. Mais il est clair que, sans nuire à la généralité de la question, on peut supposer $X>0$, et par conséquent $\int F_1\,dx$ négatif; alors l'inégalité précédente se réduira à

$$X + \varepsilon Z < 0:$$

dans la même supposition, la première inégalité (48.) sera satisfaite d'elle même, et il deviendra inutile d'y avoir égard.

15. Si le parallèlépipède glissait en s'appuyant sur sa base, la première équation (46.) serait remplacée par

$$M\alpha' = X + 2g \int F_1\,dx,$$

et il faudrait poser en outre

$$F_1 = \mp \varepsilon P, \text{ selon que } \alpha' \gtrless 0,$$

c'est-à-dire selon que le corps glisserait dans le sens des x positives ou négatives; mais comme nous admettons que X est positif, il est clair, d'après l'équation précédente, qu'on ne peut avoir en même temps F_1 positif, et α' négatif. Posant donc simplement $F_1 = -\varepsilon P$, la troisième inégalité (47.)

donnera

$$f - \varepsilon h > 0;$$

les deux autres seront satisfaites d'elles mêmes. Quant à la condition $\alpha' > 0$, elle deviendra

$$X + \varepsilon Z > 0.$$

16. Si le parallèlépipède se soulève, en s'appuyant sur l'arête parallèle aux y, qui a pour abscisse f, et que de plus le frottement de cette arête l'empêche de glisser, ce sera le cas d'appliquer les formules du No. 11., en réduisant U à Z, et U_1 à X. En conséquence on aura, pour les conditions relatives à cette hypothèse:

$$49. \quad XT - S_1 Z > 0, \quad \pm(ZT - SX) < \varepsilon'(XT - S_1 Z);$$

et comme il faut de plus, en raison de ce que le parallèlépipède est en contact avec le plan par sa base, que γ' soit positif, cette nouvelle condition donnera

$$Z + \frac{XT - S_1 Z}{SS_1 - T^2} > 0.$$

On a $S = 1 + K' f^2$, $S_1 = 1 + K' h^2$, $T = K' fh$, en sorte que ces trois quantités sont positives: il en résulte que la première inégalité (49.) est satisfaite d'elle-même, et que la seconde doit prendre la forme

$$SX - ZT < \varepsilon'(XT - S_1 Z);$$

quant à la dernière, elle se réduit après les substitutions convenables à

$$hX + fZ > 0.$$

Dans le cas où l'arête surmonterait le frottement, et glisserait parallèlement à elle même, dans le sens des x positives, les conditions seraient, toujours d'après le No. 11.:

$$S - \varepsilon' T > 0, \quad SX - ZT - \varepsilon'(XT - S_1 Z) > 0;$$

et de plus il résulterait de la nouvelle condition $\gamma' > 0$:

$$Z - \frac{Z}{S - \varepsilon' T} > 0,$$

ou en réduisant, et observant que Z est négatif,

$$f - \varepsilon' h < 0.$$

Si au contraire ou voulait admettre que l'arête glissât parallèlement aux x négatives, cette même inégalité $\gamma' > 0$ donnerait

$$Z - \frac{Z}{S + \varepsilon' T} > 0,$$

ou $f + \varepsilon' h < 0$, condition impossible à remplir, puisque f, h, ε' sont positifs, ce qui montre que cette hypothèse n'est pas admissible.

On pourrait encore supposer que le parallèlépipède se soulève, en s'appuyant sur l'arête qui a pour abscisse $-f$; mais en discutant les trois cas dans lesquels cette hypothèse se subdivise, on reconnaît qu'elle est inadmissible. En effet, si l'arête restait fixe, la condition $\gamma' > 0$ donnerait

$$Z + \frac{XT' - S_1 Z}{SS_1 - T'^2} > 0,$$

en observant que T' est égal et de signe contraire à T; cette inégalité, convenablement réduite, devient $hX - fZ < 0$, et ne peut subsister, puisque Z est négatif.

Dans le cas où l'arête dont il s'agit, glisserait parallèlement aux x positives, cette même condition $\gamma' > 0$ deviendrait $f + \varepsilon' h < 0$, et serait encore impossible à remplir. Enfin si l'arête glissait dans le sens des x négatives, on aurait (No. 11.):

$$S + \varepsilon' T' > 0, \quad SX - ZT' + \varepsilon'(XT' - S_1 Z) < 0;$$

et de plus, en raison de $\gamma' > 0$:

$$Z - \frac{Z}{S + \varepsilon' T'} > 0, \quad \text{ou} \quad f - \varepsilon' h < 0.$$

La seconde de ces inégalités peut se mettre sous la forme

$$(S + \varepsilon' T')X - Z(T' + \varepsilon' S_1) < 0,$$

et elle ne saurait subsister concurremment avec la première, à moins qu'on n'ait $T' + \varepsilon' S_1 < 0$, ou $\varepsilon < \frac{T'}{S_1}$. D'un autre côté la 3e donne $\varepsilon' > \frac{f}{h}$, d'où $\frac{T'}{S_1} > \frac{f}{h}$, et en remettant pour T', S_1, leurs valeurs, $f < 0$, ce qui est contre la définition.

17. En écartant donc tous les systèmes impossibles, et dans ceux qui sont possibles, les inégalités qui se trouvent vérifiées d'elles mêmes, on aura définitivement les quatre systèmes suivants d'inégalités:

$$(C) \quad \begin{cases} (c) & X + \varepsilon Z < 0, \\ (c') & hX + fZ < 0; \end{cases}$$

$$(D) \quad \begin{cases} (d) & X + \varepsilon Z > 0, \\ (d') & f - \varepsilon h > 0; \end{cases}$$

$$(E) \quad \begin{cases} (e) & SX - ZT - \varepsilon'(XT - S_1 Z) < 0, \\ (e') & hX + fZ > 0; \end{cases}$$

$$(F) \quad \begin{cases} (f) & S - \varepsilon' T > 0, \\ (f') & SX - ZT - \varepsilon'(XT - S_1 Z) > 0, \\ (f'') & f - \varepsilon' h < 0; \end{cases}$$

il ne reste plus qu'à voir si l'on peut, par une analyse semblable à celle du No. 12., établir qu'un de ces systèmes est toujours vérifié, et qu'il n'y en a qu'un seul, quelles que soient les valeurs des coëfficients ε, ε'.

Il est évident que les systèmes (C) et (D), (C) et (E), (E) et (F) sont respectivement incompatibles, ou ne peuvent pas être satisfaits simultanément, puisque dans chacune de ces combinaisons entreraient deux inégalités contradictoires. Les systèmes (C) et (F) sont encore incompatibles; car (f') donnerait

$$X > \frac{Z(T-\varepsilon' S_1)}{S-\varepsilon' T},$$

$S-\varepsilon' T$ étant >0, en vertu de (f), et l'on tirerait de (c')

$$X < -\frac{fZ}{h}, \text{ d'où } -\frac{fZ}{h} > \frac{Z(T-\varepsilon' S_1)}{S-\varepsilon' T};$$

développant et réduisant, avec le soin d'observer que Z est négatif, on arriverait à $f-\varepsilon' h>0$, ce qui est l'opposé de (f'').

Il ne reste plus, pour épuiser les six combinaisons possibles, qu'à considérer celles de (D) avec (E), et de (D) avec (F). Or, si l'on suppose pour un moment $\varepsilon=\varepsilon'$, ces combinaisons seront exclues comme les précédentes; car, à l'égard de la seconde, (d') et (f'') seront directement opposées; et quant à la première, on tirerait de (e)

$$\varepsilon > \frac{SX-ZT}{XT-S_1 Z}, \text{ et de } (d'): \quad \varepsilon < \frac{f}{h},$$

d'où, en comparant, et réduisant: $hX+fZ<0$, ce qui est l'opposé de (e').

Mais si l'on ne suppose plus $\varepsilon=\varepsilon'$, les systèmes (D) et (E), ceux (D) et (F) pourront être vérifiés simultanément. Si par exemple, on faisait $f=1$, $h=3$, d'où $k'=\frac{3}{10}$, $S=\frac{13}{10}$, $S_1=\frac{37}{10}$, $T=\frac{9}{10}$, et qu'on prit ensuite $\varepsilon=\frac{1}{4}$, $\varepsilon'=\frac{1}{2}$, $X=1$, $Z=-1$, les deux systèmes (D) et (E) seraient satisfaits; et il en serait de même par les systèmes (D) et (F), si l'on prenait $X=2$, les valeurs des autres lettres restant les mêmes.

Cette conséquence est tout-a-fait contraire à celles auxquelles nous sommes parvenues dans la première partie de ce mémoire, quand nous ne considérions le frottement qu'en un seule point; mais pour complèter cette opposition dans les résultats, il reste à montrer qu'à moins de supposer $\varepsilon=\varepsilon'$, il est possible qu'aucun des systèmes (C) . . . . (F) ne soit satisfait. Or c'est ce qui aurait lieu, si en prenant dans chacun des quatre systèmes une des inégalités qui le composent, le nouveau système formé de ces quatre inégalités prises avec les signes renversés, pourait être vé-

rifié. En procédant de la même manière que nous l'avons fait au No. 12., les systèmes ou combinaisons qu'il faudrait former et discuter, seraient au nombre de 24. Il est aisé de s'assurer que 21 de ces combinaisons sont impossibles, quelles que soient les valeurs de ε, ε'; mais il n'en est pas de même à l'égard des trois combinaisons

$$[c', d, e, f''], \quad [c, d', e, f''], \quad [c', d', e, f''],$$

qui ne sont impossibles qu'autant qu'on suppose $\varepsilon = \varepsilon'$. Si par exemple on fait $f=1$, $h=3$, $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $\varepsilon'=\frac{1}{4}$, $X=\frac{2}{5}$, $Z=-1$, la première de ces combinaisons donnera

$$-1+\tfrac{6}{5}>0, \quad \tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{2}<0, \quad 13.\tfrac{2}{5}+9-\tfrac{1}{4}(\tfrac{18}{5}-37)>0, \quad 1-\tfrac{3}{4}>0;$$

chacune de ces inégalités est vérifiée, et par suite aucun des systèmes (C) . . . . (F) ne saurait l'être. D'où il faut conclure que dans l'abstraction mathématique, l'hypothèse de la proportionnalité du frottement à la pression ne peut s'appliquer en général à un corps tel qu'un parallèlépipède, reposant sur une face parfaitement plane et terminée par des arêtes vives, à moins de supposer que le coëfficient du frottement soit le même pour l'élément superficiel d'aire plane et pour l'élément linéaire d'arête vive. Cette manière de prouver, indépendamment de toutes considérations physiques, et par le seul développement des conditions d'inégalité, que certaines hypothèses sur la valeur du frottement sont inadmissibles, nous semble devoir être mise en considération.

18. Afin de montrer que cette difficulté tient uniquement à ce qu'on ne peut pas supposer que le frottement sur une face plane, soit comparable au frottement sur une pointe ou sur une arête vive, imaginons que le parallèlépipède repose sur quatre pointes, symétriquement placées par rapport à son centre de gravité; que ε soit le coëfficient du frottement pour les deux pointes dont l'abscisse est ξ, et ε' le même coëfficient pour les deux pointes dont l'abscisse est $-\xi$. Il est clair que dans ce cas on doit pouvoir se donner arbitrairement les valeurs des coëfficients ε, ε'; et qu'ainsi les systèmes d'inégalités doivent être tels qu'un seul de ces systèmes demeure toujours vérifié: c'est aussi ce que confirme l'analyse suivante.

Si le corps reste immobile sur les quatre points d'appui, on aura

$$50. \quad \begin{cases} 0 = X + 2F_1 + 2F_1', \quad 0 = Z + 2P + 2P', \\ 0 = 2P\xi - 2P'\xi + 2h(F_1 + F_1'), \end{cases}$$

d'où

$$P = -\frac{hX+Z\xi}{4\xi}, \quad P' = \frac{hX-Z\xi}{4\xi}.$$

Il faut qu'on ait $P>0$, $P'>0$; la seconde condition est satisfaite d'elle-même, d'après les suppositions qu'on a faites dans les N^os^ précédents.

F_1 et F'_1 devant être, par la nature de la question, supposés de même signe, et négatifs, à cause que X est positif, il faut de plus que la fonction $\varphi=\varepsilon P+F_1$ puisse être censée constamment positive, et pour cela qu'on ait

$$\varphi+\varphi'>0, \quad \frac{\varphi\xi-\varphi'\xi}{\varphi+\varphi'} \begin{matrix} >-\xi; \\ <+\xi \end{matrix}$$

mais comme $F_1-F'_1$, et par conséquent $\varphi-\varphi'$ est indéterminé, il suffit de considérer la première condition, qui donne:

$$2\xi X<(\varepsilon-\varepsilon')hX-(\varepsilon'+\varepsilon'')\xi Z.$$

19. Si le corps glisse sur ses quatre points d'appui, la 1ère équation (50.) est remplacée par

$$M\alpha'=X+2F_1+2F'_1,$$

et l'on a

$$F_1=\mp\varepsilon P, \quad F'_1=\mp\varepsilon' P',$$

selon que

$$a'\gtrless 0.$$

D'après les valeurs qui en résultent pour P, P' et α', on est conduit pour le cas de $\alpha'>0$, aux conditions suivantes:

$$\frac{\xi+\varepsilon' h}{2\xi-(\varepsilon-\varepsilon')h}>0, \quad \frac{\xi-\varepsilon h}{2\xi-(\varepsilon-\varepsilon')h}>0, \quad \frac{X[2\xi-(\varepsilon-\varepsilon')h]+(\varepsilon+\varepsilon')\xi Z}{2\xi-(\varepsilon-\varepsilon')h}>0.$$

Le numérateur de la première inégalité étant nécessairement positif, on peut la remplacer par

$$51. \quad 2\xi-(\varepsilon-\varepsilon')h>0,$$

et supprimer les dénominateurs des deux autres inégalités; mais alors il est visible que l'inégalité (51.) est superflue à écrire; car, si $\xi-\varepsilon h$ est positif, $2\xi-(\varepsilon-\varepsilon')h=\xi-\varepsilon h+\xi+\varepsilon' h$ le sera à fortiori.

Pour le cas de $\alpha'<0$, on a:

$$\frac{\xi-\varepsilon' h}{2\xi+(\varepsilon-\varepsilon')h}>0, \quad \frac{\xi+\varepsilon h}{2\xi+(\varepsilon-\varepsilon')h}>0, \quad \frac{X[2\xi+(\varepsilon-\varepsilon')h]-(\varepsilon+\varepsilon')\xi Z}{2\xi+(\varepsilon-\varepsilon')h}<0.$$

Or, si le dénominateur commun aux premiers membres de ces trois inégalités est positif, le numérateur de la 3e sera aussi positif, à cause de $X>0$, $Z<0$, en sorte que cette inégalité ne pourra être vérifiée; si au contraire ce même dénominateur est négatif, ce sera la seconde inégalité qui ne pourra l'être; en sorte que de toutes manières, l'hypothèse à laquelle ce système d'inégalités appartient, ne saurait subsister.

20. On démontrerait, comme dans le No. 16., que le corps ne peut se soulever, en s'appuyant sur les deux points qui ont pour abscisse $-\xi$, et s'il se soulevait en s'appuyant sur les deux points dont l'abscisse est ξ, on retomberait sur les formules du No. cité, en y changeant seulement f en ξ, et ε' en ε; de sorte qu'il y a en tout quatre hypothèses admissibles sur le mouvement du corps, auxquelles se rapportent les quatre systèmes suivants d'inégalités:

$$(G)\quad \begin{cases}(g) & hX + Z\xi < 0,\\ (g') & X[2\xi - (\varepsilon-\varepsilon')h] + (\varepsilon+\varepsilon')\xi Z < 0;\end{cases}$$

$$(H)\quad \begin{cases}(h) & \xi - \varepsilon h > 0,\\ (h') & X[2\xi - (\varepsilon-\varepsilon')h] + (\varepsilon+\varepsilon')\xi Z > 0;\end{cases}$$

$$(E)\quad \begin{cases}(e) & SX - ZT - \varepsilon(XT - S_1 Z) < 0,\\ (e') & hX + Z\xi > 0;\end{cases}$$

$$(F)\quad \begin{cases}(f) & S - \varepsilon T > 0,\\ (f') & SX - ZT - \varepsilon(XT - S_1 Z) > 0,\\ (f'') & \xi - \varepsilon h < 0.\end{cases}$$

En suivant la marche indiquée au No. 17., il est facile de prouver que deux quelconques de ces quatre systèmes ne peuvent pas subsister simultanément; reste à faire voir que l'un d'entre eux est nécessairement satisfait. Les combinaisons qu'il faudrait former pour remplir ce but, en suivant la méthode indiquée au No. 12., seraient au nombre de 24. Mais il vaut mieux d'abord faire abstraction du système (F), et former les huit combinaisons

$$[g, h', e'],\quad [g', h', e],\quad [g, h, e'],\quad [g', h', e'],$$
$$[g, h, e],\quad [g, h', e],\quad [g', h, e'],\quad [g', h, e];$$

pour écarter celles qui sont impossibles, et combiner ensuite chacune d'elles avec chacune des trois inégalités (F) renversées.

Il est évident en premier lieu que les combinaisons de la première ligne sont impossibles, à cause que les inégalités (g) et (e'), (g') et (h') sont directement opposées.

La combinaison $[g', h, e']$ doit être exclue; car de

$$X[2\xi - (\varepsilon-\varepsilon')h] + (\varepsilon+\varepsilon')\xi Z > 0,\quad hX + Z\xi < 0,$$

on tire, en éliminant $\frac{Z}{X}$ et réduisant, $\xi - \varepsilon h > 0$, ce qui est précisément l'inégalité (h).

Au lieu de 24 combinaisons, on n'en a donc plus que 9 a discuter, sur lesquelles 5 sont immédiatement exclues à cause que les inégalités (h)

et (f''), (e) et (f') sont directement opposées, de sorte qu'il reste seulement les quatre combinaisons:

$$[g, h, e, f], \quad [g, h', e, f], \quad [g', h, e, f], \quad [g, h', e, f'']\text{.}$$

Or les inégalités (e) et (f) prises en signes contraires, savoir:

$$SX - ZT - \varepsilon(XT - S_1 Z) > 0, \quad S - \varepsilon T < 0,$$

ne peuvent subsister simultanément, car en éliminant entre elles $S - \varepsilon T$, on est conduit à $T - \varepsilon S_1 > 0$; et éliminant de nouveau ε entre cette inégalité et celle $S - \varepsilon T < 0$, on obtient $SS_1 - T^2 < 0$, ce qui est absurde, d'après l'équation (45.). Ainsi sur les quatre combinaisons qu'on vient d'écrire, les trois premières sont déjà démontrées impossibles. La quatrième et dernière équivaut à

$$hX + Z\xi > 0, \quad X[2\xi - (\varepsilon - \varepsilon')h] + (\varepsilon + \varepsilon')\xi Z < 0,$$
$$SX - ZT - \varepsilon(XT - S_1 Z) > 0, \quad \xi - \varepsilon h > 0.$$

Or la seconde de ces inégalités peut être mise sous la forme

$$\xi(X + \varepsilon Z) + \varepsilon'(hX + Z\xi) + X(\xi - \varepsilon h) < 0;$$

elle ne peut donc subsister, concurremment avec la 1ère et la 4e, à moins qu'on n'ait $X + \varepsilon Z < 0$. En éliminant ε entre cette dernière inégalité et celle $\xi - \varepsilon h > 0$, ce qui est permis, à cause de $Z < 0$, on retombe sur $hX + Z\xi < 0$; au moyen de quoi la combinaison $[g, h', e, f'']$ est démontrée impossible, et la proposition énoncée au No. 18. est complètement établie.

21. Afin de discuter au moins dans une hypothèse, les équations qui se rapportent au mouvement continu du corps, supposons, comme au No. 5., que le corps est en contact avec le plan fixe par un seul point; que le plan de $x'z'$ est perpendiculaire au plan xy, et comprend le point de contact ainsi que la résultante des forces; que de plus cette résultante passe par le centre de gravité; enfin que l'intersection de la surface du corps par le plan $x'z'$ est une courbe quelconque, assujetie seulement à la condition d'être constamment convexe et de n'offrir aucun point singulier. Les équations du mouvement seront:

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2} = X + f_1, \quad M\frac{d^2\gamma}{dt^2} = Z + R,$$

$$B\frac{dq}{dt} = R\mu + f_1\mu_1, \quad \frac{d\gamma}{dt} + q\mu = 0;$$

en faisant

$$\mu = a\zeta - c\xi = -(\zeta \sin\theta + \xi\cos\theta),$$
$$\mu_1 = a_1\zeta - c_1\xi = \zeta\cos\theta - \xi\sin\theta.$$

Si de plus le frottement est suffisant pour détruire constamment la vitesse du point de contact, on a

$$\frac{d\alpha}{dt} + q\mu_1 = 0.$$

On tire de là:

$$Bq\frac{dq}{dt} + M\left(\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) = Z\frac{d\gamma}{dt} + X\frac{d\alpha}{dt}.$$

En intégrant, et remettant pour q sa valeur $\frac{d\theta}{dt}$, puis pour $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dt}$ leurs valeurs $-\mu\frac{d\theta}{dt}$, $-\mu_1\frac{d\theta}{dt}$, il vient:

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}(B + M(\mu^2+\mu_1^2)) = 2(Z\gamma + X\alpha) + h.$$

h désigne la constante arbitraire; d'ailleurs nous supposons que Z et X sont deux constantes, comme cela aurait lieu, si la pesanteur était la force qui sollicite le corps.

Lorsque l'équation de la courbe, suivant laquelle le plan $x'z'$ coupe la surface du corps, sera donnée, μ, μ_1, γ deviendront des fonctions de θ, faciles à obtenir sous forme finie. Du plus, μ_1 étant la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur la direction de la force f_1 est égale à $\pm\gamma$, et ne peut jamais s'évanouir. La figure 1. (Taf. I.) fait voir d'ailleurs que, pour θ positif, on a ζ négatif et ξ positif; donc $\mu_1 = \zeta\cos\theta - \xi\sin\theta$ est négatif; donc $\mu_1 = -\gamma$, attendu que γ reste nécessairement positif.

On a

$$d\alpha = -\mu_1 d\theta = \gamma d\theta, \quad \alpha = \int\gamma d\theta;$$

ainsi la quantité α est une fonction transcendante de θ, laquelle dépend de la rectification de la courbe. En conservant la lettre α comme signe de cette fonction, l'équation des forces vives devient

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}(B + M(\mu^2+\gamma^2)) = 2(Z\gamma + X\alpha + h).$$

Si la composante X est nulle, et que le corps n'ait point reçu d'impulsion initiale, on aura

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}(B + M(\mu^2+\gamma^2) = 2Z(\gamma - \gamma_0).$$

Z doit être supposée négative; par conséquent il est clair que le corps se mouvera dans le sens suivant lequel γ décroît, jusqu'à ce qu'il ait retrouvé une valeur de $\gamma = \gamma_0$, après quoi il reviendra sur lui même exécutant ainsi une série d'oscillations égales. L'amplitude des variations de

l'angle θ sera la même que s'il n'y avait pas eu de frottement, leur durée seule sera altérée.

Lorsque la courbe est symétrique par rapport à l'axe duquel on compte les angles θ, et l'écart initial θ_0 très petit, γ est une fonction paire de θ, de la forme

$$u_0 + u_2\,\theta^2 + u_4\,\theta^4 + \text{etc.}$$

μ s'évanouira avec θ, et sera par conséquent du même ordre que θ, ensorte que, dans le coëfficient de $\frac{d\theta^2}{dt^2}$, on pourra négliger le terme $M\mu^2$. Par la même raison γ^2 se réduira sensiblement à une constante u_0^2, et ainsi l'équation des forces vives deviendra:

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}(B + Mu_0^2) = 2Zu_2(\theta^2 - \theta_0^2).$$

Les oscillations seront isochrones avec celles du pendule simple qui aurait pour longueur

$$\frac{B + Mu_0^2}{2u_2},$$

si Z désigne le coëfficient de la gravité.

Sans le frottement, il est aisé de voir que l'équation des forces vives serait

$$B\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2Zu_2(\theta^2 - \theta_0^2),$$

en sorte que le frottement fait varier la durée des oscillations dans le rapport de

$$\sqrt{(B + Mu_0^2)} \text{ à } \sqrt{B}.$$

Or, dans l'hypothèse que nous traitons, les variations de l'angle θ, et la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ restant très petites, les quantités $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ sont aussi très petites; et puisqu'on a

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2} = f_1, \quad M\frac{d^2\gamma}{dt^2} = Z + P,$$

il en résulte que f_1 est aussi très petit par comparaison avec P. Donc, à moins de supposer le coëfficient ε beaucoup plus petit que l'expérience ne l'indique, même dans le cas du poli le plus parfait, l'inégalité $f_1 < \varepsilon P$ est toujours vérifiée. Ainsi l'action d'un frottement, même très faible, qui n'influe pas sur l'amplitude des oscillations du corps, peut influer considérablement sur leur durée. Par exemple, s'il s'agit d'un ellipsoïde homogène, dont les axes compris dans le plan de la courbe de section soient

m et n, m désignant le plus petit axe, la durée des oscillations sera augmentée par l'action du frottement, dans le rapport de $\sqrt{(m^2+n^2)}$ à $\sqrt{(6m^2+n^2)}$, et à la limite $m=n$, dans le rapport de $\sqrt{2}$ à $\sqrt{7}$.

Lorsque le corps a reçu une impulsion initiale θ'_0, la composante X restant nulle, la vitesse s'évanouira pour une valeur de γ

$$= \gamma_0 - \frac{\theta'^2_0}{2Z}(B + M(\mu_0^2+\gamma_0^2)),$$

et alors le corps décrira une série d'oscillations; mais s'il n'y a point de valeur de γ qui satisfasse à cette condition, le corps décrira une infinité de circonvolutions, toutes les quantités variables reprenant les mêmes valeurs, lorsque l'angle θ sera augmenté d'un nombre quelconque de circonférences.

Si l'on ne supposait plus que la composante X s'évanouit, le mouvement du corps pourrait être tantôt oscillatoire, tantôt progressif et indéfiniment accéléré, selon des circonstances qu'il serait facile de discuter d'après ce qui précède: en observant que l'intégrale α est une fonction impair de θ, ou qui change de signe avec cette variable, attendu que γ reste toujours positif.

2.

Nachtrag zu dem Eulerschen Lehrsatze von Polyëdern *).

(Vom Herrn Prof. Dr. *Hessel* zu Marburg.)

Der von Euler aufgestellte Lehrsatz **):

„dafs bei jedem, von ebenen Flächen begrenzten Körper die Summe $E+F$ der Zahl E der Ecken und der Zahl F der Flächen um zwei gröfser als die Zahl K der Kanten, also dafs $E+F=K+2$ sei, ist von Euler selbst anfangs ohne allgemein gültigen Beweis ausgesprochen***), aber für viele einzelne Fälle bewiesen worden, und aus diesen einzelnen Beweisen wurde von Euler zuletzt der Schlufs gezogen, dafs, weil in allen aufgeführten Fällen sich der Satz als wahr darstelle, kein Zweifel vorhanden sei über seine Richtigkeit für alle Ebenflächner†)."

Andere ausgezeichnete Mathematiker (Legendre, Cauchy, Gergonne, Rothe und Steiner)††) haben Beweise für die allgemeine Gültigkeit des Satzes geliefert. Indessen leidet derselbe Ausnahmen.

---

*) Erst nach Absendung des Manuscripts zu dieser Abhandlung, und nach langem vergeblichen Warten, erhielt der Verfasser von einer auswärtigen Bibliothek die Zeitschrift „*Annales de mathématiques* von Gergonne" und konnte in Band III. S. 169. sich überzeugen, dafs bereits L'Huilier die Ausnahme gegen das fragliche Gesetz beleuchtet hat, wodurch das, was vorliegende Arbeit enthält, mit Ausnahme dessen, was die Andeutungen von Ausnahmen gegen das Eulersche Gesetz betrifft, die bedingt werden, wenn zwei oder mehrere Kanten eine gemeinschaftliche Kantenlinie, oder wenn zwei oder mehrere Ecken einen gemeinsamen Eck-Punct haben, den Werth der Neuheit verliert. Demungeachtet hält er es aber für nöthig, dafs auf jene Ausnahmen aufmerksam gemacht werde, da selbst neuere Schriftsteller sie nicht immer ausdrücklich berücksichtigen.

**) *Novi commentarii Acad. scient. imp. Petrop. tom. IV. pag.* 119., wo er im §. 33. ausgedrückt ist auf folgende Weise:

„In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum."

***) Euler sagt a. a. O.:

Fateri equidem cogor, me hujus theorematis demonstrationem firmam adhuc eruere non posse.

†) a. a. O. S. 124.:

Cum igitur veritas propositionis in his omnibus casibus sibi constet, dubium est nullum, quin ea in omnibus omnino solidis locum habeat, sicque propositio sufficienter videtur demonstrata.

††) Vergl. dieses Journal Band I. S. 228. und 364., wo auch die literarischen Nachweisungen zu finden sind.

Euler führt in seiner Abhandlung bereits als Beispiel einen Körper an, welcher einspringende, rinnenartig vertiefte Kanten und einspringende Ecken hat, von welchen er die Gültigkeit seines Satzes darthut *), so dafs hieraus sich ergeben mufste, die Beschaffenheit solcher Ecken und Kanten sei bei Aufstellung dieses Satzes berücksichtigt. Um aber die Ausnahmen ins Klare zu setzen, möge immer neben einer Gestalt, bei welcher das Eulersche Gesetz **nicht** gültig ist, eine ihr sonst ziemlich ähnliche aufgeführt werden, bei welcher es seine Gültigkeit hat.

Beispiele, wo $E+F=K+2$.

Fig. 2. (Taf. I.)

Ein vierseitig-säulenförmiger Körper mit vierseitiger, röhrenartiger Durchbohrung und ebenen vierseitig-ringförmigen Endflächen, hat 8 äufsere und 8 innere Ecken, 4 äufsere und 4 innere Seitenflächen, 1 obere und 1 untere vierseitig-ringförmige Endfläche, 12 äufsere und 12 innere Kanten: hier ist also

$$E+F=K+2 \text{ oder}$$
$$16+10=24+2.$$

Fig. 4.

Ein quaderähnlicher Körper, mit vierseitig-trichterartiger Durchbohrung, die nach unten zu vierseitig-säulenförmig wird, mit 8 äufseren und 12 inneren Ecken, 1 oberen und 1 unteren vierseitig ringförmigen Endfläche, 4 äufseren und 4 inneren verticalen Seitenflächen, 4 Trichter-Flächen, 20 horizontalen, 8 verticalen, 4 geneigten Kanten, so dafs also

$$E+F=K+2 \text{ oder}$$
$$20+14=32+2.$$

Beispiele, wo $E+F=K+x$.

Fig. 3.

Ein vierseitig-säulenförmiger, an beiden Enden mit vierflächiger Facettirung versehener, vierseitig-röhrenartig-durchbohrter Körper hat 8 äufsere und 8 innere Ecken, 4 äufsere und 4 innere Seitenflächen, 4 obere und 4 untere Flächen, 12 äufsere und 12 innere Kanten (wie in Fig. 2.) und noch 4 obere und 4 untere schiefe Kanten; so dafs

$$E+F=K+x, \text{ hier also}$$
$$16+16=32+0 \text{ ist.}$$

Fig. 5.

Ein Körper, fast ähnlich dem Fig. 4., der aber, weil die Trichterflächen die obern Endflächen ganz verdrängt haben, nur 8 äufsere und 8 innere Ecken, 1 untere vierseitige ringförmige Endfläche, 4 äufsere und 4 innere verticale Seitenflächen, 4 Trichterflächen, 16 horizontale, 8 verticale und 4 geneigte Kanten hat, so dafs

$$E+F=K+x \text{ oder}$$
$$16+13=28+1.$$

*) a. a. O. Fig. 6.

Fig. 6.

Ein Körper von der Form eines steinernen Wassertroges, dessen Mündung $abcd$ mit 4 trapezförmigen Facetten umgeben ist. Er hat 8 äufsere Ecken wie g, 8 innere Ecken wie a, 2 horizontale, 8 verticale, 4 geneigte Flächen, 16 horizontale, 8 verticale und 4 geneigte Kanten; folglich ist

$$E+F=K+2 \text{ oder}$$
$$16+14=28+2.$$

Fig. 7.

Ein Körper von der Form eines gewöhnlichen steinernen Wassertroges mit ebener vierseitig-ringförmiger, oberer Horizontal-Fläche. Er hat 8 äufsere und 8 innere Ecken; 1 vierseitig-ringförmige und 2 gewöhnliche horizontale Flächen; 8 verticale Flächen, 12 innere und 12 äufsere Kanten; mithin ist hier

$$E+F=K+x \text{ oder}$$
$$16+11=24+3$$

Fig. 8.

Ein Körper von der Form einer aus drei Stufen bestehenden Treppe mit $3\times8=24$ Ecken, $3\times4+2=14$ Flächen und 36 Kanten, so dafs

$$F+F=K+2,$$
$$24+14=36+2.$$

Fig. 9.

Ein aus drei Stufen bestehender, ringsum freistehender-treppenartiger Körper *) mit $3\times8=24$ Ecken, $3\times5+1=16$ Flächen, $3\times12=36$ Kanten, wo also

$$E+F=K+x,$$
$$24+16=36+4.$$

Es mag dies hinreichen zu zeigen, dafs in der Gleichung

$$E+F=K+x$$

die Zahl x nicht blofs nach Euler 2, sondern auch eine andere Zahl 0, 1, 2, 3, 4, ... u. s. w. sein kann. Es ist nun auch noch darzuthun, dafs x negativ sein könne.

Berücksichtigt man, dafs bei Fig. 5. der Werth $x=2-1=1$ und bei Fig. 3. der Werth $x=2-2=0$ ist, und beachtet man, dafs z. B. die Fig. 3. als eine bestimmte Modification von Fig. 2. anzusehen ist, so wird einleuchten, dafs man durch ähnliche Modificationen aus Fig. 3. eine Gestalt erzeugen werde, wo $x=(2-2)-2=-2$ ist.

Ist daher $abcdiofenmpqghik$ (Fig. 10.) ein Körper von der Art wie Fig. 3., der aber, statt ebener Flächen $fbco$ und $mihp$, vierseitige Facettirungen hat, die durch eine vierseitige säulenartige Durchboh-

*) Vergl. Hauy's Lehre von der Entstehung des Zwölfrautenflächners aus dem Würfel; treppenartige Kochsalztrichter u. s. w.

rung $\alpha\beta\delta\gamma\tau\varepsilon\varrho\eta$ mit einander verbunden sind, so hat man 26 Flächen, 24 Ecken und 52 Kanten, so dafs hier die Gleichung

$$E + F = K + x \text{ sich in}$$
$$24 + 26 = 52 - 2$$

verwandelt, und also $x = -2$ ist, wie es vorauszusehen war.

Dafs auch Gestalten sich bilden lassen, wo x jede beliebige ganze Zahl mit dem Vorzeichen *minus* sein kann, braucht nun nicht erst noch weiter dargethan zu werden.

Bisher wurde nur von Gestalten gesprochen, deren Begrenzungsflächen unter sich in Zusammenhang stehen (gleichsam eine und dieselbe verschlungene Flächenkette bilden, deren Kanten als Verbindungs-Gelenke betrachtet werden können); in der Natur aber kommen auch Gestalten vor, wo dies nicht der Fall ist. Die Gestalt eines durchsichtigen Krystalls z. B., der einen minder durchsichtigen u. s. w. ringsum einschliefst, ist in seinem Innern, da wo er den eingeschlossenen berührt, gleichfalls mit Ebenen begrenzt (hat also gleichsam zwei Flächenketten, eine äufsere und eine innere), und ist deshalb als eigenthümliche Gestalt zu betrachten, die von der des nemlichen Krystalls, der den Einschlufs nicht enthält, stereometrisch wesentlich verschieden ist. Es wird daher nicht unzweckmäfsig sein, ein möglichst einfaches bestimmtes Beispiel dieser Art näher zu beleuchten.

Ein durchsichtiger Flufsspathwürfel umschliefse ringsum einen undurchsichtigen Bleiglanzwürfel, so hat die Gestalt dieser Flufsspathmasse 8 äufsere und 8 innere Ecken, 6 äufsere und 6 innere Flächen, 12 äufsere und 12 innere Kanten.

Es ist also hier in

$$E + F = K + x$$
$$16 + 12 = 24 + 4, \text{ also}$$
$$x = 4$$

mithin gleichfalls verschieden von 2.

Sind mehrere einander nicht berührende Bleiglanzwürfel in einem und demselben Flufsspathwürfel eingeschlossen, so wird, für jeden Bleiglanzwürfel mehr, die Summe der Ecken und Flächen um $8 + 6 = 14$ vermehrt, die Summe der Kanten aber nur um 12, so dafs für jeden neuen Bleiglanzwürfel der Werth von x um $14 - 12$ oder um zwei wächst, also stets eine gerade Zahl ist.

Obgleich das bisher Vorgetragene genügend sein könnte, so mögen doch noch einige Worte folgen, über Fälle wo es zweifelhaft ist, ob man es mit einer oder mehreren Ecken, und mit einer oder mehreren Kanten zu thun habe; denn auch sie müssen in der Gestaltenlehre berücksichtigt werden. Es fragt sich nemlich: ist unter Ecke blofs der Punct zu verstehen, in welchem sich drei oder mehrere Kantenlinien eines Körpers schneiden, oder ist die Ecke selbst zu verstehen, so, dafs der Fall denkbar ist, dafs zwei oder mehrere Ecken einen und denselben Scheitelpunct gemein haben. Nicht minder ist erst zu bestimmen, ob man unter Kante blofs die Kantenlinie verstehe, welche 2 Endpuncte verbindet, oder die Kante selbst, so, dafs der Fall gedacht werden kann, wo zwei oder mehrere Kanten eine und dieselbe Kantenlinie in derselben Längen-Erstreckung gemein haben.

Einen leichten anschaulichen Beweis des Satzes, dafs bei allen Ebenflächnern, in welchen jede gerade Linie, die zwei Ecken verbindet, ganz innerhalb des Körpers fällt, $E+F=K+2$ sei, und weitere Untersuchungen über die Bedingungen, unter welchen bei andern Ebenflächnern der Eulersche Satz gilt oder nicht gilt, werde ich späterhin bekannt machen; hier möge in letzterer Beziehung nur im Allgemeinen Folgendes mitgetheilt werden.

Jeder Körper kann angesehen werden als eine stereometrische Summe (algebraische Summe, jedoch mit Rücksicht auf die Art der Verbindung oder Trennung) von zweien oder mehreren andern Körpern.

Für die Glieder A, B, einer solchen, nur aus 2 Gliedern bestehenden stereometrischen Summe, d. h. für die beiden verbundenen Gestalten einzeln, seien folgende Gleichungen, die der Gleichung $E+F=K+x$ entsprechen, gültig:

1. $e'+f'=k'+a$ für die Gestalt A,
2. $e''+f''=k''+b$ - - - B.

und die entsprechende Gleichung für die Gesammtgestalt (für die stereometrische Summe) sei

3. $e+f=k+x$,

so ist aus 1. und 2.:

4. $(e'+e'')+(f'+f'')=(k'+k'')+(a+b)$, oder
5. $(e'+e'')+(f'+f'')-(a+b)=(k'+k'')$.

Ist nun, wie in dem oben angeführten Beispiele des Flufsspathwürfels, der einen Bleiglanzwürfel umschliefst,

$$6. \quad e = e' + e'',$$
$$7. \quad f = f' + f'',$$
$$8. \quad k = k' + k''.$$

so folgt aus (4., 6., 7. und 8.)

$$9. \quad x = a + b,$$

so dafs, wenn $a = b = 2$ ist, wie in jenem Beispiele, $x = 2 + 2 = 4$ sein wird.

Ist aber

$$10. \quad e' + e'' - e = \varepsilon,$$
$$11. \quad f' + f'' - f = \varphi,$$
$$12. \quad k' + k'' - k = \gamma,$$

also

$$13. \quad e = e' + e'' - \varepsilon,$$
$$14. \quad f = f' + f'' - \varphi,$$
$$15. \quad k = k' + k'' - \gamma,$$

so folgt aus (5. und 15.)

$$16. \quad k = (e' + e'') + (f' + f'') - (a + b + \gamma)$$

und aus (13. und 14.)

$$17. \quad e + f = (e' + e'') + (f' + f'') - (\varepsilon + \varphi).$$

Es folgt nun aus (16. und 17.)

$$18. \quad e + f - k = a + b + \gamma - (\varepsilon + \varphi),$$

mithin

$$19. \quad e + f - k - x = a + b + \gamma - (\varepsilon + \varphi) - x.$$

Da nun

$$e + f = k + x$$

ist, so mufs auch

$$20. \quad \varepsilon + \varphi = \gamma - x + (a + b) \text{ sein.}$$

Sind nun die beiden Gestalten A und B solche, für welche $a = b = 2$ ist, so hat man

$$21. \quad \varepsilon + \varphi = \gamma - x + 4,$$

also

$$22. \quad x = \gamma - \varepsilon - \varphi + 4.$$

Für Fig. 2. ist $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$ und $\varphi = 2$; daher

$$x = -2 + 4 = 2;$$

für Fig. 3. dagegen ist $\gamma = 8$, $\varepsilon = 8$ und $\varphi = 4$, also hier

$$x = 8 - 8 - 4 + 4 = 0.$$

Für Fig. 4. hat man $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$, $\varphi = 2$, also wieder

$$x = -2 + 4 = 2.$$

Für Fig. 5. aber ist auf ähnliche Weise

$$\gamma = 4,\ \varepsilon = 4,\ \varphi = 3, \text{ also}$$
$$x = 4 - 4 - 3 + 4 = 1.$$

Nennt man einen Ebenflächner, für welchen das Eulersche Gesetz ($E+F=K+2$) gilt, Eulerschen Ebenflächner (*solidum Eulerianum*), so kann man sagen:

Die Beantwortung der Frage, ob die stereometrische Summe zweier Eulerscher Ebenflächner wieder einen Eulerschen Ebenflächner darstelle, hange von der Art und Weise ab, wie beide mit einander verbunden sind, nicht aber von ihrer sonstigen Beschaffenheit; und zwar stellt die stereometrische Summe zweier Eulerscher Ebenflächner wieder einen Eulerschen Ebenflächner dar, wenn ihre Verbindungs-Art so ist, dafs die Summe der Zahl der durch die Verbindung verschwundenen *) Ecken und Flächen beider, gleich ist der um 2 vermehrten Zahl der verschwundenen Kanten; d. h. wenn

$$23.\quad \varepsilon + \varphi = \gamma + 2$$

ist; denn aus (22.) folgt für $x = 2$ auch

$$2 = \gamma - \varepsilon - \varphi + 4, \text{ oder}$$
$$\varepsilon + \varphi = \gamma + 2.$$

Wenn zwei Eulersche Ebenflächner von aufsen so aneinander gefügt werden, dafs eine p seitige Begrenzungs-Fläche des einen zusammenfällt mit einer ihr, als ebene Figur an sich betrachtet, gegenbildlich **) gleichen Begrenzungsfläche des andern, so dafs diese beiden Begrenzungsflächen sich decken (mithin verschwinden), so die Summe der beiden Gestalten, als ein neues Ganzes betrachtet, ein Eulerscher Ebenflächner.

Beweis 1. Wenn jede der p Seiten der Vereinigungsfläche eine Kante des neuen Körpers ist, so ist $\varphi = 2$, $\varepsilon = \gamma = p$, und also

$$\varepsilon + \varphi = \gamma + 2.$$

woraus das zu Beweisende folgt.

---

*) Dies Verschwinden von Ecken ist eine Verminderung der Summe der Ecken beider Körper. Die Vermehrung der Kanten- oder Eckensumme der Körper kommt natürlich als negative Verminderung in Rechnung.

**) Der Ausdruck gegenbildlichgleich (*symmetrice aequalis*), als dem ebenbildlich gleich entgegengesetzt, ist in meiner Krystallometrie erläutert. Der ebene Spiegel läfst das Gegenbild des vor ihm stehenden Gegenstandes in sich wahrnehmen.

2. Ist eine der p Seiten jener Vereinigungsfläche nicht eine Kante des neuen Körpers, so fällt auch eine der Flächen des einen der beiden verbundenen Körper so in die Verlängerung einer solchen des andern, dafs beide für den neuen ganzen Körper blofs für Eine Begrenzungsfläche zu zählen sind, und es ist dann $\varphi = 3$, $\varepsilon = p$, $\gamma = p + 1$, folglich $\varepsilon + \varphi = \gamma + 2$.

3. Verschwinden zwei der Seiten der Vereinigungsfläche, so dafs sie am Gesammtkörper nicht Kanten sind, so sind dieselben

a) entweder nicht aneinander stofsende Seiten; dann wiederholt sich blofs das vorhin (2.) Gesagte, und es ist $\varphi = 4$, $\varepsilon = p$, $\gamma = p + 2$, mithin $\varepsilon + \varphi = \gamma + 2$.

b) oder sie stofsen aneinander; dann ist es möglich, dafs

α) entweder die Ecke, die jenem Vereinigungspuncte der verschwindenden Seiten angehört, nicht verschwindet, und dann ist der Fall blofs ein solcher wie 2, *a*.

β) oder diese Ecke verschwindet; dann fällt aber noch eine, nicht in der Vereinigungs-Ebene liegende Kante des einen der beiden verbundenen Körper, in die Verlängerung einer solchen des andern. Es ist dann $\varphi = 4$, $\varepsilon = p + 1$ und $\gamma = p + 3$, so dafs auch hier

$$\varepsilon + \varphi = \gamma + 2.$$

4. Verschwinden mehr als zwei Seiten der Vereinigungs-Ebene, so wiederholt sich, für jede verschiedene solche Seite mehr, das unter (3.) Bemerkte, so dafs jedesmal $\varepsilon + \varphi = \gamma + 2$ ist, weil jede Vermehrung, die auf der linken Seite dieser Gleichung um eine oder mehrere Einheiten statt hat, auch eine eben so grofse auf der rechten Seite, rücksichtlich auf den Werth von γ bedingt.

5. Wenn keine Seite der Vereinigungs-Ebene als Kantenlinie auftritt und auch keiner der Scheitel der Winkel dieser Ebene als Eckpunct des neuen Körpers gezählt werden darf, so ist $\varphi = 2 + p$, $\varepsilon = 2p$ und $\gamma = 3p$, so, dafs auch hier $\varepsilon + \varphi = \gamma + 2$ ist; wie sich schon aus (3. und 4.) ergiebt.

3.

Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques.

Pour faire suite aux *Mémoires sur les centres de moyennes harmoniques et la théorie générale des polaires réciproques.*

(Par M. *J. V. Poncelet,* chef de Bataillon du Génie.)

„La théorie des transversales n'est à proprement parler, que la théorie des coordonnées qui, au lieu de faire un angle, sont prises sur une même droite."

CARNOT, Essai sur la théorie des transversales.

Introduction générale.

J'ai annoncé, dans le tome VIII. des *annales de mathématiques* (année 1827), des moyens généraux pour construire *linéairement* ou avec une simple règle, les tangentes des courbes géométriques; je suis en effet parvenu, dès le commencement de 1816, à ce résultat ainsi qu'à beaucoup d'autres concernant le cercle osculateur et les sections coniques osculatrices des divers ordres, en un point donné d'une telle courbe censée décrite. Dans une lettre, en date de Mai 1818, j'annonçai ces résultats à Mr. *Servois,* savant géomètre dont je m'honorerai toujours d'être l'ami et le disciple: je lui signalai, comme exemple, les corollaires particuliers relatifs aux courbes du 3e dégré, lesquelles donnent lieu à des théorèmes et à des constructions d'une simplicité vraiment remarquable, et qui peut se comparer à ce que l'on connaît des belles propriétés des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques dues à *Pascal* et à *Brianchon.* Je fis également part de ces corollaires à différens autres géomètres qu'il serait ici inutile de citer. Enfin je donnai à la *société académique de Metz,* dans sa séance du mois de décembre 1821, communication de l'ensemble de mes recherches sur les *propriétés projectives des lignes géométriques d'un ordre quelconque* *).

---

*) Voyez le *compte rendu des travaux* de cette *académie pendant l'année* 1821 à 1822, imprimé à Metz, chez Lamort, en Mai 1822.

Mr. *Arago*, membre de l'académie des sciences de Paris, qui était présent à cette séance, voulut bien me témoigner tout l'intérêt que lui inspiraient la nouvauté et la généralité de ces recherches; il m'encouragea même à les mettre promptement au jour; mais, d'après le plan que je m'étais dès-lors formé, cette publication devait être précédée de celle du *traité des propriétés projectives des figures*, qui eut lieu en effet l'année suivante (1822), et dans laquelle je n'avais presqu'uniquement en vue que les lignes et surfaces des deux premiers degrés, ainsi que les principes généraux de projection qui pouvaient m'être utiles pour établir ultérieurement la théorie géométrique des courbes et surfaces d'un ordre quelconque.

J'annonçai néanmoins, en terminant l'introduction de cet ouvrage, les recherches toutes spéciales que j'avais entreprises sur ce dernier sujet, et, dans la section II. du texte, pag. 80. No. 151., je fis voir comment, par les principes de la projection centrale, on peut immédiatement passer, du théorème de *Newton* relatif aux produits des abscisses et des appliquées parallèles des courbes géométriques, au principe plus général de *Carnot* concernant les triangles et les polygones plans ou gauches coupés arbitrairement par de telles lignes ou par des surfaces géométriques quelconques.

En remarquant que, par suite de l'universalité de ces théorèmes, les lignes et surfaces dont il s'agit doivent jouir de certaines propriétés qui leur sont communes avec les systèmes analogues de lignes droites et de surfaces planes; en affirmant qu'il était facile d'en déduire un grand nombre de conséquences particulières, mon intention était de faire pressentir la fécondité et l'extension que pouvait reçevoir la doctrine des transversales, dont les admirables élémens sont un des principaux titres scientifiques de l'illustre et infortuné géomètre que je viens de citer; mais je ne sache pas que, depuis la publication du *traité des propriétés projectives*, personne ait encore tenté d'ouvrir cette nouvelle route de découvertes dans laquelle, je le répète, j'avais déjà parcouru un certain chemin dès l'année 1818, et dont Carnot lui même ne semble pas avoir soupçonné toute la fécondité, si l'on en juge par ce qu'il a écrit, dans sa *géométrie de position* et dans son *essai sur la théorie des transversales*, touchant les applications du principe général qui lui est dû.

En 1823, je profitai de quelques loisirs pour rédiger, sur les *centres de moyennes harmoniques* et sur la *théorie des polaires récipro-*

ques, les deux mémoires que je présentai, à l'entrée de l'année suivante, à l'Académie Royale des sciences de Paris, et qui furent publiés depuis dans les années 1828 et 1829 dans le présent journal *), lequel, dès-lors, avait justement acquis une réputation européenne. Les mémoires, ainsi que l'indiquent leurs titres, devaient servir d'introduction ou de préliminaires à l'ouvrage étendu que je me proposais de faire paraître sur les propriétés projectives des courbes et des surfaces géométriques. En traitant, en particulier, des nouvelles et élégantes propositions auxquelles donne lieu la théorie du centre des moyennes harmoniques pour les systêmes de plans et de droites arbitraires, je ne manquai pas de signaler d'une manière expresse, l'extension dont leur énoncé est susceptible quand on y remplace ces systêmes par des lignes et surfaces géométriques quelconques.

Voici comment je m'exprime, dans un passage qui termine le discours préliminaire **) du mémoire qui contient cette théorie: „J'ai ex-„posé, dans la dernière partie de mon mémoire, quelques unes des pro-„priétés qui découlent de la théorie du centre des moyennes harmoniques, „pour les systèmes de points, de droites et de plans; et, afin de n'en pas „multiplier inutilement le nombre, je me suis constamment borné à celles „dont la nature générale permet de les appliquer immédiatement aux cour-„bes et aux surfaces géométriques d'un ordre quelconque, mettant ainsi „ceux qui liront ce mémoire, en état de pressentir cette extension et de „se familiariser, par degrés, avec ce qu'elle pourrait, au premier aperçu, „avoir de trop difficile ou de trop abstrait."

Pour ceux qui ont donné quelqu'attention au contenu du mémoire dont il s'agit et notamment aux articles qui commencent au No. 51., il paraîtra évident, en effet, que cette extension est une conséquence nécessaire, et de ce que les principales propriétés des *centres*, *axes* et *plans de moyennes harmoniques* qui y sont exposées peuvent être toutes déduites directement du théorème cité de *Carnot*, et de ce que ce même théorème est indistinctement applicable aux courbes et aux surfaces géométriques comme aux systèmes de droites et de plans arbitraires.

---

*) Voyez tom. III. pag 213. et tom. IV pag. 1.

**) ibid. pag. 220. et 221. du tom. III.

Lorsque j'annonçai, dans mes deux mémoires de 1824, la publication prochaine et successive de mes recherches relatives aux courbes et aux surfaces géométriques, je pensais que le service dont j'étais alors chargé comme ingénieur, me laisserait, d'année en année et pendant les courts intervalles de la suspension des travaux, assez de loisir pour mettre la dernière main à chaque partie; mais ma nomination de professeur à l'École de l'artillerie et du génie à Metz, en 1825, le cours de mécanique appliquée aux machines que je fus chargé d'y créer, joint au fâcheux état de ma santé, me contraignirent d'ajourner toute rédaction définitive. Il résulte, de ce retard, que j'ai été prévenu dans la publication de quelques unes d'entre elles, notamment de celles qui concernent la communauté d'intersection des lignes et surfaces géométriques, ainsi que les propriétés de leurs centres, axes et plans de moyennes harmoniques. En s'occupant avec succès, de ces dernières recherches, depuis l'année 1826, M.M. *Bobillier*, *Chasles* et *Gergonne*, se sont servi d'ailleurs de moyens très différens de ceux que j'ai moi même mis en usage, et qui reposent essentiellement sur les principes de l'analyse des coordonnées, combinés avec quelques données fournies par la géométrie intuitive, et notamment par la théorie des projections centrales et des polaires réciproques.

Du reste, avant 1825, époque depuis laquelle je n'ai rien ajouté d'essentiel à mes recherches géométriques, on ne connaissait, si je ne me trompe, sur l'objet que j'avais spécialement entrepris de traiter, que: 1° les trois théorêmes de *Newton* sur les appliquées parallèles des courbes, leurs diamètres conjugués à une direction donnée, et la coincidence de ces diamètres avec ceux des asymptotes; 2° les trois théorèmes qui se déduisent respectivement de ceux là, par nos principes de projection centrale, en remplaçant les sécantes parallèles par des droites convergeant au même point, les asymptotes par un système quelconque de tangentes dont les points de contact sont rangés en ligne droite, le centre des moyennes distances par le centre des moyennes harmoniques: théorèmes dont le premier d'ailleurs n'est autre que celui de *Carnot* déjà plusieurs fois cité, dont le second ou son annexe a été découvert par le célèbre *Cótés*, et dont le troisième, dû à *Maclaurin*, se trouve exposé dans le *traité des propriétés générales des lignes géométriques*, imprimé, sous la forme *d'appendice*, à la suite de *l'algèbre posthume* de cet auteur, édition de Londres 1748; 3° Enfin, plusieurs autres théorèmes, exposés également dans ce *traité* de

Maclaurin, et qui ont trait au *cercle osculateur*, à la *parabole osculatrice* des lignes géométriques, auxquelles il faut joindre différentes propriétés intéressantes sur les lignes du 3e ordre que cet illustre géomètre a envisagées d'une manière tout-à-fait spéciale et qu'il déduit, de même que les précédentes, de ce principe général: „Si, d'un point fixe pris arbi„trairement sur le plan d'une courbe géométrique quelconque, on mène „une droite arbitraire, puis les tangentes aux intersections de cette droite „avec la courbe, supposées en nombre égal à celui qui exprime le degré „de cette courbe; qu'enfin, ayant tracé, à volonté, une nouvelle transver„sale par le point fixe dont il s'agit, on fasse, d'une part, la somme algé„brique des *réciproques* ou *valeurs inverses* des abscisses interceptées, „par la courbe, sur cette transversale et à compter du point fixe, d'une „autre, la somme pareille relative au système des tangentes issues des „points de la première transversale, 1° les deux sommes seront égales „entre elles, 2° elles seront constantes quelles que soient les transver„sales menées par le point fixe."

Maclaurin déduit cette proposition remarquable du théorème de *Newton*, sur le rapport invariable du produit des abscisses au produit des appliquées parallèles des courbes, en recherchant directement, à l'aide des données de la figure, l'expression des différentielles logarithmiques de ces produits, qui sont évidemment égales entre elles; mais il est clair que la considération directe des coefficiens des deux derniers termes des équations qui ont pour racines les abscisses relatives à la courbe ou au système des tangentes ci-dessus, conduirait, sur le champ et sans discussions géométriques, à la proposition dont il s'agit, de la même manière que la considération du dernier terme des équations qui ont pour racines les appliquées et abscisses correspondantes des courbes, a conduit *Newton* au théorème sur les produits de ces abscisses et appliquées, de même enfin que la considération du second terme de la première de ces deux équations, lui a fait découvrir la propriété des diamètres etc. *).

*) En général, la considération d'une fonction symétrique quelconque des racines de l'équation qui donne les abscisses des intersections de la courbe avec une droite ou un axe variable suivant une loi donnée, conduit à une infinité de théorèmes analogues à celui de *Côtes*, et qui sont également susceptibles de s'étendre aux surfaces géométriques de tous les ordres.

Cette remarque, au surplus, n'a point échappé à notre auteur qui, après s'être servi de la proposition fondamentale ci-dessus pour en déduire le théorème de *Côtes* sur la droite *lieu des centres de moyennes harmoniques des intersections d'une courbe géométrique et d'une droite mobile autour d'un point fixe*, s'est proposé ensuite de démontrer le même théorème par les considérations qui résultent directement de la théorie des équations algébriques.

Si nous insistons sur cette remarque, c'est pour mettre en parfaite évidence la corrélation qui a lieu entre les théorèmes de *Newton*, de *Côtes*, de *Maclaurin* et de *Carnot*, corrélation qui est telle que, bien que ces théorèmes dérivent de la considération de termes distincts dans l'équation qui a pour racines les abscisses ou segmens proposés, néanmoins ils peuvent aussi se déduire les uns des autres, d'une manière purement géométrique et par forme de simples corollaires. C'est, en effet, ce que nous avons reconnu dès nos premières recherches sur les propriétés projectives des courbes et surfaces géométriques, dans lesquelles, prenant le théorème de *Carnot* pour point de départ, nous en avons déduit, à *posteriori*, ceux de *Newton*, de *Côtes* et de *Maclaurin*, ainsi que beaucoup d'autres d'un genre très différent et qui n'étaient point encore connus des géométres.

Nous aperçumes aussi, tout d'abord, que ces mêmes théorèmes, démontrés seulement pour les courbes planes, étaient susceptibles de s'étendre immédiatement aux lignes à double courbure et aux surfaces géométriques, à peu près de la même manière que les propriétés des sections coniques s'étendent aux surfaces du second dégré, et celles des systèmes de droites comprises dans un plan unique, aux systèmes de droites ou de plans situés à volonté dans l'espace.

Enfin nous reconnûmes que les divers théorèmes avaient leurs corrélatifs ou réciproques, et que l'ensemble des uns et des autres donnoit lieu à une série de propositions entièrement analogues à celles qui constituent la théorie des *pôles*, *polaires* et *plans polaires* des lignes et surfaces du second degré, ou celle du *centre*, des *diamètres* et *plans diamétraux* de ces lignes et surfaces. Mais, pour mettre cette analogie dans tout son jour, il nous a fallu, au préalable, donner à la *théorie du centre des moyennes harmoniques* ainsi qu'à celle *des polaires réciproques*, toute l'extension et la généralité dont elles sont susceptibles, comme doctrines fondamentales; et c'est ce qui nous a déterminé, dès 1823, à rédiger et

à publier séparément nos deux mémoires sur ces matières, dans lesquels nous n'avons pour ainsi dire pas perdu de vue, un seul instant, l'objet de nos recherches subséquentes sur les propriétés projectives des courbes et surfaces géométriques d'un ordre quelconque.

Revenant maintenant au théorème de *Carnot*, qui n'est, comme on l'a vu, que l'extension de celui de *Newton* sur les produits des abscisses et des appliquées parallèles des courbes, nous ferons remarquer que la démonstration directe qu'on en trouve à la page 292. de la *Géométrie de position*, est bien loin d'être aussi satisfaisante que pourraient le désirer les amateurs des méthodes intuitives et purement géométriques, de sorte que ce théorème reste encore à démontrer, si l'on ne veut point recourir aux principes de l'analyse des coordonnées, ou si mieux on ne préfère l'envisager, à *priori*, comme une simple définition des lignes et surfaces géométriques, fondée sur ce que l'on connaît déjà des lignes et des surfaces des deux premiers degrés et des systèmes composés d'un certain nombre de ces lignes ou surfaces, auxquels les théorèmes de *Carnot* et de *Newton* sont immédiatement applicables.

Désargues, comme nous l'avons déjà fait observer ailleurs, (*Traité des propriétés projectives des figures, Introduction, p.* XXXVIII.), avait eu la singulière et lumineuse idée de traiter les courbes géométriques comme une assemblage de lignes droites en nombre égal à celui qui marque le degré de ces courbes, ou le plus grand nombre des points suivant lesquels elles peuvent être coupées par une transversale arbitraire; c'est-à-dire qu'il leur appliquait les mêmes raisonnemens, leur attribuait les mêmes propriétés, toutes les fois, sans doute, qu'il ne s'agissait que de ces relations générales et indépendantes de grandeurs déterminées, que nous avons nous même nommées *projectives*, et qui font le caractère propre des spéculations de la théorie des transversales ou de la géométrie de la règle, relations qu'on voit déjà subsister, sans aucune modification essentielle, pour les systèmes de lignes droites comme pour les sections coniques ou lignes du second ordre. Mais ce n'est là encore qu'une pure induction qui, bien que très forte si l'on prétend tenir compte des différences spécifiques qui distinguent les simples assemblages de lignes droites des courbes véritables, ne peut néanmoins être admise, tout au plus, que comme moyen d'investigation, ainsi que le faisait observer notre illustre *Descartes* dans une lettre, au *P. Mersenne*,

concernant les recherches géométriques de *Désargues* qui fût son contemporain et son ami.

Ce qui s'oppose d'ailleurs à ce qu'on admette, à *priori*, le théorème de *Carnot* ou celui de *Newton* comme définition des courbes géométriques, c'est que ces courbes possèdent, en elles-mêmes, un caractère qui les définit universellement et d'une manière purement intuitive: celui de ne pouvoir être coupées, au moyen d'une droite ou d'un plan arbitraires, qu'en un nombre de points limité et déterminé pour chacune d'elles; d'où il résulte qu'en partant des théorèmes dont il s'agit, on n'est point sûr d'embrasser à la fois toutes les lignes d'un même degré, et qu'il devient indispensable de démontrer, pour chaque ligne d'espèce donnée ou définie par une construction géométrique, qu'elle jouit effectivement du caractère supposé par ces théorèmes, avant de lui appliquer aucune des conséquences qui en dérivent; or une semblable démonstration pourrait, dans certains cas, présenter des difficultés presqu'insurmontables sous le point de vue purement géométrique.

Ces considérations nous avaient depuis longtems engagé à rechercher, du théorème de *Newton* sur les appliquées parallèles des courbes, une démonstration qui fût indépendante de leur définition au moyen des équations algébriques entre les coordonnées ordinaires, et uniquement fondée sur la limitation du nombre des intersections possibles de la courbe avec une droite ou transversale arbitraire. Ce genre de démonstration, dont nous avions déjà donné une idée et divers exemples dans nos précédens *mémoires* de géométrie et spécialement dans le *Traité des propriétés projectives* (section IV. chap. III. pag. 332. et suiv.; supplément pag. 384. et suiv.), repose sur le *principe de continuité* *), que nous aurons souvent occasion de mettre en usage en traitant des propriétés projectives des courbes et surfaces géométriques, et sur lequel il convient que nous revenions un instant dans ces préliminaires.

Envisagé dans son application aux courbes planes continues, c'est-à-dire aux courbes dont les différentes parties, les différentes branches sont assujetties à une même loi géométrique, à un même mode de génération, ce principe consiste spécialement en ce que toute droite tracée ar-

---

*) Voyez aussi sur ce principe, les reflexions des pag. xx. et suiv. de *l'Introduction* du *Traité* dont il s'agit.

bitrairement au travers d'une telle courbe, doit toujours être censée la rencontrer en un nombre de points, invariable et égal à celui qui désigne son degré; ce qui, d'après ce qu'on sait déjà des lignes du second ordre, oblige à admettre aussi bien les intersections imaginaires que les intersections réelles, les intersections situées à l'infini que celles qui se trouvent à distance donnée, et d'où il résulte généralement que toutes les fois qu'il sera possible de prouver, en toute rigueur et en ayant égard uniquement au mode de génération d'une ligne courbe située sur un plan, qu'une certaine droite, tracée dans ce plan, n'a en commun avec elle que m points, soit réels, soit imaginaires, situés ou non à l'infini, confondus en un seul ou réunis par groupes distincts de deux ou de plusieurs points, il sera, par là même, démontré que la courbe est effectivement et au plus du degré marqué par le nombre m.

En particulier, si cette courbe est engendrée par la trace de certains points assujettis à une construction unique, et qui se trouvent situés sur une droite mobile autour d'un autre point donné servant de *pôle fixe*; pour pouvoir prononcer affirmativement sur le degré de la courbe, il suffira de rechercher le nombre total des points dont il s'agit, et de s'assurer qu'aucune des branches de cette courbe ne passe par le pôle fixe, ou qu'aucun de ses points générateurs ne vient à se confondre avec ce pôle, pour certaines positions de la transversale mobile qui les renferme: autrement, en effet, le nombre des intersections se trouverait augmenté de celui qui marque la multiplicité de la courbe en ce pôle, je veux dire du nombre des branches distinctes, réelles ou imaginaires, qui y passent, ou du nombre de coïncidences distinctes des points générateurs avec ce même pôle.

Si d'ailleurs les transversales, au lieu d'être concourantes en un point fixe, étaient simplement assujetties à demeurer parallèles entre elles ou à une droite donnée, les mêmes choses auraient encore lieu, si ce n'est que le pôle étant alors situé à l'infini, on devrait, dans chaque cas, rechercher le nombre des positions distinctes de la transversale pour lesquelles l'un de ces points générateurs passe à l'infini et se confond ainsi avec ce pôle; or c'est ce que la discussion exacte apprendra toujours, dans chaque cas spécial, et quand le mode de construction des points générateurs que contient chaque transversale sera rigoureusement défini. Mais, afin de ne pas courir le risque de se tromper dans l'appréciation du

degré ou du nombre total et effectif des intersections des transversales, il sera indispensable de procéder, d'une manière entièrement directe, à la recherche de ces intersections, comme s'il s'agissait de résoudre un problème ordinaire de géométrie, et de ne point s'en rapporter simplement à ce que pourrait apprendre une discussion purement intuitive on fondée sur les apparences offertes par le tracé effectif de la courbe, laquelle devra toujours être censée non encore décrite.

La solution de ce problême qui se compose, comme on voit, de deux parties distinctes, pourra presque toujours être ramenée à celle d'un autre où il s'agira de découvrir les intersections d'une certaine droite avec une courbe de degré donné à *priori;* ce qui lèvera toute espèce d'incertitude, puisqu'on connaîtra ainsi rigoureusement le nombre de ces intersections quelle qu'en soit la nature, c'est-à-dire réelle, imaginaire etc. Si, au contraire, les intersections cherchées n'étaient déterminées que par les relations purement métriques qui les lient, soit entr'elles, soit avec des grandeurs connues, il faudrait prendre garde de ne négliger aucune des combinaisons essentielles et distinctes des inconnues et des données, c'est-à-dire aucune des permutations, des changemens de position et d'ordre, qui, sous le point de vue géométrique ou arithmétique, peuvent s'opérer entre ces diverses quantités, et donner lieu ainsi à la multiplicité des solutions de chaque problême.

Qu'au nombre des données se trouvent, par exemple, les intersections de la transversale, mobile autour du pôle fixe, avec une certaine courbe simple, assujettie au même mode de génération ou de construction dans toutes ses parties et dont le degré soit connu, on devra se rappeler qu'en vertu de la continuité, ces diverses intersections jouent absolument le même rôle et ne doivent point être distinguées les unes des autres, de sorte qu'il est permis de les permuter entre elles sans, pour cela, changer ou altérer en rien l'état des questions qui s'y rapportent. Or cette circonstance tient à ce que les différentes branches ou parties des courbes simples, sont rentrantes sur elles mêmes ou se fondent, pour ainsi dire, les unes dans les autres sans solution de continuité, et elle n'aurait plus lieu évidemment si ces courbes n'étaient pas assujetties, dans toute leur étendue, à une loi unique, ou si elles se composaient de différentes lignes particulières et qui seroient soumises à des modes de génération distincts.

Mais nous n'avons point l'intention de nous étendre ici sur le principe de continuité considéré même dans la théorie des courbes; nous y reviendrons peut être un jour d'une manière toute spéciale, selon la promesse que nous en avons déjà faite dans *l'Introduction* du *Traité des propriétés projectives*; il nous suffira, pour le moment, d'avoir posé ou rappelé les généralités qui précèdent, dont les applications particulières présentent rarement des difficultés sérieuses, comme le prouvent les différens exemples qui en ont été donnés dans le *Traité* dont il s'agit.

Qu'il s'agisse, en particulier, de démontrer le théorème de *Côtes* mentionné plus haut, et qui n'est que l'extension, aux lignes géométriques en général, de celui du No. 42. de notre *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques*, relatif aux simples systèmes de lignes droites situées dans un plan: attendu qu'on n'a qu'un seul centre à considérer sur chacune des transversales issues du pôle fixe, et que ce centre ne peut jamais coïncider avec le pôle, dès 'que ce dernier est indépendant de la courbe, on voit que le lieu examiné ne saurait être que du premier degré ou une simple ligne droite. Mais cela suppose expressément, comme on voit, que les moyennes harmoniques soient prises par rapport à des coëfficiens numériques égaux entre eux ou à l'unité; car, s'il en était autrement, la permutation qui, d'après ce qui précède, devrait être opérée entre les coëfficiens relatifs aux diverses branches de la courbe, donnerait lieu à un nombre $m(m-1)$ de centres des moyennes harmoniques pour chaque transversale, m étant d'ailleurs le degré de cette courbe ou le nombre de ces branches.

Comme nous nous proposons, dans ce travail, de conclure directement le théorème de *Côtes* du principe des transversales de *Carnot*, nous n'insisterons pas sur la démonstration qui précède, et nous passerons de suite à celle qui concerne le théorème fondamental de *Newton*, relatif aux abscisses et appliquées parallèles des courbes géométriques. A cet effet nous nommerons q, q', q'', ... les intersections réelles ou idéales d'une telle courbe, supposée du degré m, avec une droite ou un axe fixe tracé arbitrairement dans son plan, et p, p', p'', ... ses intersections avec une parallèle quelconque à une droite donnée, dont le point de rencontre avec le premier axe, sera, de plus, représenté par la lettre α. Cela posé nous savons déjà que si, au milieu d'une courbe unique et distincte, du degré m, nous avions à considérer un assemblage de droites ou de

sections coniques dont la somme des degrés fût égale à m, nous aurions sans cesse la relation

$$\frac{ap.ap'.ap''....}{aq.aq'.aq''....} = \text{const.} = k,$$

qui exprime que le produit des *ordonnées* ou *appliquées* ap, ap', ap'', ... est à celui des *abscisses* aq, aq', aq'', ... dans un rapport qui demeure invariable quelle que soit la position du point a sur l'axe fixe, et bien que certains des segmens qui y entrent puissent devenir nuls, infinis, imaginaires, ou changer de sens et de signe avec la position de ce point ou des appliquées qui lui correspondent. Or cela tient uniquement à ce que les produits dont il s'agit n'ont qu'une seule valeur pour une même position, valeur indépendante de l'ordre dans lequel on combine entre eux leurs facteurs simples, soit numériquement ou par le calcul, soit géométriquement ou par des constructions graphiques qu'il est facile d'imaginer, et sur lesquelles nous n'insisterons pas, attendu qu'elles se rapportent à des problèmes élémentaires bien connus.

Supposons, en effet, qu'on porte, sur chacune des appliquées parallèles et à compter de l'axe fixe ou du point a, une longueur ay qui ait, avec une certaine ligne prise pour *unité* de mesure, le même rapport que k avec l'unité numérique ou absolue, et qui, de plus, ait le sens que réclame la loi des signes de position ou la construction effective et géométrique de ay; il est évident qu'on n'obtiendra, dans le cas de la courbe comme dans celui d'un simple assemblage de droites ou de lignes du second ordre, qu'un seul point y, et que la suite de tous ces points formera une ligne continue assujettie, dans toutes ses parties, à la même loi, au même mode de génération; or je dis que cette ligne est généralement une droite parallèle à l'axe fixe, comme cela a lieu notoirement pour le cas où la proposée se compose d'un système de lignes du premier ou du second degré; ce qui revient à dire que ay ou k demeure constant pour tous les cas possibles.

D'abord il est aisé de se convaincre que jamais le point générateur y ne peut s'éloigner à l'infini du point a ou de l'axe fixe; car il faudrait pour que cela eût lieu, ou que l'un des segmens qui entrent dans le numérateur $ap.ap'.ap''....$ de k, devînt lui même infini, ce qui ne peut être à moins que la direction de l'appliquée n'ait été prise, contrairement à nos hypothèses, parallèlement à l'une des branches ou des asymptotes

de la courbe, ou à moins que l'appliquée toute entière ne soit supposée à l'infini. Mais, en comparant ce qui arrive, dans ce dernier cas, avec ce qui aurait lieu pour celui d'un simple assemblage de lignes droites ou de sections coniques; il sera facile de voir que le rapport k n'en conserve pas moins une valeur unique, qui est finie si la direction de l'axe fixe et celle des appliquées sont quelconques par rapport aux directions des différentes branches de la courbe proposée, et qu'on peut même calculer ou construire géométriquement si les m asymptotes de cette courbe ou les directions de ses m branches infinies sont données. En effet, traçant, par exemple, les m droites pq, $p'q'$, $p''q''$ .... parallèles à ces directions ou qui joignent respectivement les intersections fixes q, q', q'' .... aux intersections p, p', p'' .... de l'appliquée censée toute entière à l'infini, la valeur du rapport k sera donnée pour ces m droites, et la même que celle qui appartient aux intersections dont il s'agit.

Les différentes appliquées parallèles ap, ne contenant donc qu'un seul point y à distance donnée, et n'en ayant aucun à l'infini, il résulte, du principe général posé ci-dessus, que la suite de tous ces points y est une ligne du premier degré ou une simple droite. Je dis, en outre, que c'est une parallèle à l'axe qq' des abscisses; et, pour le prouver, il ne s'agit que de faire voir clairement qu'elle ne saurait rencontrer cet axe en un point qui soit situé à une distance assignable ou finie: or cela paraîtra parfaitement clair si l'on considère que, pour l'appliquée correspondante à ce point, l'un des segmens ap, ap' .... devrait s'évanouir, ce qui ne peut être qu'autant que l'intersection de la courbe, relative à ce segment, se trouve en a sur l'axe fixe qq', et sans que par conséquent l'abscisse correspondante ne devienne aussi nulle. Mais la loi de continuité assigne une tangente en ce même point de la courbe, dont le rapport, de l'ordonnée à l'abscisse, est précisément le même que celui des segmens nuls ou infiniment petits que l'on considère. Donc ce dernier rapport et, par suite, la valeur de ay ou de k, ne cessent point d'être déterminés et ne peuvent devenir nuls tant que le point d'origine a des appliquées se trouve à une distance donnée ou finie sur l'axe des abscisses, ou tant qu'il n'arrive pas que les élémens tangentiels de la courbe en ses différentes intersections q, q', q''.... avec cet axe, se trouvent confondus avec la direction même de ce dernier; toutes circonstances qui

ne peuvent avoir lieu d'après la généralité de nos hypothèses sur la situation respective de la courbe et des axes dont il sagit.

Concluons donc, en second lieu, que la droite des points y, ne pouvant généralement rencontrer l'axe qq' en des points situés à une distance donnée, il faut bien que cette droite lui soit parallèle, ou que ay, ainsi que le rapport k, du produit des appliquées ap, $ap,'$ ap'' .... à celui des abscisses correspondantes aq, aq', aq'', demeurent invariables pour toutes positions possibles de ces appliquées et, par suite aussi, pour toutes celles que peut prendre l'axe des abscisses en se transportant, parallèlement à lui même dans le plan de la courbe, ce qui constitue proprement le théorème de *Newton* qu'il s'agissait de démontrer.

Nous n'insisterons pas sur ce qui arrive dans les cas particuliers où l'axe des abscisses est pris tangentiellement à l'une des branches de la courbe, c'est-à-dire parallèlement à l'une de ses asymptotes, parceque la loi de continuité indique clairement alors comment on doit entendre le théorème ci-dessus, et que les circonstances sont absolument les mêmes que celles qui se présentent dans le cas bien connu des lignes du second ordre. D'ailleurs ces détails, sur lesquels nous aurons occasion de revenir, ne seraient point à leur place dans cette introduction, où nous avons seulement prétendu prouver que le théorème, qui doit servir de base principale à nos recherches, peut être établi à *priori*, en se fondant uniquement sur le principe de continuité combiné avec les données d'une géométrie générale dont j'ai exposé les premiers élémens dans le *traité des propriétés projectives des figures.*

Après avoir donné, dans ce qui précède, un aperçu, en quelque sorte historique, de mes recherches sur les propriétés projectives des courbes géométriques et des vues qui m'ont principalement guidé en m'y livrant, de loin en loin, depuis 1816, il me reste à dire un mot du plan que j'ai adopté dans cette présente rédaction, qui, bien loin d'offrir un traité suivi et méthodique sur la matière, comme j'ai déjà dit en avoir eu primitivement l'intention, n'est qu'une esquisse fort imparfaite, peu correcte même, je l'avoue, des principaux résultats aux quels je suis depuis longtems parvenu, et que le peu de loisirs dont je puis actuellement disposer, ne me permet pas de perfectionner davantage ni de mettre dans l'ordre rigoureux que je leur eusse souhaité.

Prenant donc pour définition, propre à caractériser à la fois toutes les lignes et surfaces géométriques, la relation qui subsiste entre les différens segmens formés sur les côtés d'un triangle arbitraire par les intersections de ces lignes et surfaces, et voulant donner, tout d'abord, une idée de l'extension que peuvent recevoir les principes de la doctrine des transversales, j'ai débuté, dans un premier paragraphe, par appliquer ces principes aux lignes du second ordre, considérées d'une manière individuelle ou dans leur combinaison, et qui ont tant et depuis si longtems occupé la sagacité des géomètres, qu'il semble que, dorénavant, il n'y ait absolument plus rien de vraiment neuf et d'intéressant à en dire. La facilité surprenante avec laquelle on arrive ainsi aux propriétés projectives les plus générales et les plus belles de ces lignes, me semble bien propre d'ailleurs à éveiller l'attention du lecteur et à l'initier dans l'esprit de la méthode.

Passant de là à ce qui concerne les lignes du troisième ordre, j'ai fait voir comment la théorie des transversales peut sur le champ conduire à la découverte de leurs principales propriétés projectives déjà mentionnées dans la partie historique de cette introduction, comme étant les corollaires de théorèmes plus généraux concernant les lignes d'un ordre quelconque. Quelques unes de ces propriétés, relatives aux points d'inflexion et aux quadrilatères complets inscrits, ont été longuement et péniblement démontrées dans le *traité des courbes géométriques de Maclaurin*, qui, ainsi que je l'ai déjà également fait observer précédemment, a envisagé les propriétés des courbes du troisième degré d'une manière tout à fait spéciale.

Lors de mes premières recherches sur cette matière, j'avais eu l'intention de donner une certaine étendue à l'article qui concerne la théorie des lignes du troisième ordre, à cause de la singulière analogie qu'offrent leurs propriétés avec celles des sections coniques ordinaires: je me proposais, par exemple, de les construire par points sous différentes données, de construire leurs systèmes d'intersections ou leurs systèmes de tangentes relatives à des droites ou à des points de position assignée, de rechercher tous leurs points singuliers ainsi que les propriétés dont jouissent ces points par rapport aux points ordinaires de la courbe etc. Mais, comme ces différentes questions se reproduisent également pour les lignes de tous les degrés et donnent lieu aux mêmes solutions générales, je me suis ici

borné à quelques propositions spéciales, propres à servir d'exemple de la fécondité des principes et de la fertilité de leurs applications. Ce que j'ai dit d'ailleurs, de ce même article, concernant les intersections et les contacts divers des lignes du troisième ordre et des sections coniques, doit être considéré uniquement comme une sorte d'introduction à ce que je me propose de donner dans la seconde partie de ces recherches touchant les osculatrices des lignes d'ordre supérieur.

Laissant là bientôt ces préliminaires, je passe, dans un second paragraphe, à ce qui concerne les courbes planes géométriques, d'un ordre quelconque, considérées d'une manière individuelle et par rapport aux systèmes de transversales rectilignes qui peuvent les couper. Je fais voir comment on doit entendre ou appliquer, dans ce cas simple, l'équation ou la relation fondamentale qui définit à la fois toutes ces lignes; je m'occupe ensuite des différentes transformations ou traductions, soit métriques, soit descriptives dont elle est susceptible dans certains cas, et notamment pour certaines situations particulières des transversales, où, sous sa forme primitive, elle devient *illusoire*, *identique* et cesse ainsi de demeurer applicable au système. Ces circonstances se présentent, entre autres, quand une ou plusieurs des intersections propres des transversales se trouvent situées sur la courbe ou se confondent entre elles, et elles donnent ainsi lieu à de nouveaux théorèmes sur les lignes ou surfaces géométriques, comme elles fournissent des méthodes variées et simples pour le tracé de leurs tangentes et plans tangens, dans les différens cas. On verra que les transformations dont il s'agit reposent principalement sur le mode d'élimination général par lequel on peut débarasser l'équation primitive ou ses dérivées, de certains segmens qui y entrent et qui les rendent illusoires dans les cas précités.

Du reste, à l'exception de ce qui concerne la relation que nous avons nommée *involution simple* de certains systèmes de points en ligne droite, relation qu'on doit considérer comme fondamentale, nous avons fort peu insisté sur les propositions ou corollaires particuliers qui peuvent découler de nos principes, dont l'exposition méthodique est d'ailleurs le but essentiel de la première partie de ce mémoire: c'est ainsi, par exemple, que nous ne fesons qu'indiquer, chemin fesant, les nombreux corollaires relatifs aux points singuliers ou multiples des courbes, aux polygones qui leur sont inscrits ou circonscrits, à leurs systèmes d'asymptotes etc.

Ayant montré, dans ce qui précède, comment on peut rendre la relation fondamentale applicable à tous les états de la figure, à toutes les situations possibles des transversales, nous nous occupons, dans un nouveau paragraphe, de la détermination ou du tracé même des lignes géométriques par leurs systèmes d'intersections avec des transversales données, en nous fondant uniquement sur les propriétés qui dérivent de l'équation de définition de ces lignes. Cette discussion nous conduit à plusieurs résultats curieux, et notamment à celui-ci: „Lors qu'une ligne géo„métrique plane, d'un degré quelconque, est donné par un nombre suf„fisant de ses systèmes d'intersections avec des droites ou transversales „arbitraires, on peut, non seulement décrire la courbe tout entière par „points, mais, de plus, trouver directement ses intersections avec une au„tre transversale donnée, le tout par des méthodes purement *linéaires*, „ou qui n'exigent, en dernière analyse, que la construction de simples „lignes droites; par quoi on doit entendre d'ailleurs que toutes les cour„bes auxiliaires qui servent à la solution du problème, sont elles mêmes „constructibles par de simples intersections de lignes droites."

Ce paragraphe, qui était indispensable pour justifier l'adoption de notre équation fondamentale comme définition caractéristique et suffisante des courbes et surfaces géométriques, contient d'ailleurs le germe de toutes les recherches, sur la communauté d'intersection des lieux, qui seront mentionnées plus loin, et spécialement sur la détermination des lignes et surfaces qui sont assujetties à des conditions données.

Après nous être ainsi étendu sur ce qui concerne les systèmes d'intersections des lignes géométriques avec des droites arbitraires, il était naturel de s'occuper des questions inverses relatives à leurs systèmes de tangentes issues de points donnés; questions qui dérivent immédiatement de nos principes sur la *théorie des polaires réciproques*, attendu que toutes les relations métriques et descriptives précédemment examinées, sont, de leur nature, *projectives* ou telles qu'elles substistent à la fois dans toutes les projections coniques de la figure; conformément à ce qui est réclamé par les considérations des N°s 120. et suiv. du *Mémoire* qui contient cette théorie. Mais, comme l'exposition des principes de cette même théorie, a suscité quelques doutes dans l'esprit de certaines personnes, notamment en ce qui concerne le degré des courbes polaires réciproques de courbes planes données; comme d'ailleurs nous n'avons fait que glisser

sur cette importante et difficile matière, dans les N°s 66. et suiv. du Mémoire en question, et que, dans la crainte d'anticiper par trop sur le sujet de nos recherches relatives aux propriétés des courbes et surfaces, nous y avons même négligé de démontrer, à *priori* et par les méthodes géométriques qui nous sont propres, quelques-uns des théorèmes dont nous sommes partis, tels que celui sur le nombre et le degré des intersections des courbes et surfaces, celui sur le nombre et l'espèce de leurs tangentes ou plans tangens passant par les mêmes points ou les mêmes droites; ces différens motifs nous ont engagé à revenir sur ces questions fondamentales, qui demandent encore à être éclaircies et approfondies malgré qu'elles aient fait, dans ces derniers tems, l'objet des méditations d'habiles géomètres analystes.

En effet, la solution de ces questions dépend, comme on peut le voir à l'endroit déjà cité, du perfectionnement d'une autre théorie, celle des points *singuliers* des courbes, qui n'est point encore complètement faite malgré les savantes recherches de nos premiers géomètres *), et elle tient aussi aux difficultés les plus ardues de la science de l'élimination. Mais, quoi que les considérations d'une géométrie purement intuitive, appuyée de notions qui dérivent de l'admission du principe de continuité, nous aient permis d'entrer plus avant dans le fond de la question, nous ne saurions nous flatter cependant d'en avoir éclairci entièrement les difficultés et d'avoir dissipé tous les nuages dont elle demeure encore enveloppée.

A l'occasion de ces discussions, nous présentons les élémens d'un nouveau mode de transformation des figures qui diffère essentiellement, du moins en apparence, de celui qui ressort de la théorie des pôles et polaires des lignes du second degré, mais qui, malheureusement, fait retomber sur les mêmes résultats relativement aux questions de réciprocité, et n'offre d'autre avantage que celui d'une facilité plus grande dans les moyens de construire la transformée ou dérivée d'une figure donnée.

Tel est l'exposé succinct des matières contenues dans cette première partie de nos recherches, dont la seconde a spécialement pour objet

---

*) Voyez le *traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Mr. *Lacroix*, tom. III., et *la théorie des points singuliers* donnée par Mr. *Poisson*, dans le 14e cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique*.

l'exposition des principales conséquences relatives aux propriétés projectives des systèmes de lignes et de surfaces géométriques.

Cette seconde partie, dont nous renvoyons la publication à un prochain *Numero* de *ce journal*, n'offre, pour ainsi dire, que le développement et les applications des principes exposés, dans la première, sur l'analyse des transversales: elle se subdivise également en plusieurs §§., dont nous nous contenterons d'exposer sommairement le contenu, déjà mentionné au commencement de cette introduction.

1°. Des systèmes de lignes et de surfaces géométriques, du même degré qui ont les mêmes intersections communes, ou que touchent les mêmes plans, les mêmes surfaces développables enveloppes; tracé effectif de l'une d'entre elles, au moyen de toutes les autres, par des *constructions purement linéaires* ou qui se rapportent uniquement à la *géométrie de la règle;* de l'involution complète des systèmes de points, de lignes et de surfaces; des lieux géométriques; problème de *Pappus* résolu pour la première fois par *Descartes;* combinaison des lieux et de leur décomposition en lieux plus simples.

2°. Application de l'analyse des transversales à la théorie et à la recherche des osculatrices du 2e degré et des divers ordres, en des points déterminés des lignes et surfaces géométriques; tracé de ces osculatrices par points ou par l'enveloppement des tangentes, à l'aide de constructions purement linéaires etc.

3°. Principales conséquences relatives aux centres, aux axes et aux plans de moyennes distances ou de moyennes harmoniques des lignes et surfaces géométriques individuelles, ou des systèmes de lignes et de surfaces géométriques assujetties à des conditions données; solution nouvelle du problème relatif aux faisceaux convergens de tangentes, tracé et propriétés des polaires successives etc.

Dans cette seconde partie, destinée seulement à l'indication rapide des principaux résultats de nos propres recherches et de celles des autres sur les courbes et surfaces de tous les degrés, nous avons négligé une infinité de corollaires, neufs ou piquans, qui eussent ralenti notre marche, sans rien ajouter d'essentiel aux considérations théoriques qui peuvent servir à faire saisir l'esprit général de nos méthodes, et à en démontrer l'utilité et la fécondité.

En insistant principalement sur les applications de la théorie des transversales, nous avons voulu prouver que cette théorie, envisagée comme nous le fesons, constitue aussi un corps de doctrine à part, une sorte *d'analyse géométrique* très digne de fixer l'attention des savans et surtout des auteurs d'élémens, par la simplicité et la facilité de l'algorithme, la généralité et l'étendue des conséquences, la fertilité et la variété des ressources qu'elle offre dans la solution des questions les plus relevées. Si on prend d'ailleurs la peine de comparer le contenu des présens mémoires avec les belles et récentes découvertes, sur les propriétés des courbes et surfaces de tous les degrés, qui ont été exposées par MM. *Gergonne*, *Bobillier*, *Chasles*, *Plücker* etc. dans les *annales de mathématiques*, *la correspondance de Bruxelles* et le *Journal* de Mr. *Crelle* (années 1827 à 1830), on se convaincra, j'espère, que, malgré le retard involontaire qu'a éprouvé la publication de nos propres recherches sur cette matière, et qui sont antérieures de plusieurs années, elles n'ont point encore perdu, sous tous les rapports, l'intérêt et le mérite de la nouveauté.

Au surplus, en exposant les principaux théorèmes sur les intersections des lignes et des surfaces géométriques, nous ne nous sommes point astreints à en opérer à chaque pas, comme l'ont fait quelques-uns de ces géomètres, la traduction en d'autres théorèmes relatifs aux tangences de ces lignes et surfaces, ce qui est toujours facile au moyen des principes généraux de la *théorie des polaires réciproques.* Nous nous sommes contentés d'en montrer, de loin en loin, des exemples, en insistant plus particulièrement sur ceux qui pouvaient offrir le plus d'intérêt par l'étendue des conséquences ou par les moyens d'y parvenir.

A ce même sujet, nous devons ici reproduire une observation importante par sa généralité; c'est qu'en partant directement des théorèmes, sur les tangentes ou plans tangens des lignes et surfaces géométriques, qui sont les corrélatifs ou réciproques de ceux de *Carnot*, sur les intersections des transversales arbitraires, et dont les énoncés se trouvent rapportés à la fin du *Mémoire sur la théorie des polaires réciproques* (N°s 128. et suiv., 141. et 142.), en partant, dis-je, de ces théorèmes inverses, on peut, par une analyse analogue à celle qui fait l'objet de ce travail, arriver, sur le champ et sans pétition nouvelle de principe, à toutes les conséquences ou propositions réciproques dont il vient d'être parlé; ce qui donnerait lieu à un autre moyen de découvertes géométriques, à

un autre corps de doctrine analogue à celui qui constitue l'analyse même des transversales. En laissant donc de côté, fort souvent, tout ce qui concerne cette réciprocité, nous éviterons d'entasser inutilement des théorèmes dont l'exposition, ne coûtant pour ainsi dire que la peine d'en transcrire les énoncés, serait d'un bien faible intérêt pour les lecteurs, qui estiment principalement, dans les spéculations mathématiques, l'utilité des applications ou la nouveauté et la fertilité des routes qu'elles peuvent ouvrir à l'esprit dans la recherche de la vérité.

Nota. Nous continuerons, dans ce travail, la série des N^os^ d'articles où elle en est restée dans notre précédent mémoire sur la *théorie générale des polaires réciproques* *); par là nous éviterons des répétitions de titres qui, par leur trop grande fréquence, dans certains cas, ne manqueraient pas de devenir fastidieuses.

(La suite dans le cahier prochain.)

*) Voyez tom. IV. cahier 1. du présent journal.

4.

Über die Summirung gewisser Kettenbrüche.

(Von Herrn Dr. Stern zu Göttingen.)

In Euler's *Opusc. anal.* (*T.* 1. *p.* 85.) findet man einen Aufsatz über die Summirung der Kettenbrüche, die in der Form $m+\cfrac{n}{m+1+\cfrac{n+1}{m+2+}}$ etc. enthalten sind. Euler gelangt dort durch sehr verwickelte Kunstgriffe zum Zweck; später hat sich auch Trembley mit diesen Kettenbrüchen beschäftigt (s. *Mém. de l'acad. de Berlin* 1794). Einen einzelnen Fall hat Euler an einem andern Orte behandelt (*Mém. de l'acad. de Petersb. T.* 4. *pag.* 52.), jedoch vermifst man dort den Beweis der wichtigsten Sätze. Ich habe im Folgenden gesucht, die dritte dort angewandte Methode genauer zu begründen, und dadurch zugleich eine einfachere Behandlung der allgemeineren Form zu gewinnen.

1) Es sei $m+\cfrac{n}{m+1+\cfrac{n+1}{m+2+}}$ etc. $=(A)=f(m,n)$, und n eine ganze positive Zahl; ferner $m-1+\cfrac{n-1}{(A)}=\alpha$, $m-2+\cfrac{n-2}{\alpha}=\alpha_1$, und allgemein $a_r=m-(r+1)+\cfrac{n-(r+1)}{\alpha_{r-1}}$, also

$$f(m,n)=\cfrac{n-1}{-m+1+\alpha},\quad \alpha=\cfrac{n-2}{-m+2+\alpha_1},\quad \ldots\ldots\quad \alpha_{r-1}=\cfrac{n-(r+1)}{-m+r+1+\alpha_r},$$

folglich $f(m,n)=\cfrac{n-1}{-m+1+\cfrac{n-2}{-m+2+}}$ etc. $=(B)$.

Man setze $n=r+1$, so ist

$$\alpha_{r-2}=\cfrac{1}{-m+n-1},\quad \alpha_{r-3}=\cfrac{2}{-m+n-2+\cfrac{1}{-m+n-1}}=\cfrac{2(-m+n-1)}{(-m+n-2)(-m+n-1)+1},$$

$$\alpha_{r-4}=\cfrac{3[(-m+n-2)(-m+n-1)+1]}{(-m+n-3).[(-m+n-2)(-m+n-1)+1]+2(-m+n-1)}$$ u. s. w.

Aus der Bildung dieser Werthe erhellt sogleich, dafs der Zähler des l^{ten} Gliedes aus der Reihe α_{r-2}, α_{r-3}, α_{r-4} u. s. w. das $l$fache des Nenners des vorhergehenden ist. Denkt man sich ferner eine Reihe, deren erstes

Glied $=1$ ist, während die folgenden Glieder den Nennern der Werthe von α_{r-2}, α_{r-3}, u. s. w. gleich sind, so wird man das $l+1^{\text{te}}$ Glied dieser Reihe erhalten, wenn man das l^{te} mit $n-m-l$, das $l-1^{\text{te}}$ mit $l-1$ multiplicirt, und die Producte addirt. Diese Reihe soll im Folgenden durch (D) dargestellt werden.

1) Entwickelt man die successiven Differenzreihen der Reihe (D), so ist das erste Glied der s^{ten} Differenzreihe $=(n-m-2)(n-m-3)\ldots\ldots(n-m-s-1)$.

Es seien überhaupt a, b, c, resp. das $m-1^{\text{te}}$, m^{te}, $m+1^{\text{te}}$ Glied einer Reihe, und man erhalte das m^{te} Glied ihrer ersten Differenzreihe, indem man das m^{te} Glied der ursprünglichen Reihe mit $n-p-m$, das $m-1^{\text{te}}$ Glied derselben mit $m-1$ multiplicirt, und die Producte addirt: so erhält man das m^{te} Glied der zweiten Differenzreihe, indem man das m^{te} Glied der ersten Differenzreihe mit $n-p-m-1$, das $m-1^{\text{te}}$ derselben mit $m-1$ multiplicirt, und die Producte addirt. Das $m-1^{\text{te}}$, m^{te}, $m+1^{\text{te}}$ Glied der ersten Differenzreihe ist resp. $=b-a$, $(n-p-m)b+(m-1)a$, $(n-p-(m+1))c+mb$, folglich ist das m^{te} Glied der zweiten Differenzreihe $=(n-p-m-1)c-(n-p-2m)b-(m-1)a=(n-p-m-1)(c-b)+(m-1)(b-a)$; es ist aber $c-b$ das m^{te}, $b-a$ das $m-1^{\text{te}}$ Glied der ersten Differenzreihe. Hieraus folgt unmittelbar, dafs man das m^{te} Glied der l^{ten} Differenzreihe erhält, wenn man das m^{te} Glied der $l-1^{\text{ten}}$ Differenzreihe mit $n-p-m-(l-1)$, das $m-1^{\text{te}}$ Glied derselben mit $m-1$ multiplicirt, und die Producte addirt. Das r^{te} Glied der ersten Differenzreihe der Reihe (D) erhält man, wenn man ihr r^{tes} Glied mit $(n-m-r-1)$, ihr $r-1^{\text{tes}}$ Glied mit $r-1$ multiplicirt, und die Producte addirt; folglich findet man das r^{te} Glied ihrer l^{ten} Differenzreihe, wenn man das r^{te} Glied der $l-1^{\text{ten}}$ Differenzreihe mit $n-m-r-l$, und deren $l-1^{\text{tes}}$ Glied mit $r-1$ multiplicirt, und die Producte addirt. Sind daher die zwei ersten Glieder der $l-1^{\text{ten}}$ Differenzreihe resp. $=A(n-m-l)$, $A(n-m-l)^2$, so sind die zwei ersten Glieder der l^{ten} Differenzreihe resp. $=A(n-m-l)(n-m-(l+1))$, $A(n-m-l)^2(n-m-l-2)+A(n-m-l)=A(n-m-l)[n-m-(l+1)]^2$, und das erste Glied der $l+1^{\text{ten}}$ Differenzreihe $=A(n-m-l)(n-m-(l+1))\times(n-m-(l+2))$. Nun sind die drei ersten Glieder der Reihe (D) resp. $=1$, $n-m-1$, $(n-m-2)(n-m-1)+1$; folglich die zwei ersten Glieder der ersten Differenzreihe resp. $=n-m-2$, $(n-m-2)^2$, die zwei ersten Glieder der zweiten Differenzreihe resp. $=(n-m-2).(n-m-3)$,

$(n-m-2)(n-m-3)^2$, und überhaupt das erste Glied der s^{ten} Differenzreihe $=(n-m-2)\ldots.(n-m-s-1)$.

3) Die Reihe (D) hat also immer eine endliche Menge von Differenzreihen, wenn m negativ ist; ist aber m positiv, so mufs $n \gtreqless m+2$ sein, denn ist $n<m+2$, so bricht der Ausdruck (B) nicht da ab, wo der Zähler $=0$ wird, sondern es mufs der dazu gehörende vollständige Nenner auch $=0$ sein; dies zeigt, dafs alsdann $f(m,n)$ keine rationale Gröfse, aber (wegen (A)) zwischen den Grenzen m und $m+\frac{n}{m+1}$ eingeschlossen ist.

Wir setzen hier zuerst den letzten Fall bei Seite. Nennt man unter dieser Voraussetzung u_x das x^{te} Glied nach dem Anfangsgliede, so hat man nach den bekannten Formeln:

$$u_x = 1 + {}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}.x + {}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}.x.x-1 + \text{etc.},$$
$$u_{x-1} = 1 + {}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}.x\text{-}1 + {}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}.x\text{-}1.x\text{-}2 + \text{etc.},$$

wenn überhaupt ${}^{s}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ den Coëfficienten des r^{ten} Gliedes in der s^{ten} Potenz eines Binomiums bedeutet.

Der Zähler des x^{ten} Gliedes aus der Reihe α_{r-2}, α_{r-3} u. s. w. ist also $=x.u_{x-1}$, der Nenner $=u_x$. Nun ist $f(m,n)$ das $n-1^{\text{te}}$ Glied aus dieser Reihe, folglich

$$(C)\quad f(m,n) = \frac{(n-1)\,[1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-2)+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-2)(n-3)\,\text{etc.}]}{1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)\,\text{etc.}}.$$

4) Setzt man $m+\cfrac{n+1}{m+1+\cfrac{n+2}{m+2\,\text{etc.}}} = f(m,n+1)$, so kann man zwar den Werth dieses Ausdrucks aus (C) finden, aber man kann ihn auch unmittelbar aus dem Werthe von $f(m,n)$ ableiten. Setzt man nemlich $f(m,n+1)=\frac{P}{Q}$, $f(m,n)=\frac{p}{q}$, so hat man

$$p = n-1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)(n-3)\,\text{etc.}$$
$$q = 1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}.n-1+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}.n-1.n-2+{}^{n-m-2}\overset{3}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)(n-3)\,\text{etc.}$$

Addirt man die unter einander stehenden Glieder, und bedenkt zugleich, dafs ${}^{s}\overset{r}{\mathfrak{B}}+{}^{s}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} = {}^{s+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}$ ist, so hat man

$$p+q = 1+{}^{n-m-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)+{}^{n-m-1}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)+\text{etc.} = \frac{P}{n}.$$

Ferner ist $(n-m)q=[1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)+\text{etc.}](n-m)$.

oder

$$(n-m)q = \begin{cases} 1 + {}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{1} + 2.{}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{2}(n-1) + 3.{}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{3}(n-1)(n-2) + \text{etc.} \\ + {}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{1}(n-1) + {}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-1)(n-2) + {}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{3}(n-1)(n-2)(n-3) + \text{etc.}, \end{cases}$$

$$p = n-1 + {}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{1}(n-1)(n-2) + {}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-1)(n-2)(n-3) + \text{etc.}$$

Addirt man die unter einander stehenden Glieder, und bedenkt, dafs

$$n-m-1+\frac{(n-m-(l+1))}{l}(n-l)+n-l = \frac{(n-m-1)n}{l},$$

so findet man $(n-m)q+p = 1+{}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{1}.n+{}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{2}.n.(n-1)+\ldots = Q$, also

$$(C') \quad f(m, n+1) = \frac{n(f(m,n)+1)}{f(m,n)+n-m}.$$

Man kann auch aus $f(m,n) = \frac{p}{q}$ den Werth von $f(m-1,n) = \frac{p'}{q'}$ ableiten; es ist nemlich

$$m.p = (n-1)[m+m.{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{1}(n-2)+m.{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-2)(n-3)\ \text{etc.}],$$

$$(n-1)q = (n-1)[1+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{1}(n-1)+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-1)(n-2)\ \text{etc.}].$$

Die Summe der zwei in Klammern eingeschlossenen Ausdrücke ist $= 1+{}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{1}(n-2)+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-2)(n-3)$ etc., wovon man sich leicht überzeugt, wenn man immer das s^{te} Glied des ersten Ausdrucks zu dem $s+1^{\text{ten}}$ Gliede des zweiten addirt, und zugleich bemerkt, dafs

$$l.m+(n-m-(l+1))(n-1) = (n-m-1)(n-(l+1))$$

ist. Also hat man

$$p' = mp+(n-1)q.$$

Ferner ist $q' = p+q$, folglich

$$(C'') \quad f(n, m-1) = \frac{m(f(n,m))+n-1}{f(n,m)+1}.$$

Verbindet man die Formeln (C') und (C''), so ergiebt sich

$$f(n+1, m-1) = \frac{mn(f(n,m)+1)+n(f(n,m)+n-m)}{n(f(n,m)+1)+f(n,m)+n-m}.$$

Aus der Formel (C) kann man auch die beiden Ausdrücke mit Leichtigkeit ableiten, die **Trembley** (a. a. O. S. 110. und 114.) gegeben hat. Setzt man nemlich in derselben $-m$ statt m, und $n=2$, so hat man $-m+\cfrac{2}{1-m+\cfrac{3}{2-m\ \text{etc.}}} = \frac{1}{1+m}$ oder $\cfrac{1}{-m+\cfrac{2}{1-m\ \text{etc.}}} = 1+m$. Dies ist der erste Ausdruck **Trembley's**, und zwar ist er (nach 3.) allgemein gültig, weil nach **Trembley's** Annahme m eine positive Zahl sein soll; unter der Voraussetzung, dafs m eine negative Zahl ist, folgt auch aus unse-

rer Formel:

$$m+\cfrac{2}{m+1+\cfrac{3}{m+2\text{ etc.}}}=\frac{1}{1-m};\quad\text{und}\quad m+1+\cfrac{2}{m+2+\cfrac{3}{m+3\text{ etc.}}}=\frac{1}{-m};$$

daher

$$\cfrac{m}{1+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+1+\cfrac{2}{m+2\text{ etc.}}}}}=\frac{m}{1+\frac{1}{m-m}}=0,\quad\cfrac{1}{m+\cfrac{2}{m+1\text{ etc.}}}=1-m,$$

woraus man eine, der Trembley'schen ähnliche Formel erhält.

5) Es sei

$$\cfrac{n-s}{-s+\cfrac{n-s+1}{-s+1+\cfrac{n-s+2}{-s+2+\text{etc.}}}}=P,\quad\frac{n-(s+1)}{-(s+1)+P}=\alpha,\quad\frac{n-(s+2)}{-(s+2)+\alpha}=\alpha_1,\text{ u. s. w.}$$

so hat man

$$P=s+1+\cfrac{n-(s+1)}{s+2+\cfrac{n-(s+2)}{s+3+\text{etc.}}}$$

Setzt man für s den Werth $m+1$, so hat man

$$\cfrac{n-m-1}{-m-1+\cfrac{n-m}{-m+\text{etc.}}}\ (1)\quad=m+2+\cfrac{n-m-2}{m+3+\cfrac{n-m-3}{m+4+\text{etc.}}}\ (2)\quad=\frac{M}{N}.$$

Es ist aber alsdann $\frac{M}{N}=f(m,n)+1$. Setzt man nemlich $n-m=p$, so bricht der Kettenbruch (2) immer ab, wenn man an den Zähler $n-m-p$ kommt, und geht daher in folgenden über

$$m+2+\cfrac{n-m-2}{n-p+3+\ddots+\cfrac{3}{n-2+\cfrac{2}{n-1+\cfrac{1}{n}}}}=\frac{M}{N}.$$

Durch ein ähnliches Verfahren wie das in (2) angewandte, findet man, dafs M das $n-m-1^{\text{te}}$, N das $n-m-2^{\text{te}}$ Glied einer Reihe ist, deren x^{tes} Glied =

$$1+{}^{n-1}\mathfrak{B}^{1}.x+{}^{n-1}\mathfrak{B}^{2}.x.(x-1)+\ldots.,$$

also

$$N=1+{}^{n-1}\mathfrak{B}^{1}(n-m-2)+{}^{n-1}\mathfrak{B}^{2}(n-m-2)(n-m-3)\text{ etc.},$$

$$M=1+{}^{n-1}\mathfrak{B}^{1}(n-m-1)+{}^{n-1}\mathfrak{B}^{2}(n-m-2)(n-m-3)\text{ etc.}$$

Man bemerkt sogleich, dafs N dasselbe ist, was in 4) q genannt wurde; zieht man ferner in den Werthen von N und M die unter einander stehenden Glieder von einander ab, so findet man $N-M=-p$, also

$$\frac{M}{N}=\frac{p}{q}+1.$$

Man hat also auf diese Weise zwei neue Werthe für $f(n,m)$, nemlich

$$f(n,m)=m+1+\cfrac{n-m-2}{m+3+\cfrac{n-m-3}{m+4\text{ etc.}}}=(A')=-1+\cfrac{n-m-1}{-m-1+\cfrac{n-m}{-m+\text{ etc.}}}=(B').$$

Die Identität der vier Kettenbrüche (A), (B), (A'), (B') hat Euler in den *Opusc. anal.* (a. a. O.) auf einem ganz anderen Wege gefunden.

6) Ist $n<m+2$, so erfährt man den Werth des Kettenbruchs am leichtesten, wenn man ihn nach den bekannten Regeln in eine Reihe verwandelt und den Werth dieser Reihe sucht.

Der einfachste Fall dieser Art ist der Kettenbruch $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3\text{ etc.}}}$ (α).

Nennt man die Basis der nat. Logarithmen e, so findet man, dafs dieser Bruch $=\frac{1}{e-2}$ ist. Er ist aber auch $=\cfrac{1}{2}$ *); es ist nemlich allgemein

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{3\text{ etc.}}}$$

$$\cfrac{a}{a+\cfrac{b}{b+\cfrac{c}{c\text{ etc.}}}}\ (\beta)=\cfrac{A}{A+\cfrac{A}{a+\cfrac{a}{b+\cfrac{b}{c\text{ etc.}}}}}\ (\gamma),$$

denn es ist

$$(\gamma)=\cfrac{\frac{a}{A}.A}{\frac{a}{A}.A+\cfrac{\frac{a}{A}.A}{a+\cfrac{a}{b\text{ etc.}}}}=\cfrac{a}{a+\cfrac{a}{a+\cfrac{a}{b\text{ etc.}}}}=\cfrac{a}{a+\cfrac{\frac{b}{a}.a}{\frac{b}{a}.a+\cfrac{\frac{b}{a}.a}{b\text{ etc.}}}}=\cfrac{a}{a+\cfrac{b}{b+\cfrac{b}{b\text{ etc.}}}}.$$

---

*) Dieser Bruch ist auch $=1+\cfrac{3}{6+\cfrac{8}{4+\cfrac{5}{5+\cfrac{6}{6\text{ etc.}}}}}$, denn hat man den Bruch $\cfrac{1}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f}}}$ (1)

und setzt $d+\frac{e}{f}=x$, so ist (1) $=\frac{bx+c}{ax}=\frac{b}{a}+\frac{c}{ax}$; ich bemerke dies ausdrücklich, um auf einen Irrthum aufmerksam zu machen, den Schulze (Entwickel. einig. der wicht. math. Theor. S. 131. u. 135.) wiederholt begangen hat.

Fährt man auf diese Weise fort, so sieht man leicht, wie (γ) in (β) übergeht; folglich hat man auch $\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3\,\text{etc.}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+}\,\text{etc.}}}$.

7) Euler hat in den *Mém. de l'Acad. d. P.* (a. a. O.) noch eine Methode angegeben, die zwar weniger brauchbar ist, als die oben zum Grund gelegte, die ich aber doch kurz berühren will, weil Euler einen Hauptpunct übersehen zu haben scheint.

Man setze den Kettenbruch

$$m+\cfrac{n}{m+1\,\text{etc.}} = S = m+\frac{n}{A},\quad A = m+1+\frac{n+1}{B},\quad B = m+2+\frac{n+2}{C}\ \text{etc.},$$

also $A = \dfrac{n}{S-m}$, $B = \dfrac{n+1}{A-(m+1)} = \dfrac{(n+1)(S-m)}{n-(m+1)(S-m)}$ u. s. w. Die Nenner der Werthe S, A, B etc. bilden eine arithmetische Reihe, 1, $S-m$, $n-(m+1)(S-m)$ etc., deren $l+1^{\text{tes}}$ Glied man erhält, wenn man das l^{te} mit $-(m+l-1)$, das $l-1^{\text{te}}$ mit $n+l-2$ multiplicirt, und die Producte addirt; es läfst sich alsdann leicht beweisen, dafs man das s^{te} Glied der $n-m-1^{\text{ten}}$ Differenzreihe erhält, wenn man das $s-1^{\text{te}}$ Glied mit $-(n+s-2)$ multiplicirt; ist daher $n>m+1$, also S (nach 3.) rational, so wird jedes Glied der $n-m-1^{\text{ten}}$ Differenzreihe $=0$, wenn man das erste $=0$ setzt, und jedes Glied giebt alsdann den Werth von S; Euler hat nicht bemerkt, dafs immer die $n-m-1^{\text{te}}$ Differenzreihe diese Eigenschaft hat.

8) Ich erlaube mir, hier noch einige Worte über eine Bemerkung Euler's zu sagen, die, wie ich glaube, irrig ist. Euler findet in den *Comm. Acad. Petr.* (*T.* IX. *pag.* 123.), dafs die zwei Kettenbrüche

$$a+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n}\,\text{etc.}}}}}}}} = S,\quad \text{und}\quad \frac{1}{mn+1}\left((mn+1)a+n+\cfrac{1}{(mn+1)b+m+n+\cfrac{1}{(mn+1)c+m+n+}\,\text{etc.}\right)$$

identisch sind; es ist dort kein allgemeiner Beweis gegeben, der sich indessen leicht führen läfst. Setzt man nemlich

$$b+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+}\,\text{etc.}} = x,\quad c+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+}\,\text{etc.}} = y\ \text{u. s. w.},$$

so ist

$$S = a + \frac{nx+1}{(mn+1)x+m} = \frac{1}{mn+1}\left((mn+1)a + \frac{nx+1}{x+\frac{m}{mn+1}}\right).$$

Setzt man $\frac{nx+1}{x+\frac{m}{mn+1}} = n + \frac{1}{z}$, so findet man $z = (mn+1)x + m$, also

$S = \frac{1}{mn+1}\left((mn+1)a + n + \frac{1}{m+(mn+1)x}\right)$. Auch findet man auf dieselbe Weise

$$x = \frac{1}{mn+1}\left((mn+1)b + n + \frac{1}{m+(mn+1)y}\right),$$

also

$$S = \frac{1}{mn+1}\left((mn+1)a + n + \frac{1}{m+(mn+1)b+\frac{1}{m+(mn+1)y}}\right).$$

Nun kann man ebenso den Werth von y entwickeln u. s. w.

Hierauf fährt er fort (pag. 128): „quemadmodum hic fractiones continuas, quarum denominatores ita interrupto ordine progrediuntur, ut inter binos quosque contiguos duae interpositae sint quantitates constantes, consideravimus, ita eadem reductio extendi potest ad quatuor vel sex etc. quantitates constantes interpolatas. Numerus autem impar quantitatum constantium interpolari nequit." Die oben angewandte Reductionsmethode ist aber wirklich auch auf eine unpaare Anzahl constanter Gröfsen anwendbar. Es sei z. B.

$$S = a + \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{c\ \text{etc.}}}}}, \quad b + \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{m\ \text{etc.}}}} = x, \quad c + \frac{1}{m\ \text{etc.}} = y,$$

so findet man

$$S = \frac{1}{m}\left(am + 1 - \frac{1}{1+mx}\right);$$

ebenso

$$x = \frac{1}{m}\left(bm + 1 - \frac{1}{1+my}\right), \quad y = \frac{1}{m}\left(cm + 1 - \frac{1}{1+\text{etc.}}\right);$$

also

$$S = \frac{1}{m}\left(am + 1 - \cfrac{1}{1+bm+1-\cfrac{1}{1+cm+1\,\text{etc.}}}\right),$$

Man kann den Bruch S auch auf folgende Weise verwandeln. Man setze

$$z = c + \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{m+\text{etc.}}}}, \qquad v = e + \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{f+\cfrac{1}{m\,\text{etc.}}}},$$

so hat man

$$S = a + \frac{(bm+1)z+b}{(mb+2)mz+mb+1} = \frac{1}{(mb+2)m}\left((mb+2)m.a + \frac{(bm+1)z+b}{z+\frac{mb+1}{(mb+2)m}}\right);$$

ferner sei

$$\frac{(bm+1)z+b}{z+\frac{mb+1}{(mb+2)m}} = bm+1+\frac{1}{k},$$

so findet man

$$k = -(mb+1) - m(mb+2)z$$

und

$$S = \frac{1}{(mb+2)m}\left((mb+2)m.a + bm+1 - \frac{1}{mb+1+\frac{mb+2}{md+2}\left((md+2)m.c+dm+1-\frac{1}{md+1+\text{etc.}}\right.}\right.$$

5.

Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie.

(Par Mr. *L. J. Magnus* à Berlin.)

M'occupant, il y a quelque temps, d'une exposition analytique de la théorie des polaires réciproques, je suis parvenu à des résultats que je vais publier en partie, dans l'espérance qu'ils ne manqueront pas tout-à-fait d'intérêt. Je ferai voir que l'on peut tirer de chaque théorème sur les lignes droites, ou bien sur les droites, et tout au plus deux coniques, qui se coupent, si le théorème est d'ailleurs de nature à être doublé par la théorie des polaires réciproques, deux autres théorèmes, dont chacun à son tour est de nature à être doublé par la théorie des polaires réciproques; de manière que le premier théorème sera la source de cinq autres, dont la vérité sera évidente sans qu'on ait besoin de la constater par une démonstration.

La lecture de l'excellent mémoire qui se trouve p. 268. du tome V. de ce Journal, où M. Plücker, un de nos géomètres les plus distingués, a fait voir la possibilité de tirer de certains théorèmes sur les lignes droites, des théorèmes nouveaux sur les courbes, m'avait fait d'abord balancer à publier le résultat de mes recherches. Mais je me suis déterminé à communiquer ce qu'on va lire, par la considération, que l'analyse dont je fais usage, diffère de celle de M. Plücker; et que, pour appliquer la méthode actuelle, il n'importe en rien de savoir de quelle manière est démontré le théorème duquel on veut tirer un autre. D'ailleurs il fera peut-être plaisir au lecteur de voir découler d'une source commune les équations qui servent de base à la théorie des polaires réciproques, à la collinéation et à la méthode en question.

1.

Considérons deux plans P et Π, et supposons les points de l'un rapportés aux points de l'autre, de manière qu'à chaque point p du plan P correspond un point π du plan Π, et réciproquement. Deux cartes géographiques d'un même pays, construites suivant deux méthodes de projec-

tion, présentent un exemple d'un tel rapport entre les points de deux plans; car, à chaque point de l'une des deux cartes, correspond un point de l'autre.

J'y ajoute encore la restriction, qu'à un point p du plan P, il correspond seulement un point π du plan Π, et outre cela nul autre ni réel ni imaginaire; et de même, qu'à un point ϱ du plan Π, il correspond seulement un point r du plan P, et outre cela nul autre ni réel ni imaginaire.

Soient x, y les coordonnées rectangulaires ou obliques des points p, r, etc. du plan P, et soient t, u, les coordonnées semblables des points correspondants π, ϱ, etc. du plan Π; les valeurs de t et u deviendront déterminées si l'on donne à x et y des valeurs constantes, et réciproquement les valeurs de x et y deviendront déterminées si l'on donne à t et u des valeurs constantes. Il faut donc qu'il existe en général deux équations entre x, y, t et u; et comme à un point il ne doit répondre qu'un point unique, il faut que ces équations ne soient que du premier degré, et par rapport à x et y et par rapport à t et u. En effet si ces équations, ou seulement une d'elles, étoient d'un degré plus haut ou transcendantes, il correspondrait, à un point d'un plan, plusieurs points (réels ou imaginaires) de l'autre, ce qui est contre la supposition.

La forme générale de ces équations sera

1. $(ay + bx + c)u + (a'y + b'x + c')t + a''y + b''x + c'' = 0,$
2. $(\alpha y + \beta x + \gamma)u + (\alpha' y + \beta' x + \gamma')t + \alpha'' y + \beta'' x + \gamma'' = 0,$

où a, b, c, etc. sont des constantes arbitraires, qui peuvent être déterminées dans chaque cas particulier. Mettons dans ces équations pour x et y les valeurs constantes x' et y', et dénotons les valeurs de t et u, qu'on en tire, par t' et u'; il est évident, qu'en mettant dans les équations (1. 2.) pour t et u les valeurs t' et u', les valeurs de x et y, qui en résultent, seront égales à x' et y'. Il suit delà que si à un point p du plan P correspond un point π du plan Π, il correspondra réciproquement au point π du Plan Π le point p du plan P.

Désignons, pour abréger, les fonctions linéaires de x et y, qui entrent dans les équations (1. 2.), respectivement par A, A', A'', B, B' et B'', nous aurons

3. $Au + A't + A'' = 0,$ et 4. $Bu + B't + B'' = 0,$

d'où l'on tire

$$5. \quad u = \frac{A'B''-A''B'}{AB'-A'B}, \quad \text{et} \quad t = \frac{A''B-AB''}{AB'-A'B}.$$

A l'ensemble des points d'une droite du plan Π, dont l'équation soit

$$6. \quad u = gt + h,$$

correspondra une suite de points du plan P, qui, par leur continuité, formeront une ligne, dont l'équation peut être trouvée par la substitution des expressions (5.) au lieu de t et de u dans l'équation (6.). Donc on aura l'équation suivante

$$7. \quad (A'B''-A''B')-g(A''B-AB'')-h(AB'-A'B) = 0,$$

qui est du second degré, d'où l'on voit qu'à une droite (6.) du plan Π il correspond en général une conique (7.) du plan P.

Or, les expressions

$$8. \quad A''B-AB'', \qquad \text{et} \qquad 9. \quad AB'-A'B,$$

se réduiront à zéro, si l'on pose simultanément $A=0$ et $B=0$, ce qui ne peut avoir lieu que pour une seule couple de valeurs réelles de x et y, $A=0$ et $B=0$ étant du premier degré. Mais les expressions (8. 9.) étant toutes deux du second degré, seront réduites à zéro par quatre couples de valeurs de x et y. Or, une de ces couples de valeurs est réelle, comme nous venons de le trouver; il faut donc qu'entre les trois couples restantes il se trouve au moins encore une couple de valeurs réelles. Pour chacune de ces trois couples de valeurs de x et y on aura simultanément

$$A''B-AB'' = 0 \quad \text{et} \quad AB'-A'B = 0,$$

et par conséquent $\frac{B}{A} = \frac{B''}{A''}$ et $\frac{B}{A} = \frac{B'}{A'}$, donc $\frac{B''}{A''} = \frac{B'}{A'}$, ou

$$A'B''-A''B' = 0,$$

d'où l'on voit que chacune de ces trois couples de valeurs de x et y satisfera à l'équation (7.) quels que soient g et h. Donc chaque conique du plan P qui correspond à une droite du plan Π ira passer par trois points fixes du plan P, dont un au moins sera réel. Nommons ces points, points principaux du plan P, et désignons les par p_1, p_2, p_3.

En ordonnant les équations (1. 2.) par rapport aux variables x et y, on a

$$10. \quad (au+a't+a'')y + (bu+b't+b'')x + (cu+c't+c'') = 0,$$
$$11. \quad (\alpha u+\alpha' t+\alpha'')x + (\beta u+\beta' t+\beta'')y + (\gamma u+\gamma' t+\gamma'') = 0,$$

ou, en dénotant les fonctions linéaires de u et t, qui y entrent par M, M', M'', N, N' et N'',

12. $My + M'x + M'' = 0$, et 13. $Ny + N'x + N'' = 0$,

d'où $$y = \frac{M'N'' - M''N'}{MN' - M'N} \quad \text{et} \quad x = \frac{M''N - MN''}{MN' - M'N}.$$

A une droite du plan P, dont l'équation soit

$$y = mx + n$$

il répondra donc en général une conique du plan Π, dont

$$(M'N'' - M''N') - m(M''N - MN'') - n(MN' - M'N) = 0$$

sera l'équation. Par des raisons analogues à celles que nous avons développées plus haut, cette conique ira passer par trois points fixes π_1, π_2, π_3 du plan Π, dont un au moins sera réel, et que nous nommerons points principaux du plan Π.

L'équation d'une conique du plan P, qui passe par les trois points principaux p_1, p_2, p_3, peut toujours être mise sous la forme

$$(A'B'' - A''B') + \lambda(A''B - AB'') + \mu(A'B - AB') = 0,$$

où λ et μ sont des coëfficiens indéterminés. Substituant, à cause des équations (5.) t et u au lieu de $\frac{A'B'' - A''B'}{AB' - A'B}$ et $\frac{A''B - AB''}{AB' - A'B}$, il vient l'équation

$$u + \lambda t + \mu = 0,$$

qui est celle d'une droite du plan Π. Donc à une conique passant par les trois points principaux du plan P, il répond réciproquement une droite du plan Π.

De la même manière on se convaincra qu'à une conique passant par les trois points principaux du plan Π il répond une droite du plan P*).

Or, comme à un point commun à deux droites d'un plan, il répond un point de l'autre qui se trouve situé sur deux coniques passant par les points principaux de ce plan, il s'ensuit qu'au point de concours de deux droites d'un plan, il répond le quatrième point d'intersection de deux coniques passant toutes deux par les mêmes points principaux de l'autre plan; et réciproquement, qu'au quatrième point d'intersection de deux coniques passant toutes deux par les mêmes points principaux d'un plan, il répond le point de concours de deux droites dans l'autre plan.

---

*) A une conique qui ne passe pas par les trois points principaux de l'un des deux plans, il répond en général, dans l'autre plan, une courbe du quatrième degré à laquelle appartiennent les points principaux de ce plan comme des points singuliers, et à une courbe du $n^{\text{ième}}$ degré qui ne passe pas par les trois points principaux de l'un des deux plans, il répond en général dans l'autre plan une courbe du $(2n)^{\text{ième}}$ degré.

Voici, en résumant, les relations principales qui existent entre les points des deux plans P et Π.

Autant il y aura dans l'un des deux plans de points situés en ligne droite, autant on rencontrera dans l'autre de points situés sur une même conique passant par les trois points principaux; et réciproquement, autant il y aura dans l'un des deux plans de points situés sur une même conique passant par les trois points principaux, autant on rencontrera dans l'autre de points situés en ligne droite.

Autant il y aura dans l'un des deux plans de droites concourant en un même point, autant on rencontrera dans l'autre de coniques passant par les trois points principaux et par un même quatrième point; et réciproquement, autant il y aura dans l'un des deux plans de coniques passant par les trois points principaux et par un même quatrième point, autant on rencontrera dans l'autre plan de droites concourant en un même point.

Il est bon d'observer qu'à plusieurs droites d'un plan parallèles à une même direction, il répond dans l'autre plan des coniques passant par les trois points principaux et par un même quatrième point. En effet, si l'on suppose que dans l'équation (6.) la valeur de g soit constante et celle de h variable, cette équation appartiendra à une infinité de droites parallèles à une même direction; mais dans la même supposition l'équation (7.) appartient à une infinité de coniques passant par les trois points principaux p_1, p_2, p_3 et par un même quatrième point, car cette équation sera satisfaite par les valeurs de x et de y qui satisfont à la fois aux équations

$$14. \quad (A'B''-A''B')-g(A''B-AB'')=0,$$

$$15. \quad AB'-A'B=0,$$

et comme ces quatre valeurs sont indépendantes de la valeur de h, toutes les coniques exprimées par l'équation (7.) auront les mêmes quatre points d'intersection, dont trois sont, comme l'on sait déjà, les trois points principaux. Le quatrième de ces points d'intersection répond au point de concours des droites parallèles, c. à. d. à un point infiniment distant. Si l'on varie la direction des droites parallèles en variant la valeur de g, l'équation (14.) varie aussi, mais l'équation (15.) reste la même. Il suit de là qu'aux points infiniment distants dans un des deux plans, il répond des points de l'autre, qui sont situés sur une seule et même conique passant par les trois points principaux.

Il est presque superflu de faire oberver qu'entre les coniques correspondantes à des lignes droites, il se trouve aussi des systèmes de deux droites et des points: et pour ne pas être trop long, nous négligerons de prouver qu'à chaque droite passant par un des trois points principaux d'un plan, il répond un système de deux droites qui contiennent les trois points principaux de l'autre plan. Mais c'est dans le but d'en faire usage plus bas, que nous faisons remarquer qu'à un système composé d'une conique passant par les trois points principaux et d'un nombre quelconque de sécantes dans un plan, il répond dans l'autre plan un système composé d'une droite et d'un nombre égal de coniques passant par les trois points principaux; et qu'en conséquence si dans le premier plan les sécantes deviennent des tangentes, les coniques dans le second plan toucheront la droite.

En laissant de côté ce qui concerne la détermination des constantes a, b, c, etc. pour le cas général, et en nous réservant de reprendre cet objet dans une autre occasion, nous allons considérer quelques cas particuliers, et en premier lieu ceux qui conduisent à des résultats connus.

2.

En supposant que les constantes qui entrent dans les fonctions A' et B soient égales à zèro, et qu'en même temps celles qui entrent dans les fonctions A et B' soient respectivement égales entr'elles, de sorte qu'on ait $\alpha = 0$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$; $a' = 0$; $b' = 0$; $c' = 0$; $a = \alpha'$; $b = \beta'$; $c = \gamma'$; les équations (1. 2.) se réduisent aux suivantes

$$16. \quad (ay + bx + c)u + a''y + b''x + c'' = 0,$$

$$17. \quad (ay + bx + c)t + \alpha''y + \beta''x + \gamma'' = 0,$$

qui sont les mêmes que Mr. Moebius a données comme équations fondamentales de la collinéation *).

A une droite du plan Π

$$u = gt + h$$

il répond alors la ligne du plan P

$$a''y + b''x + c'' - g(\alpha''y + \beta''x + \gamma'') + h(ay + bx + c) = 0$$

qui, comme l'on voit, est de même une droite.

Quelles que soient les constantes a, b, c, etc. dans les équations (16. 17.), ces équations peuvent, par une simple transformation des coordonnées, en supposant que les angles des nouveaux axes dans les deux

*) Voyez T. IV. p. 103. de ce Journal.

plans soient égaux entr'eux, être réduites à la forme

$$18. \quad (ay+bx+c)u = y,$$

$$19. \quad (ay+bx+c)t = x.$$

Maintenant, si l'on pose le plan P sur le plan Π de manière que les axes des coordonnées coïncident, toute droite qui joint deux points correspondants ira passer par l'origine commune des coordonnées, qu'on peut appeler centre de collinéation; car à cause des équations (18., 19.) on a $\frac{u}{t}=\frac{y}{x}$. Réciproquement toute droite joignant un point à l'origine passera aussi par son point correspondant.

Pour trouver les points qui, dans les deux plans ainsi superposés tombent sur leurs correspondants, on n'a qu'à faire $u=y$ et $t=x$ dans les équations (18., 19.), ce qui donne

$$(ay+bx+c-1)y = 0, \quad \text{et} \quad (ay+bx+c-1)x = 0.$$

De ces équations on tire ou $y=0$ et $x=0$ ou $ay+bx+c-1=0$; d'où l'on voit, qu'à l'exception du centre de collinéation, tous les points qui tombent sur leurs correspondants sont situés sur une droite, exprimée par l'équation

$$ay+bx+c-1 = 0,$$

qu'on peut appeler axe de collinéation. Il est facile de voir que le point de concours de deux droites correspondantes se trouvera sur cet axe.

Par le moyen des équations (18., 19.) et de ce que nous venons de dire, on peut démontrer d'une manière facile nombre de théorèmes de la géométrie de situation; mais notre intention n'est pas d'en donner ici des exemples.

3.

Les équations (1., 2.) embrassent aussi le cas où les coëfficiens a, b, c, a', etc. sont respectivement égaux aux coëfficiens α, β, γ, α', etc. de sorte que les fonctions A, A' et A'' sont identiquement les mêmes que les fonctions B, B' et B''. Alors l'une des deux équations (1., 2.) rentre dans l'autre, et en donnant à x et à y des valeurs constantes x' et y', les valeurs de t et u restent indéterminées. Donc à un point $x'y'$ du plan P il ne répond plus comme auparavant un point $t'u'$ du plan Π, mais une droite de ce dernier plan, exprimée par l'équation

$$20. \quad (ay'+bx'+c)u+(a'y'+b'x'+c')t+a''y'+b''x'+c''=0.$$

Quelles que soient les constantes a, b, c, a', etc. dans cette équation, elle peut, par une simple transformation des coordonnées, en supposant que les angles des nouveaux axes dans les deux plans soient égaux

entr'eux, être réduite à la forme

21. $(ay+bx+d)u+(by+cx+e)t+dy+ex+f=0.$

Maintenant si l'on pose le plan P sur les plan Π de manière que les axes des coordonnées coïncident, il répondra à un point $\alpha\beta$ la même droite, soit que l'on considère ce point comme un point du plan P, ou comme un point du plan Π; car l'équation (21.) est symétrique par rapport à x, t et y, u, ce qui est visible en l'écrivant ainsi

22. $ayu+b(xu+yt)+cxt+d(y+u)+e(x+t)+f=0.$

Pour trouver les points qui, dans les deux plans ainsi superposés, tombent sur leurs droites correspondantes, on n'a qu'à faire $u=y$ et $t=x$ dans l'équation (22.), ce qui donne

23. $ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0;$

d'où l'on voit que ces points sont situés sur une conique.

Il serait inutile de développer ici les propriétés de la droite (21.), cette droite n'étant autre chose que la droite polaire du point xy par rapport à la conique (23.).

4.

Nous supposons à présent que les équations (1, 2.), par une détermination particulière des constantes, prennent la forme

24. $ayu+bxt+1=0,$

25. $xu-yt=0.$

Alors on a

$$u=-\frac{y}{ay^2+bx^2} \quad \text{et} \quad t=-\frac{x}{ay^2+bx^2},$$

et il répond à une droite du plan Π, dont l'équation soit

6. $u=gt+h$

une conique du plan P, dont l'équation sera

26. $ay^2+bx^2+\frac{1}{h}y-\frac{g}{h}x=0.$

Mais les deux premiers termes de cette équation restant les mêmes quelles que soient les valeurs de g et h, c. à d. quelle que soit la droite (6.), on voit que, dans la supposition actuelle, les coniques du plan P, qui répondent aux droites du plan Π, seront toutes homothétiques (c. à d. semblables et semblablement placées). Il est clair que toutes ces coniques iront passer par l'origine des xy, qui est un point principal p_1, du plan P dont les deux autres points principaux p_2, p_3 tombent à l'infini.

Au point de concours de deux droites du plan Π il répond ici le second point d'intersection de deux coniques correspondantes du plan P.

A des droites du plan Π parallèles à une même direction il répond deux coniques du plan P qui se touchent au point principal p_1. En effet l'équation de la tangente à la conique (26.) dans un point $x'y'$ est

$$\left(ay'+\frac{1}{2h}\right)y+\left(bx'-\frac{g}{2h}\right)x+\frac{1}{2h}y'-\frac{g}{2h}x'=0,$$

qui, en faisant $y'=0$ et $x'=0$, se réduit à

$$y=gx,$$

équation de la tangente à la conique dans l'origine des xy, laquelle est indépendante de h, et ne variera pas en supposant la valeur de g constante.

Aussi est-il visible que l'angle sous lequel se coupent deux droites du plan Π est égal à l'angle sous lequel se coupent au point p_1 les deux coniques homothétiques correspondantes du plan P.

Dans le cas actuel nous n'avons presque pas besoin de nous arrêter à faire voir qu'à une droite du plan Π qui passe par le point principal π_1, origine des tu, il répond une droite du plan P qui contient le point principal p_1; en effet, en égalant h à zéro, l'équation (26.) se réduira à

$$y-gx=0.$$

Si, par une détermination des constantes plus particulière encore, on rend dans les équations (24., 25.) $b=0$, alors à une droite (6.) il répond une courbe

$$ay^2+\frac{1}{h}y-\frac{g}{h}x=0,$$

qu'on voit être une parabole; ou si l'on fait dans les équations (24., 25.) $b=a$, les courbes qui répondent aux droites (6.) seront toutes des cercles.

5.

A présent nous allons faire voir par quelques exemples comment on peut, au moyen de ce qui précède, découvrir des théorèmes nouveaux.

1°. Nous supposerons en premier lieu que ce soient des coniques homothétiques qui répondent à des droites.

Soient dans un triangle rectiligne abc du plan P abaissées des sommets a, b, c, sur les côtés opposés trois perpendiculaires aa', bb', cc', qui concourent, comme l'on sait, en un seul et même point p.

Aux côtés ab, bc, ac du triangle, il répond dans le plan Π trois coniques homothétiques passant par le point principal π_1 et se coupant en outre, deux à deux, dans les trois points α, β, γ, qui correspondent aux trois points a, b, c. Aux trois droites aa', bb', cc' correspondent trois coniques homothétiques passant respectivement par les points α, β, γ, et coupant respec-

tivement les trois premières coniques dans le point π_1 sous des angles droits. Or, les trois aa', bb', cc' concourent en un même point p, il faut donc que les trois coniques correspondantes concourent aussi en un même point π. Donc

„si trois coniques homothétiques $\pi_1\alpha\beta$, $\pi_1\alpha\gamma$, $\pi_1\beta\gamma$, se coupent toutes trois en un même point π_1, et, deux à deux, dans les points α, β, γ, et si par les points π_1 et α, π_1 et β, π_1 et γ on fait passer les trois coniques $\pi_1\alpha\alpha'$, $\pi_1\beta\beta'$, $\pi_1\gamma\gamma'$, homothétiques aux premières et de sorte qu'elles coupent respectivement les coniques $\pi_1\beta\gamma$, $\pi_1\alpha\gamma$, $\pi_1\alpha\beta$ au point π_1 sous des angles droits, ces coniques $\pi_1\alpha\alpha'$, $\pi_1\beta\beta'$, $\pi_1\gamma\gamma'$, iront passer de nouveau par un seul et même point π."

2°. Nous supposons maintenant que ce soient des cercles qui correspondent à des droites.

Dans le plan P soient tirées d'un point quelconque p deux droites d, d', coupant un cercle c, qui passe par le point principal p_1. En joignant, deux à deux, les points d'intersection a, b, a', b', par deux nouvelles droites e, e', ces droites iront concourir en un point p' situé sur la droite polaire s du point p, quelles que soient les directions des droites d et d'. Si le point p décrit une droite r, les droites polaires s pivoteront sur un même point t.

Dans le plan Π il répond au point p du plan P, un point π; au cercle c, une droite γ; aux droites d, d', deux cercles δ, δ', passant par les points π_1 et π, et coupant la droite γ en quatre points α, β, α', β', correspondants aux points a, b, a', b'; et aux droites e, e', il répond deux nouveaux cercles ε, ε', passant par le point principal π_1 et joignant, deux à deux, les points α, β, α', β'. Ces deux cercles auront un second point d'intersection π' correspondant au point p', et, quels que soient les rayons des cercles δ et δ', ce point π' sera toujours situé sur un seul et même cercle σ, qui, en correspondant à la droite s, passe par le point π_1. Si le point π decrit un cercle ϱ, qui correspond à la droite r, et passe par le point π_1, les divers cercles σ, qui en naissent, auront un seul et même second point d'intersection τ, correspondant au point t. Donc

„si par deux points fixes π, π_1, on fait passer, avec des rayons quelconques, deux cercles δ, δ', coupant une droite donnée γ en quatre points α, β, α', β'; et si l'on décrit de nouveau deux cercles ε, ε', qui, en passant par un des deux points fixes π_1, joignent les points α, β, α', β', deux à deux; ces deux cercles ε, ε' auront un second

point d'intersection π' toujours situé sur un seul et même cercle σ, qui contient le point π_1 quels que soient les rayons des cercles δ, δ'. Si le point π décrit un cercle ϱ, qui passe par le point π_1, les divers cercles σ, qui en naissent, auront un seul et même second point d'intersection τ."

En invoquant la théorie des polaires reciproques, on obtient le théorème suivant.

„Si l'on décrit deux coniques confocales δ, δ', dont chacune touche deux droites fixes π, π_1, et si, d'un point donné γ, on mène à chacune de ces coniques deux tangentes α, β et α', β'; de plus, si dans les deux triangles formés respectivement par les droites π_1, α, α' et par les droites π_1, β, β', on inscrit deux nouvelles coniques ε, ε' de même foyer que les premières; ces coniques ε, ε' auront une seconde tangente commune π', qui touchera une seule et même conique σ ayant le même foyer et la même tangente π_1. Si la droite π change de situation, mais de manière à rester tangente à une même conique confocale ϱ qui touche la droite π_1; les diverses coniques σ qui en naissent, toucheront une seule et même seconde droite τ."

En supposant toujours que ce soient des cercles qui répondent à des droites, prenons pour second exemple le théorème suivant généralement connu.

Si par le sommet s d'un angle circonscrit à la fois à deux cercles ayant une corde commune réelle pp_1, on mène deux droites quelconques coupant ces cercles en huit points, et si l'on joint les points d'intersection dans chaque cercle par de nouvelles droites; les directions de quatre de ces droites formeront un parallélogramme, dont deux sommets seront situés sur la direction de la corde pp_1 et dont les deux autres sommets seront en ligne droite avec le point s.

En prenant l'un des deux points communs à ces deux cercles, p_1 par exemple, pour point principal d'un plan, on aura dans l'autre plan au lieu de ces deux cercles, deux droites se coupant en un point π, qui répond au point p; au lieu des deux tangentes partant du point s, deux cercles qui, en touchant les deux droites, passent par les points π_1 et σ. Au lieu de la corde commune pp_1 (qui est une droite passant par un point principal) on aura une droite $\pi\pi_1$; enfin au lieu des quatre côtés du parallélogramme on aura deux couples de cercles qui se touchent au poit π_1. Donc

„soient deux cercles c, c' inscrits en un même angle donné dont le

sommet soit π, et soient décrits avec des rayons arbitraires deux autres cercles d, d', qui passent par les points d'intersection π_1 et σ des deux premiers et qui coupent les côtés de l'angle donné. Or, si l'on décrit de nouveau des cercles, qui en passant par le point π_1, joignent de nouveau et deux à deux les points d'intersection situés sur une même droite, il s'y trouvera deux couples de cercles qui se touchent au point π_1; des deuxièmes points d'intersection de ces quatre cercles deux points seront situés sur la direction de la droite $\pi\pi_1$, et deux autres sur la circonférence d'un cercle passant par les points π_1 et σ, quels que soient les rayons des cercles d, d'."

Il sera facile de former, par le moyen de la théorie des polaires réciproques, le théorème correspondant sur des coniques confocales.

3°. En supposant présentement que ce soient des coniques quelconques passant par les mêmes trois points π_1, π_2, π_3, qui répondent à des droites, nous allons donner un exemple de la maniére de sextupler un théorème.

Théorème I. Dans tout hexagone inscrit à une conique les points de concours des côtés respectivement opposés sont tous trois situés sur une même droite. (Pascal.)

De là on tire par la théorie des polaires réciproques le théorème suivant

Théorème II. Dans tout hexagone circonscrit à une conique les diagonales qui joignent, deux à deux, les sommets respectivement opposés se croisent toutes trois en un même point. (Brianchon.)

Du premier théorème nous tirons le suivant

Théorème III. „Sur une droite quelconque soient pris arbitrairement six points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Si l'on décrit six coniques $\pi_1\pi_2\pi_3 a_1 a_2$, $\pi_1\pi_2\pi_3 a_2 a_3$, $\pi_1\pi_2\pi_3 a_3 a_4$, $\pi_1\pi_2\pi_3 a_4 a_5$, $\pi_1\pi_2\pi_3 a_5 a_6$ et $\pi_1\pi_2\pi_3 a_6 a_1$, qui passent par trois points fixes π_1, π_2, π_3, et qui joignent respectivement deux points consécutifs sur la droite; le quatrième point d'intersection de la 1re conique et de la 4ième, de la 2de et de la 5ième, de la 3ième et de la 6ième seront situés tous trois sur une même conique passant par les trois points fixes π_1, π_2, π_3."

Le second théorème donne le suivant

Théorème IV. „Soient décrits six coniques qui passent par trois points fixes π_1, π_2, π_3 et qui touchent une même droite; et soient désignés les quatrièmes points d'intersection des coniques consécutives par

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Si l'on décrit trois coniques $\pi_1\pi_2\pi_3 a_1 a_4$, $\pi_1\pi_2\pi_3 a_2 a_5$, $\pi_1\pi_2\pi_3 a_3 a_6$ qui passent par les points fixes π_1, π_2, π_3 et qui joignent respectivement les points a_1 et a_4, a_2 et a_5, a_3 et a_6, ces trois coniques auront un même quatrième point d'intersection."

Du troisième théorème on obtient, par la théorie des polaires réciproques, le suivant

Théorème V. „Soient tirées arbitrairement six droites $a_1 a_2 a_3 \ldots a_6$ partant d'un même point. Si dans les six pentagones, formés par trois droites fixes π_1, π_2, π_3, et respectivement par deux droites consécutives de ces six droites a_1, a_2, ... a_6, on inscrit six coniques, les quatrièmes tangentes communes à la première conique et à la quatrième, à la seconde et à la cinquième, à la troisième et à la sixième, formeront avec les trois droites π_1, π_2, π_3 un hexagone, dans lequel on peut inscrire une conique."

Enfin du quatrième théorème on obtient par la théorie des polaires réciproques le suivant

Théorème VI. „Soient décrits six coniques touchant trois droites fixes π_1, π_2, π_3, et passant par un même point; et soient désignées les quatrièmes tangentes communes à deux coniques consécutives par a_1, a_2, ... a_6. Si dans les trois pentagones formés respectivement par les droites π_1, π_2, π_3, a_1, a_4; π_1, π_2, π_3, a_2, a_5; π_1, π_2, π_3, a_3, a_6, on inscrit trois coniques, ces coniques, auront une même quatrième tangente commune."

Il est bon d'observer que les constructions contenues dans les énoncés de ces six théorèmes peuvent être variées de soixante manières différentes.

On verra facilement que nous aurions pu donner nombre d'exemples de la manière de multiplier, par la méthode en question, des théorèmes de la géométrie de situation; mais nous croyons que les exemples donnés suffiront pour faire connaître son application.

Au reste ne manquons pas de remarquer que les géometres qui craignent le calcul peuvent tirer le principe sur lequel repose cette méthode, d'une propriété connue de plusieurs coniques qui ont mêmes sécantes communes, c. à. d. qui ont quatre points réels ou imaginaires communs.

Nous remettons à une autre occasion de faire voir comment doit être modifiée cette méthode pour pouvoir être appliquée aux théorèmes de la géométrie de trois dimensions.

6.

Potenzial- oder cyklisch-hyperbolische Functionen.

(Von Hrn. Prof. *Gudermann* zu Cleve.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1., 14. und 28. im VI., und No. 9. und 21. im VII. Bande.)

I.

Tabelle der Längezahlen (mit sieben Decimalziffern) aller Kreisbogen für den Radius = 1 von Minute zu Minute nach beiden Kreis-Eintheilungen, behufs der Zurückführung der hyperbolischen Functionen auf die cyklischen und umgekehrt.

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=48°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
48,00	0,837 6213	21 55	43 12 00 0	66 51	
48,01	0,837 8368	21 56	43 12 32 4	66 54	
02	38 0524	21 55	13 04 8	66 51	
03	38 2679	21 56	13 37 2	66 54	
04	38 4835	21 56	14 09 6	66 54	
05	38 6991	21 57	14 42 0	66 57	
48,06	0,838 9148	21 57	43 15 14 4	66 57	
07	39 1305	21 57	15 46 8	66 57	
08	39 3462	21 58	16 19 2	66 60	
09	39 5620	21 57	16 51 6	66 57	
10	39 7777	21 59	17 24 0	66 64	
48,11	0,839 9936	21 58	43 17 56 4	66 60	
12	40 2094	21 59	18 28 8	66 64	
13	40 4253	21 59	19 01 2	66 64	
14	40 6412	21 59	19 33 6	66 64	
15	40 8571	21 60	20 06 0	66 67	
48,16	0,841 0731	21 60	43 20 38 4	66 67	
17	41 2891	21 61	21 10 8	66 70	
18	41 5052	21 60	21 43 2	66 67	
19	41 7212	21 61	22 15 6	66 70	
20	41 9373	21 62	22 48 0	66 73	
48,21	0,842 1535	21 62	43 23 20 4	66 73	
22	42 3697	21 62	23 52 8	66 73	
23	42 5859	21 62	24 25 2	66 73	
24	42 8021	21 63	24 57 6	66 76	
25	43 0184	21 63	25 30 0	66 76	
48,26	0,843 2347	21 63	43 26 02 4	66 76	
27	43 4510	21 64	26 34 8	66 79	
28	43 6674	21 64	27 07 2	66 79	
29	43 8838	21 64	27 39 6	66 79	
30	44 1002	21 64	28 12 0	66 79	
48,31	0,844 3166	21 65	43 28 44 4	66 82	
32	44 5331	21 66	29 16 8	66 85	
33	44 7497	21 65	29 49 2	66 82	
34	44 9662	21 66	30 21 6	66 85	
35	45 1828	21 66	30 54 0	66 85	
48,36	0,845 3994	21 67	43 31 26 4	66 88	
37	45 6161	21 66	31 58 8	66 85	
38	45 8327	21 68	32 31 2	66 91	
39	46 0495	21 67	33 03 6	66 88	
40	46 2662	21 68	33 36 0	66 91	
48,41	0,846 4830	21 68	43 34 08 4	66 91	
42	46 6998	21 68	34 40 8	66 91	
43	46 9166	21 69	35 13 2	66 94	
44	47 1335	21 69	35 45 6	66 94	
45	47 3504	21 69	36 18 0	66 94	
48,46	0,847 5673	21 70	43 36 50 4	66 97	
47	47 7843	21 70	37 22 8	66 97	
48	48 0013	21 70	37 55 2	66 97	
49	48 2183	21 71	38 27 6	67 01	
50	48 4354		39 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=48°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D, 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
48,50	0,848 4354	21 71	43 39 00 0	67 01	
48,51	0,848 6525	21 71	43 39 32 4	67 01	
52	48 8696	21 72	40 04 8	67 04	
53	49 0868	21 72	40 37 2	67 04	
54	49 3040	21 72	41 09 6	67 04	
55	49 5212	21 73	41 42 0	67 07	
48,56	0,849 7385	21 73	43 42 14 4	67 07	
57	49 9558	21 74	42 46 8	67 10	
58	50 1732	21 74	43 19 2	67 10	
59	50 3906	21 74	43 51 6	67 10	
60	50 6080	21 74	44 24 0	67 10	
48,61	0,850 8254	21 75	43 44 56 4	67 13	
62	51 0429	21 75	45 28 8	67 13	
63	51 2604	21 75	46 01 2	67 13	
64	51 4779	21 76	46 33 6	67 16	
65	51 6955	21 76	47 06 0	67 16	
48,66	0,851 9131	21 76	43 47 38 4	67 16	
67	52 1307	21 77	48 10 8	67 19	
68	52 3484	21 77	48 43 2	67 19	
69	52 5661	21 77	49 15 6	67 19	
70	52 7838	21 78	49 48 0	67 22	
48,71	0,853 0016	21 78	43 50 20 4	67 22	
72	53 2194	21 78	50 52 8	67 22	
73	53 4372	21 78	51 25 2	67 22	
74	53 6550	21 79	51 57 6	67 25	
75	53 8729	21 80	52 30 0	67 28	
48,76	0,854 0909	21 79	43 53 02 4	67 25	
77	54 3088	21 80	53 34 8	67 28	
78	54 5268	21 80	54 07 2	67 28	
79	54 7448	21 81	54 39 6	67 31	
80	54 9629	21 81	55 12 0	67 31	
48,81	0,855 1810	21 81	43 55 44 4	67 31	
82	55 3991	21 81	56 16 8	67 31	
83	55 6172	21 82	56 49 2	67 35	
84	55 8354	21 82	57 21 6	67 35	
85	56 0536	21 83	57 54 0	67 38	
48,86	0,856 2719	21 83	43 58 26 4	67 38	
87	56 4902	21 83	58 58 8	67 38	
88	56 7085	21 84	43 59 31 2	67 41	
89	56 9269	21 83	44 00 03 6	67 38	
90	57 1452	21 85	00 36 0	67 44	
48,91	0,857 3637	21 84	44 01 08 4	67 41	
92	57 5821	21 85	01 40 8	67 44	
93	57 8006	21 85	02 13 2	67 44	
94	58 0191	21 86	02 45 6	67 47	
95	58 2377	21 86	03 18 0	67 47	
48,96	0,858 4563	21 86	44 03 50 4	67 47	
97	58 6749	21 86	04 22 8	67 47	
98	58 8935	21 87	04 55 2	67 50	
99	59 1122	21 87	05 27 6	67 50	
49,00	59 3309		06 00 0		

N. E.		Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.		
$k=49°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=49°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
49,00	0,859 3309	21 88	44 06 00 0	67 53	49,50	0,870 3097	22 04	44 33 00 0	68 02
49,01	0,859 5497	21 88	44 06 32 4	67 53	49,51	0,870 5301	22 05	44 33 32 4	68 06
02	59 7685	21 88	07 04 8	67 53	52	70 7506	22 05	34 04 8	68 06
03	59 9873	21 88	07 37 2	67 53	53	70 9711	22 05	34 37 2	68 06
04	60 2061	21 89	08 09 6	67 56	54	71 1916	22 05	35 09 6	68 06
05	60 4250	21 89	08 42 0	67 56	55	71 4122	22 06	35 42 0	68 09
49,06	0,860 6439	21 90	44 09 14 4	67 59	49,56	0,871 6328	22 06	44 36 14 4	68 09
07	60 8629	21 90	09 46 8	67 59	57	71 8534	22 07	36 46 8	68 12
08	61 0819	21 90	10 19 2	67 59	58	72 0741	22 07	37 19 2	68 12
09	61 3009	21 91	10 51 6	67 62	59	72 2948	22 08	37 51 6	68 15
10	61 5200	21 90	11 24 0	67 59	60	72 5156	22 07	38 24 0	68 12
49,11	0,861 7390	21 92	44 11 56 4	67 65	49,61	0,872 7363	22 09	44 38 56 4	68 18
12	61 9582	21 91	12 28 8	67 62	62	72 9572	22 08	39 28 8	68 15
13	62 1773	21 92	13 01 2	67 65	63	73 1780	22 09	40 01 2	68 18
14	62 3965	21 92	13 33 6	67 65	64	73 3989	22 09	40 33 6	68 18
15	62 6157	21 93	14 06 0	67 69	65	73 6198	22 09	41 06 0	68 18
49,16	0,862 8350	21 92	44 14 38 4	67 65	49,66	0,873 8407	22 10	44 41 38 4	68 21
17	63 0542	21 94	15 10 8	67 72	67	74 0617	22 10	42 10 8	68 21
18	63 2736	21 93	15 43 2	67 69	68	74 2827	22 11	42 43 2	68 24
19	63 4929	21 94	16 15 6	67 72	69	74 5038	22 11	43 15 6	68 24
20	63 7123	21 95	16 48 0	67 75	70	74 7249	22 11	43 48 0	68 24
49,21	0,863 9318	21 94	44 17 20 4	67 72	49,71	0,874 9460	22 12	44 44 20 4	68 27
22	64 1512	21 95	17 52 8	67 75	72	75 1672	22 11	44 52 8	68 24
23	64 3707	21 95	18 25 2	67 75	73	75 3883	22 13	45 25 2	68 30
24	64 5902	21 96	18 57 6	67 78	74	75 6096	22 12	45 57 6	68 27
25	64 8098	21 96	19 30 0	67 78	75	75 8308	22 13	46 30 0	68 30
49,26	0,865 0294	21 96	44 20 02 4	67 78	49,76	0,876 0521	22 14	44 47 02 4	68 33
27	65 2490	21 96	20 34 8	67 78	77	76 2735	22 13	47 34 8	68 30
28	65 4686	21 97	21 07 2	67 81	78	76 4948	22 14	48 07 2	68 33
29	65 6883	21 97	21 39 6	67 81	79	76 7162	22 15	48 39 6	68 36
30	65 9080	21 98	22 12 0	67 84	80	76 9377	22 14	49 12 0	68 33
49,31	0,866 1278	21 98	44 22 44 4	67 84	49,81	0,877 1591	22 15	44 49 44 4	68 36
32	66 3476	21 98	23 16 8	67 84	82	77 3806	22 16	50 16 8	68 40
33	66 5674	21 99	23 49 2	67 87	83	77 6022	22 15	50 49 2	68 36
34	66 7873	21 99	24 21 6	67 87	84	77 8237	22 16	51 21 6	68 40
35	67 0072	21 99	24 54 0	67 87	85	78 0453	22 17	51 54 0	68 43
49,36	0,867 2271	22 00	44 25 26 4	67 90	49,86	0,878 2670	22 16	44 52 26 4	68 40
37	67 4471	22 00	25 58 8	67 90	87	78 4886	22 18	52 58 8	68 46
38	67 6671	22 00	26 31 2	67 90	88	78 7104	22 17	53 31 2	68 43
39	67 8871	22 01	27 03 6	67 93	89	78 9321	22 18	54 03 6	68 46
40	68 1072	22 01	27 36 0	67 93	90	79 1539	22 18	54 36 0	68 46
49,41	0,868 3273	22 01	44 28 08 4	67 93	49,91	0,879 3757	22 18	44 55 08 4	68 46
42	68 5474	22 02	28 40 8	67 96	92	79 5975	22 19	55 40 8	68 49
43	68 7676	22 02	29 13 2	67 96	93	79 8194	22 19	56 13 2	68 49
44	68 9878	22 02	29 45 6	67 96	94	80 0413	22 20	56 45 6	68 52
45	69 2080	22 03	30 18 0	67 99	95	80 2633	22 20	57 18 0	68 52
49,46	0,869 4283	22 03	44 30 50 4	67 99	49,96	0,880 4853	22 20	44 57 50 4	68 52
47	69 6486	22 03	31 22 8	67 99	97	80 7073	22 21	58 22 8	68 55
48	69 8689	22 04	31 55 2	68 02	98	80 9294	22 21	58 55 2	68 55
49	70 0893	22 04	32 27 6	68 02	99	81 1515	22 21	44 59 27 6	68 55
50	70 3097		33 00 0		50,00	81 3736		45 00 00 0	

N. E.		Alte Einth.		Alte Einth.	
$k=50°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
50,00	0,881 3736	22 21	45 00 00 0	68 55	
50,01	0,881 5957	22 22	45 00 32 4	68 58	
02	81 8179	22 23	01 04 8	68 61	
03	82 0402	22 22	01 37 2	68 58	
04	82 2624	22 23	02 09 6	68 61	
05	82 4847	22 24	02 42 0	68 64	
50,06	0,882 7071	22 24	45 03 14 4	68 64	
07	82 9295	22 24	03 46 8	68 64	
08	83 1519	22 24	04 19 2	68 64	
09	83 3743	22 25	04 51 6	68 67	
10	83 5968	22 25	05 24 0	68 67	
50,11	0,883 8193	22 25	45 05 56 4	68 67	
12	84 0418	22 26	06 28 8	68 70	
13	84 2644	22 26	07 01 2	68 70	
14	84 4870	22 27	07 33 6	68 73	
15	84 7097	22 27	08 06 0	68 73	
50,16	0,884 9324	22 27	45 08 38 4	68 73	
17	85 1551	22 28	09 10 8	68 77	
18	85 3779	22 28	09 43 2	68 77	
19	85 6007	22 28	10 15 6	68 77	
20	85 8235	22 28	10 48 0	68 77	
50,21	0,886 0463	22 29	45 11 20 4	68 80	
22	86 2692	22 30	11 52 8	68 83	
23	86 4922	22 29	12 25 2	68 80	
24	86 7151	22 30	12 57 6	68 83	
25	86 9381	22 31	13 30 0	68 86	
50,26	0,887 1612	22 31	45 14 02 4	68 86	
27	87 3843	22 31	14 34 8	68 86	
28	87 6074	22 31	15 07 2	68 86	
29	87 8305	22 32	15 39 6	68 89	
30	88 0537	22 32	16 12 0	68 89	
50,31	0,888 2769	22 32	45 16 44 4	68 89	
32	88 5001	22 33	17 16 8	68 92	
33	88 7234	22 34	17 49 2	68 95	
34	88 9468	22 33	18 21 6	68 92	
35	89 1701	22 34	18 54 0	68 95	
50,36	0,889 3935	22 34	45 19 26 4	68 95	
37	89 6169	22 35	19 58 8	68 98	
38	89 8404	22 35	20 31 2	68 98	
39	90 0639	22 35	21 03 6	68 98	
40	90 2874	22 36	21 36 0	69 01	
50,41	0,890 5110	22 36	45 22 08 4	69 01	
42	90 7346	22 37	22 40 8	69 04	
43	90 9583	22 36	23 13 2	69 01	
44	91 1819	22 37	23 45 6	69 04	
45	91 4056	22 38	24 18 0	69 07	
50,46	0,891 6294	22 38	45 24 50 4	69 07	
47	91 8532	22 38	25 22 8	69 07	
48	92 0770	22 39	25 55 2	69 10	
49	92 3009	22 38	26 27 6	69 07	
50	92 5247		27 00 0		

N. E.		Alte Einth.		Alte Einth.	
$k=50°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
50,50	0,892 5247	22 40	45 27 00 0	69 14	
50,51	0,892 7487	22 39	45 27 32 4	69 10	
52	92 9726	22 40	28 04 8	69 14	
53	93 1966	22 41	28 37 2	69 17	
54	93 4207	22 40	29 09 6	69 14	
55	93 6447	22 41	29 42 0	69 17	
50,56	0,893 8688	22 42	45 30 14 4	69 20	
57	94 0930	22 42	30 46 8	69 20	
58	94 3172	22 42	31 19 2	69 20	
59	94 5414	22 42	31 51 6	69 20	
60	94 7656	22 43	32 24 0	69 23	
50,61	0,894 9899	22 44	45 32 56 4	69 26	
62	95 2143	22 43	33 28 8	69 23	
63	95 4386	22 44	34 01 2	69 26	
64	95 6630	22 44	34 33 6	69 26	
65	95 8874	22 45	35 06 0	69 29	
50,66	0,896 1119	22 45	45 35 38 4	69 29	
67	96 3364	22 45	36 10 8	69 29	
68	96 5609	22 45	36 43 2	69 29	
69	96 7855	22 46	37 15 6	69 32	
70	97 0101	22 47	37 48 0	69 35	
50,71	0,897 2348	22 47	45 38 20 4	69 35	
72	97 4595	22 47	38 52 8	69 35	
73	97 6842	22 47	39 25 2	69 35	
74	97 9089	22 48	39 57 6	69 38	
75	98 1337	22 48	40 30 0	69 38	
50,76	0,898 3585	22 49	45 41 02 4	69 41	
77	98 5834	22 49	41 34 8	69 41	
78	98 8083	22 49	42 07 2	69 41	
79	99 0332	22 50	42 39 6	69 44	
80	99 2582	22 50	43 12 0	69 44	
50,81	0,899 4832	22 51	45 43 44 4	69 48	
82	99 7083	22 50	44 16 8	69 44	
83	99 9333	22 51	44 49 2	69 48	
84	0,900 1584	22 52	45 21 6	69 51	
85	00 3836	22 52	45 54 0	69 51	
50,86	0,900 6088	22 52	45 46 26 4	69 51	
87	00 8340	22 53	46 58 8	69 54	
88	01 0593	22 53	47 31 2	69 54	
89	01 2846	22 53	48 03 6	69 54	
90	01 5099	22 54	48 36 0	69 57	
50,91	0,901 7353	22 54	45 49 08 4	69 57	
92	01 9607	22 54	49 40 8	69 57	
93	02 1861	22 55	50 13 2	69 60	
94	02 4116	22 55	50 45 6	69 60	
95	02 6371	22 56	51 18 0	69 63	
50,96	0,902 8627	22 56	45 51 50 4	69 63	
97	03 0883	22 56	52 22 8	69 63	
98	03 3139	22 57	52 55 2	69 66	
99	03 5396	22 57	53 27 6	69 66	
51,00	03 7653		54 00 0		

N. E. $k=51°$	Ω. k.	Alte Einth. D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		
51,00	0,903 7653	22 57	45 54 00 0	69 66	
51,01	0,903 9910	22 58	45 54 32 4	69 69	
02	04 2168	22 58	55 04 8	69 69	
03	04 4426	22 58	55 37 2	69 69	
04	04 6684	22 59	56 09 6	69 72	
05	04 8943	22 59	56 42 0	69 72	
51,06	0,905 1202	22 60	45 57 14 4	69 75	
07	05 3462	22 60	57 46 8	69 75	
08	05 5722	22 60	58 19 2	69 75	
09	05 7982	22 60	58 51 6	69 75	
10	06 0242	22 61	59 24 0	69 78	
51,11	0,906 2503	22 62	45 59 56 4	69 81	
12	06 4765	22 62	46 00 28 8	69 81	
13	06 7027	22 62	01 01 2	69 81	
14	06 9289	22 62	01 33 6	69 81	
15	07 1551	22 63	02 06 0	69 85	
51,16	0,907 3814	22 63	46 02 38 4	69 85	
17	07 6077	22 64	03 10 8	69 88	
18	07 8341	22 64	03 43 2	69 88	
19	08 0605	22 64	04 15 6	69 88	
20	08 2869	22 65	04 48 0	69 91	
51,21	0,908 5134	22 66	46 05 20 4	69 91	
22	08 7399	22 66	05 52 8	69 94	
23	08 9665	22 65	06 25 2	69 91	
24	09 1930	22 67	06 57 6	69 97	
25	09 4197	22 66	07 30 0	69 94	
51,26	0,909 6463	22 67	46 08 02 4	69 97	
27	09 8730	22 67	08 34 8	69 97	
28	10 0997	22 68	09 07 2	70 00	
29	10 3265	22 68	09 39 6	70 00	
30	10 5533	22 69	10 12 0	70 03	
51,31	0,910 7802	22 68	46 10 44 4	70 00	
32	11 0070	22 70	11 16 8	70 06	
33	11 2340	22 69	11 49 2	70 03	
34	11 4609	22 70	12 21 6	70 06	
35	11 6879	22 70	12 54 0	70 06	
51,36	0,911 9149	22 71	46 13 26 4	70 09	
37	12 1420	22 71	13 58 8	70 09	
38	12 3691	22 71	14 31 2	70 09	
39	12 5962	22 72	15 03 6	70 12	
40	12 8234	22 72	15 36 0	70 12	
51,41	0,913 0506	22 73	46 16 08 4	70 15	
42	13 2779	22 73	16 40 8	70 15	
43	13 5052	22 73	17 13 2	70 15	
44	13 7325	22 73	17 45 6	70 15	
45	13 9598	22 74	18 18 0	70 19	
51,46	0,914 1872	22 75	46 18 50 4	70 22	
47	14 4147	22 75	19 22 8	70 22	
48	14 6422	22 75	19 55 2	70 22	
49	14 8697	22 75	20 27 6	70 22	
50	15 0972		21 00 0		

N. E. $k=51°$	Ω. k.	Alte Einth. D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		
51,50	0,915 0972	22 76	46 21 00 0	70 25	
51,51	0,915 3248	22 76	46 21 32 4	70 25	
52	15 5524	22 77	22 04 8	70 28	
53	15 7801	22 77	22 37 2	70 28	
54	16 0078	22 77	23 09 6	70 28	
55	16 2355	22 78	23 42 0	70 31	
51,56	0,916 4633	22 78	46 24 14 4	70 31	
57	16 6911	22 79	24 46 8	70 34	
58	16 9190	22 79	25 19 2	70 34	
59	17 1469	22 79	25 51 6	70 34	
60	17 3748	22 80	26 24 0	70 37	
51,61	0,917 6028	22 80	46 26 56 4	70 37	
62	17 8308	22 80	27 28 8	70 37	
63	18 0588	22 81	28 01 2	70 40	
64	18 2869	22 81	28 33 6	70 40	
65	18 5150	22 81	29 06 0	70 40	
51,66	0,918 7431	22 82	46 29 38 4	70 43	
67	18 9713	22 82	30 10 8	70 43	
68	19 1995	22 83	30 43 2	70 46	
69	19 4278	22 83	31 15 6	70 46	
70	19 6561	22 84	31 48 0	70 49	
51,71	0,919 8845	22 83	46 32 20 4	70 46	
72	20 1128	22 84	32 52 8	70 49	
73	20 3412	22 85	33 25 2	70 52	
74	20 5697	22 85	33 57 6	70 52	
75	20 7982	22 85	34 30 0	70 52	
51,76	0,921 0267	22 86	46 35 02 4	70 56	
77	21 2553	22 86	35 34 8	70 56	
78	21 4839	22 86	36 07 2	70 56	
79	21 7125	22 87	36 39 6	70 59	
80	21 9412	22 88	37 12 0	70 62	
15.81	0,922 1700	22 87	46 37 44 4	70 59	
82	22 3987	22 88	38 16 8	70 62	
83	22 6275	22 88	38 49 2	70 62	
84	22 8563	22 89	39 21 6	70 65	
85	23 0852	22 89	39 54 0	70 65	
51,86	0,923 3141	22 90	46 40 26 4	70 68	
87	23 5431	22 90	40 58 8	70 68	
88	23 7721	22 90	41 31 2	70 68	
89	24 0011	22 90	42 03 6	70 68	
90	24 2301	22 91	42 36 0	70 71	
51,91	0,924 4592	22 92	46 43 08 4	70 74	
92	24 6884	22 92	43 40 8	70 74	
93	24 9176	22 92	44 13 2	70 74	
94	25 1468	22 92	44 45 6	70 74	
95	25 3760	22 93	45 18 0	70 77	
51,96	0,925 6053	22 93	46 45 50 4	70 77	
97	25 8346	22 94	46 22 8	70 80	
98	26 0640	22 94	46 55 2	70 80	
99	26 2934	22 95	47 27 6	70 83	
52,00	26 5229		48 00 0		

N. E.		Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.		
$k=52°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=52°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
52,00	0,926 5229	22 95	46 48 00 0	70 83	52,50	0,938 0445	23 14	47 15 00 0	71 42
52,01	0,926 7524	22 95	46 48 32 4	70 83	52,51	0,938 2759	23 15	47 15 32 4	71 45
02	26 9819	22 95	49 04 8	70 83	52	38 5074	23 15	16 04 8	71 45
03	27 2114	22 96	49 37 2	70 86	53	38 7389	23 15	16 37 2	71 45
04	27 4410	22 97	50 09 6	70 90	54	38 9704	23 16	17 09 6	71 48
05	27 6707	22 96	50 42 0	70 86	55	39 2020	23 16	17 42 0	71 48
52,06	0,927 9003	22 98	46 51 14 4	70 39	52,56	0,939 4336	23 17	47 18 14 4	71 51
07	28 1301	22 97	51 46 8	70 90	57	39 6653	23 17	18 46 8	71 51
08	28 3598	22 98	52 19 2	70 93	58	39 8970	23 18	19 19 2	71 54
09	28 5896	22 98	52 51 6	70 93	59	40 1288	23 17	19 51 6	71 51
10	28 8194	22 99	53 24 0	70 96	60	40 3605	23 19	20 24 0	71 57
52,11	0,929 0493	22 99	46 53 56 4	70 96	52,61	0,940 5924	23 18	47 20 56 4	71 54
12	29 2792	23 00	54 28 8	70 99	62	40 8242	23 19	21 28 8	71 57
13	29 5092	23 00	55 01 2	70 99	63	41 0561	23 20	22 01 2	71 60
14	29 7392	23 00	55 33 6	70 99	64	41 2881	23 19	22 33 6	71 57
15	29 9692	23 01	56 06 0	71 02	65	41 5200	23 21	23 06 0	71 64
52,16	0,930 1993	23 01	46 56 38 4	71 02	52,66	0,941 7521	23 20	47 23 38 4	71 60
17	30 4294	23 01	57 10 8	71 02	67	41 9841	23 21	24 10 8	71 64
18	30 6595	23 02	57 43 2	71 05	68	42 2162	23 22	24 43 2	71 67
19	30 8897	23 02	58 15 6	71 05	69	42 4484	23 21	25 15 6	71 64
20	31 1199	23 02	58 48 0	71 05	70	42 6805	23 23	25 48 0	71 70
52,21	0,931 3501	23 03	46 59 20 4	71 08	52,71	0,942 9128	23 22	47 26 20 4	71 67
22	31 5804	23 04	46 59 52 8	71 11	72	43 1450	23 23	26 52 8	71 70
23	31 8108	23 03	47 00 25 2	71 08	73	43 3773	23 23	27 25 2	71 70
24	32 0411	23 04	00 57 6	71 11	74	43 6096	23 24	27 57 6	71 73
25	32 2715	23 05	01 30 0	71 14	75	43 8420	23 24	28 30 0	71 73
52,26	0,932 5020	23 05	47 02 02 4	71 14	52,76	0,944 0744	23 25	47 29 02 4	71 76
27	32 7325	23 05	02 34 8	71 14	77	44 3069	23 25	29 34 8	71 76
28	32 9630	23 06	03 07 2	71 17	78	44 5394	23 25	30 07 2	71 76
29	33 1936	23 06	03 39 6	71 17	79	44 7719	23 26	30 39 6	71 79
30	33 4242	23 06	04 12 0	71 17	80	45 0045	23 26	31 12 0	71 79
52,31	0,933 6548	23 07	47 04 44 4	71 20	52,81	0,945 2371	23 27	47 31 44 4	71 82
32	33 8855	23 07	05 16 8	71 20	82	45 4698	23 27	32 16 8	71 82
33	34 1162	23 08	05 49 2	71 23	83	45 7025	23 27	32 49 2	71 82
34	34 3470	23 08	06 21 6	71 23	84	45 9352	23 28	33 21 6	71 85
35	34 5778	23 08	06 54 0	71 23	85	46 1680	23 28	33 54 0	71 85
52,36	0,934 8086	23 09	47 07 26 4	71 27	52,86	0,946 4008	23 29	47 34 26 4	71 88
37	35 0395	23 09	07 58 8	71 27	87	46 6337	23 29	34 58 8	71 88
38	35 2704	23 10	08 31 2	71 30	88	46 8666	23 29	35 31 2	71 88
39	35 5014	23 10	09 03 6	71 30	89	47 0995	23 30	36 03 6	71 91
40	35 7324	23 10	09 36 0	71 30	90	47 3325	23 30	36 36 0	71 91
52,41	0,935 9634	23 11	47 10 08 4	71 33	52,91	0,947 5655	23 30	47 37 08 4	71 91
42	36 1945	23 11	10 40 8	71 33	92	47 7985	23 31	37 40 8	71 94
43	36 4256	23 12	11 13 2	71 36	93	48 0316	23 32	38 13 2	71 98
44	36 6568	23 11	11 45 6	71 33	94	48 2648	23 31	38 45 6	71 94
45	36 8879	23 13	12 18 0	71 39	95	48 4979	23 33	39 18 0	72 01
52,46	0,937 1192	23 12	47 12 50 4	71 36	52,96	0,948 7312	23 32	47 39 50 4	71 98
47	37 3504	23 13	13 22 8	71 39	97	48 9644	23 33	40 22 8	72 01
48	37 5817	23 14	13 55 2	71 42	98	49 1977	23 34	40 55 2	72 04
49	37 8131	23 14	14 27 6	71 42	99	49 4311	23 33	41 27 6	72 01
50	38 0445		15 00 0		53,00	49 0644		42 00 0	

N. E.		Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.		
$k=53^\circ$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=53^\mathfrak{g}$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
53,00	0,949 664	23 35	47 42 00 0	72 07	53,50	0,961 3851	23 55	48 09 00 0	72 69
53,01	0,949 8979	23 34	47 42 32 4	72 04	53,51	0,961 6206	23 55	48 09 32 4	72 69
02	50 1313	23 35	43 04 8	72 07	52	61 8561	23 55	10 04 8	72 69
03	50 3648	23 35	43 37 2	72 07	53	62 0916	23 56	10 37 2	72 72
04	50 5983	23 36	44 09 6	72 10	54	62 3272	23 56	11 00 6	72 72
05	50 8319	23 36	44 42 0	72 10	55	62 5628	23 57	11 42 0	72 75
53,06	0,951 0655	23 37	47 45 14 4	72 13	53,56	0,962 7985	23 57	48 12 14 4	72 75
07	51 2992	23 37	45 46 8	72 13	57	63 0342	23 57	12 46 8	72 75
08	51 5329	23 37	46 19 2	72 13	58	63 2699	23 58	13 19 2	72 78
09	51 7666	23 38	46 51 6	72 16	59	63 5057	23 58	13 51 6	72 78
10	52 0004	23 38	47 24 0	72 16	60	63 7415	23 59	14 24 0	72 81
53,11	0,952 2342	23 39	47 47 56 4	72 19	53,61	0,963 9774	23 59	48 14 56 4	72 81
12	52 4681	23 39	48 28 8	72 19	62	64 2133	23 60	15 28 8	72 84
13	52 7020	23 39	49 01 2	72 19	63	64 4493	23 60	16 01 2	72 84
14	52 9359	23 40	49 33 6	72 22	64	64 6853	23 60	16 33 6	72 84
15	53 1699	23 41	50 06 0	72 25	65	64 9213	23 61	17 06 0	72 87
53,16	0,953 4040	23 40	47 50 38 4	72 22	53,66	0,965 1574	23 61	48 17 38 4	72 87
17	53 6380	23 41	51 10 8	72 25	67	65 3935	23 62	18 10 8	72 90
18	53 8721	23 42	51 43 2	72 28	68	65 6297	23 62	18 43 2	72 90
19	54 1063	23 42	52 15 6	72 28	69	65 8659	23 62	19 15 6	72 90
20	54 3405	23 42	52 48 0	72 28	70	66 1021	23 63	19 48 0	72 93
53,21	0,954 5747	23 43	47 53 20 4	72 31	53,71	0,966 3384	23 63	48 20 20 4	72 93
22	54 8090	23 43	53 52 8	72 31	72	66 5747	23 64	20 52 8	72 96
23	55 0433	23 43	54 25 2	72 31	73	66 8111	23 64	21 25 2	72 96
24	55 2776	23 44	54 57 6	72 35	74	67 0475	23 65	21 57 6	72 99
25	55 5120	23 44	55 30 0	72 35	75	67 2840	23 65	22 30 0	72 99
53,26	0,955 7464	23 45	47 56 02 4	72 38	53,76	0,967 5205	23 65	48 23 02 4	72 99
27	55 9809	23 45	56 34 8	72 38	77	67 7570	23 66	23 34 8	73 02
28	56 2154	23 46	57 07 2	72 41	78	67 9936	23 66	24 07 2	73 02
29	56 4500	23 46	57 39 6	72 41	79	68 2302	23 67	24 39 6	73 06
30	56 6846	23 46	58 12 0	72 41	80	68 4669	23 67	25 12 0	73 06
53,31	0,956 9192	23 47	47 58 44 4	72 44	53,81	0,968 7036	23 67	48 25 44 4	73 06
32	57 1539	23 47	59 16 8	72 44	82	68 9403	23 68	26 16 8	73 09
33	57 3886	23 48	47 59 49 2	72 47	83	69 1771	23 69	26 49 2	73 12
34	57 6234	23 48	48 00 21 6	72 47	84	69 4140	23 68	27 21 6	73 09
35	57 8582	23 48	00 54 0	72 47	85	69 6508	23 70	27 54 0	73 15
53,36	0,958 0930	23 49	48 01 26 4	72 50	53,86	0,969 8878	23 69	48 28 26 4	73 12
37	58 3279	23 49	01 58 8	72 50	87	70 1247	23 70	28 58 8	73 15
38	58 5628	23 50	02 31 2	72 53	88	70 3617	23 70	29 31 2	73 15
39	58 7978	23 50	03 03 6	72 53	89	70 5988	23 70	30 03 6	73 15
40	59 0328	23 50	03 36 0	72 53	90	70 8358	23 72	30 36 0	73 21
53,41	0,959 2678	23 51	48 04 08 4	72 56	53,91	0,971 0730	23 71	48 31 08 4	73 18
42	59 5029	23 52	04 40 8	72 59	92	71 3101	23 72	31 40 8	73 21
43	59 7381	23 51	05 13 2	72 56	93	71 5473	23 73	32 13 2	73 24
44	59 9732	23 52	05 45 6	72 59	94	71 7846	23 73	32 45 6	73 24
45	60 2084	23 53	06 18 0	72 62	95	72 0219	23 73	33 18 0	73 24
53,46	0,960 4437	23 53	48 06 50 4	72 62	53,96	0,972 2592	23 74	48 33 50 4	73 27
47	60 6790	23 53	07 22 8	72 62	97	72 4966	23 74	34 22 8	73 27
48	60 9143	23 54	07 55 2	72 65	98	72 7340	23 75	34 55 2	73 30
49	61 1497	23 54	08 27 6	72 65	99	72 9715	23 75	35 27 6	73 30
50	61 3851		09 00 0		54,00	73 2090		36 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=54°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
54,00	0,973 2090	23 75	48 36 00 0	62 30	
54,01	0,973 4465	23 76	48 36 32 4	62 33	
02	73 6841	23 77	37 04 8	62 36	
03	73 9218	23 76	37 37 2	62 33	
04	74 1594	23 78	38 09 6	62 39	
05	74 3972	23 77	38 42 0	62 36	
54,06	0,974 6349	23 78	48 39 14 4	62 39	
07	74 8727	23 79	39 46 8	62 43	
08	75 1106	23 79	40 19 2	62 43	
09	75 3485	23 79	40 51 6	63 43	
10	75 5846	23 80	41 24 0	62 46	
54,11	0,975 8244	23 80	48 41 56 4	63 46	
12	76 0624	23 80	42 28 8	63 46	
13	76 3004	23 81	43 01 2	63 49	
14	76 5385	23 82	43 33 6	63 52	
15	76 7767	23 82	44 06 0	63 52	
54,16	0,977 0149	23 82	48 44 38 4	63 52	
17	77 2531	23 83	45 10 8	63 55	
18	77 4914	23 83	45 43 2	63 55	
19	77 7297	23 83	46 15 6	63 55	
20	77 9680	23 84	46 48 0	63 58	
54,21	0,978 2064	23 85	48 47 20 4	63 61	
22	78 4449	23 85	47 52 8	63 61	
23	78 6834	23 85	48 25 2	63 61	
24	78 9219	23 86	48 57 6	63 64	
25	79 1605	23 86	49 30 0	63 64	
54,26	0,979 3991	22 86	48 50 02 4	63 64	
27	79 6377	23 87	50 34 8	63 67	
28	79 8764	23 88	51 07 2	63 70	
29	80 1152	23 88	51 39 6	63 70	
30	80 3540	23 88	52 12 0	63 70	
54,31	0,980 5928	23 89	48 52 44 4	63 73	
32	80 8317	23 89	53 16 8	63 73	
33	81 0706	23 89	53 49 2	63 73	
34	81 3095	23 90	54 21 6	63 77	
35	81 5485	23 91	54 54 0	63 80	
54,36	0,981 7876	23 91	48 55 26 4	63 80	
37	82 0267	23 91	55 58 8	63 80	
38	82 2658	23 92	56 31 2	63 83	
39	82 5050	23 92	57 03 6	63 83	
40	82 7442	23 92	57 36 0	63 83	
54,41	0,982 9834	23 93	48 58 08 4	63 86	
42	83 2227	23 94	58 40 8	63 89	
43	83 4621	23 94	59 13 2	63 89	
44	83 7015	23 94	48 59 45 6	63 89	
45	83 9409	23 95	49 00 18 0	63 92	
54,46	0,984 1804	23 95	49 00 50 4	63 92	
47	84 4199	23 95	01 22 8	63 92	
48	84 6594	23 96	01 55 2	63 95	
49	84 8990	23 97	02 27 6	63 98	
50	85 1387		03 00 0		

N. E		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=54°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
54,50	0,985 1387	23 97	49 03 00 0	73 98	
54,51	0,985 3784	23 97	49 03 32 4	73 98	
52	85 6181	23 98	04 04 8	74 01	
53	85 8579	23 98	04 37 2	74 01	
54	86 0977	23 99	05 09 6	74 04	
55	86 3376	23 99	05 42 0	74 04	
54,56	0,986 5775	23 99	49 06 14 4	74 04	
57	86 8174	24 00	06 46 8	74 07	
58	87 0574	24 01	07 19 2	74 10	
59	87 2975	24 01	07 51 6	74 10	
60	87 5376	24 01	08 24 0	74 10	
54,61	0,987 7777	24 02	49 08 56 4	74 14	
62	88 0179	24 02	09 28 8	74 14	
63	88 2581	24 02	10 01 2	74 14	
64	88 4983	24 03	10 33 6	74 17	
65	88 7386	24 04	11 06 0	74 20	
54,66	0,988 9790	24 04	49 11 38 4	74 20	
67	89 2194	24 04	12 10 8	74 20	
68	89 4598	24 05	12 43 2	74 23	
69	89 7003	24 05	13 15 6	74 23	
70	89 9408	24 06	13 48 0	74 26	
54,71	0,990 1814	24 06	49 14 20 4	74 26	
72	90 4220	24 06	14 52 8	74 26	
73	90 6626	24 07	15 25 2	74 29	
74	90 9033	24 07	15 57 6	74 29	
75	91 1440	24 08	16 30 0	74 32	
54,76	0,991 3848	24 09	49 17 02 4	74 35	
77	91 6257	24 08	17 34 8	74 32	
78	91 8665	24 09	18 07 2	74 35	
79	92 1074	24 10	18 39 6	74 38	
80	92 3484	24 10	19 12 0	74 38	
54,81	0,992 5894	24 11	49 19 44 4	74 41	
82	92 8305	24 11	20 16 8	74 41	
83	93 0716	24 11	20 49 2	74 41	
84	93 3127	24 12	21 21 6	74 44	
85	93 5539	24 12	21 54 0	74 44	
54,86	0,993 7951	24 13	49 22 26 4	74 48	
87	94 0364	24 13	22 58 8	74 48	
88	94 2777	24 13	23 31 2	74 48	
89	94 5190	24 14	24 03 6	74 51	
90	94 7604	24 15	24 36 0	74 54	
54,91	0,995 0019	24 15	49 25 08 4	74 54	
92	95 2434	24 15	25 40 8	74 54	
93	95 4849	24 16	26 13 2	74 57	
94	95 7265	24 16	26 45 6	74 57	
95	95 9681	24 17	27 18 0	74 60	
54,96	0,996 2098	24 17	49 27 50 4	74 60	
97	96 4515	24 17	28 22 8	74 60	
98	96 6932	24 18	28 55 2	74 63	
99	96 9350	24 19	29 27 6	74 66	
55,00	97 1769		30 00 0		

N. E. $k=55°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Eith. D. 1″.	Gr. M. S.	D. 1″.
Gr. M.				
55,00	0,997 1769	24 19	49 30 00 0	74 66
55,01	0,997 4188	24 19	49 30 32 4	74 66
02	97 6607	24 20	31 04 8	74 69
03	97 9027	24 20	31 37 2	74 69
04	98 1447	24 21	32 09 6	74 72
05	98 3868	24 21	32 42 0	74 72
55,06	0,998 6289	24 21	49 33 14 4	74 72
07	98 8710	24 22	33 46 8	74 75
08	99 1132	24 23	34 19 2	74 78
09	99 3555	24 23	34 51 6	74 78
10	99 5978	24 23	35 24 0	74 78
55,11	0,999 8401	24 24	49 35 56 4	74 81
12	1,000 0825	24 24	36 28 8	74 81
13	00 3249	24 25	37 01 2	74 85
14	00 5674	24 25	37 33 6	74 85
15	00 8099	24 25	38 06 0	74 85
55,16	1,001 0524	24 27	49 38 38 4	74 91
17	01 2951	24 26	39 10 8	74 88
18	01 5377	24 27	39 43 2	74 91
19	01 7804	24 27	40 15 6	74 91
20	02 0231	24 28	40 48 0	74 94
55,21	1,002 2659	24 28	49 41 20 4	74 94
22	02 5087	24 29	41 52 8	74 97
23	02 7516	24 29	42 25 2	74 97
24	02 9945	24 30	42 57 6	75 00
25	03 2375	24 30	43 30 0	75 00
55,26	1,003 4805	24 31	49 44 02 4	75 03
27	03 7236	24 31	44 34 8	75 03
28	03 9667	24 31	45 07 2	75 03
29	04 2098	24 32	45 39 6	75 06
30	04 4530	24 32	46 12 0	75 06
55,31	1,004 6962	24 33	49 46 44 4	75 09
32	04 9395	24 33	47 16 8	75 09
33	05 1828	24 34	47 49 2	75 12
34	05 4262	24 34	48 21 6	75 12
35	05 6696	24 35	48 54 0	75 15
55,36	1,005 9131	24 35	49 49 26 4	75 15
37	06 1566	24 35	49 58 8	75 15
38	06 4001	24 36	50 31 2	75 18
39	06 6437	24 37	51 03 6	75 22
40	06 8874	24 36	51 36 0	75 18
55,41	1,007 1310	24 38	49 52 08 4	75 25
42	07 3748	24 38	52 40 8	75 25
43	07 6186	24 38	53 13 2	75 25
44	07 8624	24 38	53 45 6	75 25
45	08 1062	24 40	54 18 0	75 31
55,46	1,008 3502	24 39	49 54 50 4	75 28
47	08 5941	24 40	55 22 8	75 31
48	08 8381	24 41	55 55 2	75 34
49	09 0822	24 41	56 27 6	75 34
50	09 3263		57 00 0	

N. E. $k=55°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Eith. D. 1″.	Gr. M. S.	D. 1″.
Gr. M.				
55,50	1,009 3263	24 41	49 57 00 0	75 34
55,51	1,009 5704	24 42	49 57 32 4	75 37
52	09 8146	24 42	58 04 8	75 37
53	10 0588	24 43	58 37 2	75 40
54	10 3031	24 43	59 09 6	75 40
55	10 5474	24 44	49 59 42 0	75 43
55,56	1,010 7918	24 44	50 00 14 4	75 43
57	11 0362	24 45	00 46 8	75 46
58	11 2807	24 45	01 19 2	75 46
59	11 5252	24 45	01 51 6	75 46
60	11 7697	24 46	02 24 0	75 49
55,61	1,012 0143	24 47	50 02 56 4	75 52
62	12 2590	24 47	03 28 8	75 52
63	12 5037	24 47	04 01 2	75 52
64	12 7484	24 48	04 33 6	75 56
65	12 9932	24 48	05 06 0	75 56
55,66	1,013 2380	24 49	50 05 38 4	75 59
67	13 4829	24 49	06 10 8	75 59
68	13 7278	24 50	06 43 2	75 62
69	13 9728	24 50	07 15 6	75 62
70	14 2178	24 51	07 48 0	75 65
55,71	1,014 4629	24 51	50 08 20 4	75 65
72	14 7080	24 51	08 52 8	75 65
73	14 9531	24 52	09 25 2	75 68
74	15 1983	24 53	09 57 6	75 71
75	15 4436	24 52	10 30 0	75 68
55,76	1,015 6888	24 54	50 11 02 4	75 74
77	15 9342	24 54	11 34 8	75 74
78	16 1796	24 54	12 07 2	75 74
79	16 4250	24 55	12 39 6	75 77
80	16 6705	24 55	13 12 0	75 77
55,81	1,016 9160	24 56	50 13 44 4	75 80
82	17 1616	24 56	14 16 8	75 80
83	17 4072	24 56	14 49 2	75 80
84	17 6528	24 57	15 21 6	75 83
85	17 8985	24 58	15 54 0	75 83
55,86	1,018 1443	24 58	50 16 26 4	75 86
87	18 3901	24 58	16 58 8	75 86
88	18 6359	24 59	17 31 2	75 89
89	18 8818	24 60	18 03 6	75 93
90	19 1278	24 60	18 36 0	75 93
55,91	1,019 3737	24 61	50 19 08 4	75 96
92	19 6198	24 60	19 40 8	75 93
93	19 8658	24 62	20 13 2	75 99
94	20 1120	24 61	20 45 6	75 96
95	20 3581	24 63	21 18 0	76 02
55,96	1,020 6044	24 62	50 21 50 4	75 99
97	20 8506	24 63	22 22 8	76 02
98	21 0969	24 64	22 55 2	76 05
99	21 3433	24 64	23 27 6	76 05
56,00	21 5897		24 00 0	

N. E.		Alte Einth.		Alte Einth.	
$k=56°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	D. 1″.		
Gr. M.			Gr. M. S.		
56,00	1,021 5897	24 65	50 24 00 0	76 08	
56,01	1,021 8362	24 65	50 24 32 4	76 08	
02	22 0827	24 65	25 04 8	76 08	
03	22 3292	24 66	25 37 2	76 11	
04	22 5758	24 66	26 09 6	76 11	
05	22 8224	24 67	26 42 0	76 14	
56,06	1,023 0691	24 68	50 27 14 4	76 17	
07	23 3159	24 67	27 46 8	76 14	
08	23 5626	24 69	28 19 2	76 20	
09	23 8095	24 68	28 51 6	76 17	
10	24 0563	24 70	29 24 0	76 23	
56,11	1,024 3033	24 69	50 29 56 4	76 20	
12	24 5502	24 71	30 28 8	76 26	
13	24 7973	24 70	31 01 2	76 23	
14	25 0443	24 71	31 33 6	76 26	
15	25 2914	24 72	32 06 0	76 30	
56,16	1,025 5386	24 72	50 32 38 4	76 30	
17	25 7858	24 72	33 10 8	76 30	
18	26 0330	24 73	33 43 2	76 33	
19	26 2803	24 74	34 15 6	76 36	
20	26 5277	24 74	34 48 0	76 36	
56,21	1,026 7751	24 74	50 35 20 4	76 36	
22	27 0225	24 75	35 52 8	76 39	
23	27 2700	24 75	36 25 2	76 39	
24	27 5175	24 76	36 57 6	76 42	
25	27 7651	24 76	37 30 0	76 42	
56,26	1,028 0127	24 77	50 38 02 4	76 45	
27	28 2604	24 77	38 34 8	76 45	
28	28 5081	24 78	39 07 2	76 48	
29	28 7559	24 78	39 39 6	76 48	
30	29 0037	24 79	40 12 0	76 51	
56,31	1,029 2516	24 79	50 40 44 4	76 51	
32	29 4995	24 80	41 16 8	76 54	
33	29 7475	24 80	41 49 2	76 54	
34	29 9955	24 80	42 21 6	76 54	
35	30 2435	24 81	42 54 0	76 57	
56,36	1,030 4916	24 82	50 43 26 4	76 60	
37	30 7398	24 82	43 58 8	76 60	
38	30 9880	24 83	44 31 2	76 64	
39	31 2363	24 83	45 03 6	76 64	
40	31 4846	24 83	45 36 0	76 64	
56,41	1,031 7329	24 84	50 46 08 4	76 67	
42	31 9813	24 84	46 40 8	76 67	
43	32 2297	24 85	47 13 2	76 70	
44	32 4782	24 86	47 45 6	76 73	
45	32 7268	24 85	48 18 0	76 70	
56,46	1,032 9753	24 87	50 48 50 4	76 76	
47	33 2240	24 86	49 22 8	76 76	
48	33 4726	24 88	49 55 2	76 79	
49	33 7214	24 87	50 27 6	76 76	
50	33 9701		51 00 0		

N. E.		Alte Einth.		Alte Einth.	
$k=56°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	D. 1″.		
Gr. M.			Gr. M. S.		
56,50	1,033 9701	24 89	50 51 00 0	76 82	
56,51	1,034 2190	24 88	50 51 32 4	76 79	
52	34 4678	24 90	52 04 8	76 85	
53	34 7168	24 89	52 37 2	76 82	
54	34 9657	24 90	53 09 6	76 85	
55	35 2147	24 91	53 42 0	76 88	
56,56	1,035 4638	24 91	50 54 14 4	76 88	
57	35 7129	24 92	54 46 8	76 91	
58	35 9621	24 92	55 19 2	76 91	
59	36 2113	24 92	55 51 6	76 91	
60	36 4605	24 93	56 24 0	76 94	
56,61	1,036 7098	24 94	50 56 56 4	76 97	
62	36 9592	24 94	57 28 8	76 97	
63	37 2086	24 94	58 01 2	76 97	
64	37 4580	24 95	58 33 6	77 01	
65	37 7075	24 96	59 06 0	77 04	
56,66	1,037 9571	24 96	50 59 38 4	77 04	
67	38 2067	24 96	51 00 10 8	77 04	
68	38 4563	24 97	00 43 2	77 07	
69	38 7060	24 97	01 15 6	77 07	
70	38 9557	24 98	01 48 0	77 10	
56,71	1,039 2055	24 99	51 02 20 4	77 13	
72	39 4554	24 98	02 52 8	77 10	
73	39 7052	25 00	03 25 2	77 16	
74	39 9552	25 00	03 57 6	77 16	
75	40 2052	25 00	04 30 0	77 16	
56,76	1,040 4552	25 01	51 05 02 4	77 19	
77	40 7053	25 01	05 34 8	77 19	
78	40 9554	25 02	06 07 2	77 22	
79	41 2056	25 02	06 39 6	77 22	
80	41 4558	25 03	07 12 0	77 25	
56,81	1,041 7061	25 03	51 07 44 4	77 25	
82	41 9564	25 04	08 16 8	77 28	
83	42 2068	25 04	08 49 2	77 28	
84	42 4572	25 05	09 21 6	77 31	
85	42 7077	25 05	09 54 0	77 31	
56,86	1,042 9582	25 06	51 10 26 4	77 35	
87	43 2088	25 06	10 58 8	77 35	
88	43 4594	25 06	11 31 2	77 35	
89	43 7100	25 07	12 03 6	77 38	
90	43 9607	25 08	12 36 0	77 41	
56,91	1,044 2115	25 08	51 13 08 4	77 41	
92	44 4623	25 09	13 40 8	77 44	
93	44 7132	25 09	14 13 2	77 44	
94	44 9641	25 10	14 45 6	77 47	
95	45 2151	25 10	15 18 0	77 47	
56,96	1,045 4661	25 10	51 15 50 4	77 47	
97	45 7171	25 11	16 22 8	77 50	
98	45 9682	25 12	16 55 2	77 53	
99	46 2194	25 12	17 27 6	77 53	
57,00	46 4706		18 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.				
$k=57°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.				D. 1″.
Gr. M.				Gr. M. S.					
57,00	1,046 4706	25	12	51	18	00 0	77	53	
57,01	1,046 7218	25	14	51	18	32 4	77	59	
02	46 9732	25	13		19	04 8	77	56	
03	47 2245	25	14		19	37 2	77	59	
04	47 4759	25	15		20	09 6	77	62	
05	47 7274	25	15		20	42 0	77	62	
57,06	1,047 9789	25	15	51	21	14 4	77	62	
07	48 2304	25	16		21	46 8	77	65	
08	48 4820	25	17		22	19 2	77	69	
09	48 7337	25	16		22	51 6	77	65	
10	48 9853	25	18		23	24 0	77	72	
57,11	1,049 2371	25	18	51	23	56 4	77	72	
12	49 4889	25	18		24	28 8	77	72	
13	49 7407	25	19		25	01 2	77	75	
14	49 9926	25	20		25	33 6	77	78	
15	50 2446	25	20		26	06 0	77	78	
57,16	1,050 4966	25	20	51	26	38 4	77	78	
17	50 7486	25	21		27	10 8	77	81	
18	51 0007	25	22		27	43 2	77	84	
19	51 2529	25	22		28	15 6	77	84	
20	51 5051	25	22		28	48 0	77	84	
57,21	1,051 7573	25	23	51	29	20 4	77	87	
22	52 0096	25	24		29	52 8	77	90	
23	52 2620	25	24		30	25 2	77	90	
24	52 5144	25	24		30	57 6	77	90	
25	52 7668	25	25		31	30 0	77	93	
57,26	1,053 0193	25	25	51	32	02 4	77	93	
27	53 2718	25	26		32	34 8	77	96	
28	53 5244	25	27		33	07 2	77	99	
29	53 7771	25	27		33	39 6	77	99	
30	54 0298	25	27		34	12 0	77	99	
57,31	1,054 2825	25	28	51	34	44 4	78	02	
32	54 5353	25	29		35	16 8	78	06	
33	54 7882	25	29		35	49 2	78	06	
34	55 0411	25	29		36	21 6	78	06	
35	55 2940	25	30		36	54 0	78	09	
57,36	1,055 5470	25	30	51	37	26 4	78	09	
37	55 8000	25	31		37	58 8	78	12	
38	56 0531	25	32		38	31 2	78	15	
39	56 3063	25	32		39	03 6	78	15	
40	56 5595	25	32		39	36 0	78	15	
57,41	1,056 8127	25	33	51	40	08 4	78	18	
42	57 0660	25	34		40	40 8	78	21	
43	57 3194	25	34		41	13 2	78	21	
44	57 5728	25	34		41	45 6	78	21	
45	57 8262	25	35		42	18 0	78	24	
57,46	1,058 0797	25	35	51	42	50 4	78	24	
47	58 3332	25	36		43	22 8	78	27	
48	58 5868	25	37		43	55 2	78	30	
49	58 8405	25	37		44	27 6	78	30	
50	59 0942				45	00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.				
$k=57°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.				D. 1″.
Gr. M.				Gr. M. S.					
57,50	1,059 0942	25	37	51	45	00 0	78	30	
57,51	1,059 3479	25	38	51	45	32 4	78	33	
52	59 6017	25	39		46	04 8	78	36	
53	59 8556	25	39		46	37 2	78	36	
54	60 1095	25	39		47	09 6	78	36	
55	60 3634	25	40		47	42 0	78	39	
57,56	1,060 6174	25	41	51	48	14 4	78	43	
57	60 8715	25	41		48	46 8	78	43	
58	61 1256	25	42		49	19 2	78	46	
59	61 3798	25	42		49	51 6	78	46	
60	61 6340	25	42		50	24 0	78	46	
57,61	1,061 8882	25	43	51	50	56 4	78	49	
62	62 1425	25	44		51	28 8	78	52	
63	62 3969	25	44		52	01 2	78	52	
64	62 6513	25	45		52	33 6	78	55	
65	62 9058	25	45		53	06 0	78	55	
57,66	1,063 1603	25	45	51	53	38 4	78	55	
67	63 4148	25	47		54	10 8	78	61	
68	63 6695	25	46		54	43 2	78	58	
69	63 9241	25	48		55	15 6	78	64	
70	64 1789	25	47		55	48 0	78	61	
57,71	1,064 4336	25	48	51	56	20 4	78	64	
72	64 6884	25	49		56	52 8	78	67	
73	64 9433	25	49		57	25 2	78	67	
74	65 1982	25	50		57	57 6	78	70	
75	65 4532	25	50		58	30 0	78	70	
57,76	1,065 7082	25	51	51	59	02 4	78	73	
77	65 9633	25	51	51	59	34 8	78	73	
78	66 2184	25	52	52	00	07 2	78	77	
79	66 4736	25	52		00	39 6	78	77	
80	66 7288	25	53		01	12 0	78	80	
57,81	1,066 9841	25	53	52	01	44 4	78	80	
82	67 2394	25	54		02	16 8	78	83	
83	67 4948	25	54		02	49 2	78	83	
84	67 7502	25	55		03	21 6	78	86	
85	68 0057	25	56		03	54 0	78	89	
57,86	1,068 2613	25	56	52	04	26 4	78	89	
87	68 5169	25	56		04	58 8	78	89	
88	68 7725	25	57		05	31 2	78	92	
89	69 0282	25	57		06	03 6	78	92	
90	69 2839	25	58		06	36 0	78	95	
57,91	1,069 5397	25	59	52	07	08 4	78	98	
92	69 7956	25	59		07	40 8	78	98	
93	70 0515	25	59		08	13 2	78	98	
94	70 3074	25	60		08	45 6	79	01	
95	70 5634	25	61		09	18 0	79	04	
57,96	1,070 8195	25	61	52	09	50 4	79	04	
97	71 0756	25	61		10	22 8	79	04	
98	71 3317	25	62		10	55 2	79	07	
99	71 5879	25	63		11	27 6	79	10	
58,00	71 8442				12	00 0			

N. E.			Alte Einth.	
$k=58°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
58,00	1,071 8442	25 63	52 12 00 0	79 10
58,01	1,072 1005	25 64	52 12 32 4	79 14
02	72 3569	25 64	13 04 8	79 14
03	72 6133	25 65	13 37 2	79 17
04	72 8698	25 65	14 09 6	79 17
05	73 1263	25 65	14 42 0	79 17
58,06	1,073 3828	25 67	52 15 14 4	79 23
07	73 6395	25 66	15 46 8	79 20
08	73 8961	25 68	16 19 2	79 26
09	74 1529	25 68	16 51 6	79 26
10	74 4097	25 68	17 24 0	79 26
58,11	1,074 6665	25 69	52 17 56 4	79 29
12	74 9234	25 69	18 28 8	79 29
13	75 1803	25 70	19 01 2	79 32
14	75 4373	25 70	19 33 6	79 32
15	75 6943	25 71	20 06 0	79 35
58,16	1,075 9514	25 72	52 20 38 4	79 38
17	76 2086	25 72	21 10 8	79 38
18	76 4658	25 72	21 43 2	79 38
19	76 7230	25 73	22 15 6	79 41
20	76 9803	25 74	22 48 0	79 44
58,21	1,077 2377	25 74	52 23 20 4	79 44
22	77 4951	25 75	23 52 8	79 48
23	77 7526	25 75	24 25 2	79 48
24	78 0101	25 75	24 57 6	79 48
25	78 2676	25 77	25 30 0	79 54
58,26	1,078 5253	25 76	52 26 02 4	79 51
27	78 7829	25 77	26 34 8	79 54
28	79 0406	25 78	27 07 2	79 57
29	79 2984	25 79	27 39 6	79 60
30	79 5563	25 78	28 12 0	79 57
58,31	1,079 8141	25 80	52 28 44 4	79 63
32	80 0721	25 80	29 16 8	79 63
33	80 3301	25 80	29 49 2	79 63
34	80 5881	25 81	30 21 6	79 66
35	80 8462	25 81	30 54 0	79 66
58,36	1,081 1043	25 82	52 31 26 4	79 69
37	81 3625	25 83	31 58 8	79 72
38	81 6208	25 83	32 31 2	79 72
39	81 8791	25 84	33 03 6	79 75
40	82 1375	25 84	33 36 0	79 75
58,41	1,082 3959	25 84	52 34 08 4	79 75
42	82 6543	25 85	34 40 8	79 78
43	82 9128	25 86	35 13 2	79 81
44	83 1714	25 86	35 45 6	79 81
45	83 4300	25 87	36 18 0	79 85
58,46	1,083 6887	25 87	52 36 50 4	79 85
47	83 9474	25 88	37 22 8	79 88
48	84 2062	25 89	37 55 2	79 91
49	84 4651	25 88	38 27 6	79 88
50	84 7239		39 00 0	

N. E.			Alte Einth.	
$k=58°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
58,50	1,084 7239	25 90	52 39 00 0	79 94
58,51	1,084 9829	25 90	52 39 32 4	79 94
52	85 2419	25 90	40 04 8	79 94
53	85 5009	25 91	40 37 2	79 97
54	85 7600	25 92	41 09 6	80 00
55	86 0192	25 92	41 42 0	80 00
58,56	1,086 2784	25 93	52 42 14 4	80 03
57	86 5377	25 93	42 46 8	80 03
58	86 7970	25 94	43 19 2	80 06
59	87 0564	25 94	43 51 6	80 06
60	87 3158	25 95	44 24 0	80 09
58,61	1,087 5753	25 95	52 44 56 4	80 09
62	87 8348	25 96	45 28 8	80 12
63	88 0944	25 96	46 01 2	80 12
64	88 3540	25 97	46 33 6	80 15
65	88 6137	25 97	47 06 0	80 15
58,66	1,088 8734	25 98	52 47 38 4	80 19
67	89 1332	25 99	48 10 8	80 22
68	89 3931	25 99	48 43 2	80 22
69	89 6530	26 00	49 15 6	80 25
70	89 9130	26 00	49 48 0	80 25
58,71	1,090 1730	26 00	52 50 20 4	80 25
72	90 4330	26 02	50 52 8	80 31
73	90 6932	26 01	51 25 2	80 28
74	90 9533	26 03	51 57 6	80 34
75	91 2136	26 03	52 30 0	80 34
58,76	1,091 4739	26 03	52 53 02 4	80 34
77	91 7342	26 04	53 34 8	80 37
78	91 9946	26 04	54 07 2	80 37
79	92 2550	26 05	54 39 6	80 40
80	92 5155	26 06	55 12 0	80 43
58,81	1,092 7761	26 06	52 55 44 4	80 43
82	93 0367	26 07	56 16 8	80 46
83	93 2974	26 07	56 49 2	80 46
84	93 5581	26 07	57 21 6	80 46
85	93 8188	26 09	57 54 0	80 52
58,86	1,094 0797	26 08	52 58 26 4	80 49
87	94 3405	26 10	58 58 8	80 56
88	94 6015	26 10	52 59 31 2	80 56
89	94 8625	26 10	53 00 03 6	80 56
90	94 1235	26 11	00 36 0	80 59
58,91	1,095 3846	26 12	53 01 08 4	80 62
92	95 6458	26 12	01 40 8	80 62
93	95 9070	26 12	02 13 2	80 62
94	96 1682	26 13	02 45 6	80 65
95	96 4295	26 14	03 18 0	80 68
58,96	1,096 6909	26 14	53 03 50 4	80 68
97	96 9523	26 15	04 22 8	80 71
98	97 2138	26 16	04 55 2	80 74
99	97 4754	26 16	05 27 6	80 74
59,00	97 7370		06 00 0	

N. E. $k=59°$	$\mathfrak{L}$. k.	Alte Einth. D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
59,00	1,097 7370	26 16	53 06 00 0	80 74
59,01	1,097 9986	26 17	53 06 32 4	80 77
02	98 2603	26 17	07 04 8	80 77
03	98 5220	26 19	07 37 2	80 83
04	98 7839	26 18	08 09 6	80 80
05	99 0457	26 19	08 42 0	80 83
59,06	1,099 3076	26 20	53 09 14 4	80 86
07	99 5696	26 20	09 46 8	80 86
08	1,099 8316	26 21	10 19 2	80 89
09	1,100 0937	26 22	10 51 6	80 93
10	00 3559	26 22	11 24 0	80 93
59,11	1,100 6181	26 22	53 11 56 4	80 93
12	00 8803	26 23	12 28 8	80 96
13	01 1426	26 24	13 01 2	80 99
14	01 4050	26 24	13 33 6	80 99
15	01 6674	26 24	14 06 0	80 99
59,16	1,101 9298	26 26	53 14 38 4	81 05
17	02 1924	26 25	15 10 8	81 02
18	02 4549	26 27	15 43 2	81 08
19	02 7176	26 27	16 15 6	81 08
20	02 9803	26 27	16 48 0	81 08
59,21	1,103 2430	26 28	53 17 20 4	81 11
22	03 5058	26 29	17 52 8	81 14
23	03 7687	26 29	18 25 2	81 14
24	04 0316	26 29	18 57 6	81 14
25	04 2945	26 31	19 30 0	81 20
59,26	1,104 5576	26 30	53 20 02 4	81 17
27	04 8206	26 32	20 34 8	81 23
28	05 0838	26 31	21 07 2	81 20
29	05 3469	26 33	21 39 6	81 27
30	05 6102	26 33	22 12 0	81 27
59,31	1,105 8735	26 33	53 22 44 4	81 27
32	06 1368	26 35	23 16 8	81 33
33	06 4003	26 34	23 49 2	81 30
34	06 6637	26 36	24 21 6	81 36
35	06 9273	26 35	24 54 0	81 33
59,36	1,107 1908	26 37	53 25 26 4	81 39
37	07 4545	26 37	25 58 8	81 39
38	07 7182	26 38	26 31 2	81 42
39	07 9820	26 37	27 03 6	81 39
40	08 2457	26 39	27 36 0	81 45
59,41	1,108 5096	26 39	53 28 08 4	81 45
42	08 7735	26 39	28 40 8	81 45
43	09 0374	26 41	29 13 2	81 51
44	09 3015	26 40	29 45 6	81 48
45	09 5655	26 42	30 18 0	81 54
59,46	1,109 8297	26 42	53 30 50 4	81 54
47	10 0939	26 42	31 22 8	81 54
48	10 3581	26 43	31 55 2	81 57
49	10 6224	26 44	32 27 6	81 60
50	10 8868		33 00 0	

N. E. $k=59°$	$\mathfrak{L}$. k.	Alte Einth. D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
59,50	1,110 8868	26 44	53 33 00 0	81 60
59,51	1,111 1512	26 45	53 33 32 4	81 64
52	11 4157	26 45	34 04 8	81 64
53	11 6802	26 46	34 37 2	81 67
54	11 9448	26 46	35 09 6	81 67
55	12 2094	26 47	35 42 0	81 70
59,56	1,112 4741	26 48	53 36 14 4	81 73
57	12 7389	26 48	36 46 8	81 73
58	13 0037	26 49	37 19 2	81 76
59	13 2686	26 49	37 51 6	81 76
60	13 5335	26 50	38 24 0	81 79
59,61	1,113 7985	26 50	53 38 56 4	81 79
62	14 0635	26 51	39 28 8	81 82
63	14 3286	26 52	40 01 2	81 85
64	14 5938	26 52	40 33 6	81 85
65	14 8590	26 52	41 06 0	81 85
59,66	1,115 1242	26 54	53 41 38 4	81 91
67	15 3896	26 53	42 10 8	81 88
68	15 6549	26 55	42 43 2	81 94
69	15 9204	26 55	43 15 6	81 94
70	16 1859	26 55	43 48 0	81 94
59,71	1,116 4514	26 56	53 44 20 4	81 97
72	16 7170	26 57	44 52 8	82 01
73	16 9827	26 57	45 25 2	82 01
74	17 2484	26 58	45 57 6	82 04
75	17 5142	26 58	46 30 0	82 04
59,76	1,117 7800	26 59	53 47 02 4	82 07
77	18 0459	26 60	47 34 8	82 10
78	18 3119	26 60	48 07 2	82 10
79	18 5779	26 60	48 39 6	82 10
80	18 8439	26 62	49 12 0	82 16
59,81	1,119 1101	26 61	53 49 44 4	82 13
82	19 3762	26 63	50 16 8	82 19
83	19 6425	26 62	50 49 2	82 16
84	19 9087	26 64	51 21 6	82 22
85	20 1751	26 64	51 54 0	82 22
59,86	1,120 4415	26 65	53 52 26 4	82 25
87	20 7080	26 65	52 58 8	82 25
88	20 9745	26 66	53 31 2	82 28
89	21 2411	26 66	54 03 6	82 28
90	21 5077	26 67	54 36 0	82 31
59,91	1,121 7744	26 67	53 55 08 4	82 31
92	22 0411	26 68	55 40 8	82 35
93	22 3079	26 69	56 13 2	82 38
94	22 5748	26 69	56 45 6	82 38
95	22 8417	26 70	57 18 0	82 41
59,96	1,123 1087	26 70	53 57 50 4	82 41
97	23 3757	26 71	58 22 8	82 44
98	23 6428	26 72	58 55 2	82 47
99	23 9100	26 72	53 59 27 6	82 47
60,00	24 1772		54 00 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=60°$	L. k.	D. 1″.		D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			
60,00	1,124 1772	26 73	54 00 00 0	82 50		
60,01	1,124 4445	26 73	54 00 32 4	82 50		
02	24 7118	26 74	01 04 8	82 53		
03	24 9792	26 74	01 37 2	82 53		
04	25 2466	26 75	02 09 6	82 66		
05	25 5141	26 76	02 42 0	82 59		
60,06	1,125 7817	26 76	54 03 14 4	82 59		
07	26 0493	26 77	03 46 8	82 62		
08	26 3170	26 77	04 19 2	82 62		
09	26 5847	26 78	04 51 6	82 65		
10	26 8525	26 79	05 24 0	82 69		
60,11	1,127 1204	26 79	54 05 56 4	82 69		
12	27 3883	26 79	06 28 8	82 69		
13	27 6562	26 80	07 01 2	82 72		
14	27 9242	26 81	07 33 6	82 75		
15	28 1923	26 82	08 06 0	82 78		
60,16	1,128 4605	26 82	54 08 38 4	82 78		
17	28 7287	26 82	09 10 8	82 78		
18	28 9969	26 83	09 43 2	82 81		
19	29 2652	26 84	10 15 6	82 84		
20	29 5336	26 84	10 48 0	82 84		
60,21	1,129 8020	26 85	54 11 20 4	82 87		
22	30 0705	26 86	11 52 8	82 90		
23	30 3391	26 86	12 25 2	82 90		
24	30 6077	26 86	12 57 6	82 90		
25	30 8763	26 88	13 30 0	82 96		
60,26	1,131 1451	26 87	54 14 02 4	82 93		
27	31 4138	26 89	14 34 8	82 99		
28	31 6827	26 89	15 07 2	82 99		
29	31 9516	26 89	15 39 6	82 69		
30	32 2205	26 91	16 12 0	83 06		
60,31	1,132 4896	26 90	54 16 44 4	83 02		
32	32 7586	20 92	17 16 8	83 09		
33	33 0278	26 92	17 49 2	83 09		
34	33 2970	26 92	18 21 6	83 09		
35	33 5662	26 93	18 54 0	83 12		
60,36	1,133 8355	26 94	54 19 26 4	83 15		
37	34 1049	26 94	19 58 8	83 15		
38	34 3743	26 95	20 31 2	83 18		
39	34 6438	26 96	21 03 6	83 21		
40	34 9134	26 96	21 36 0	83 21		
60,41	1,135 1830	26 96	54 22 08 4	83 21		
42	35 4526	26 98	22 40 8	83 27		
43	35 7224	26 97	23 13 2	83 24		
44	35 9921	26 99	23 45 6	83 30		
45	36 2620	26 99	24 18 0	83 30		
60,46	1,136 5319	26 99	54 24 50 4	83 30		
47	36 8018	27 01	25 22 8	83 36		
48	37 0719	27 00	25 55 2	83 33		
49	37 3419	27 02	26 27 6	83 39		
50	37 6121		27 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=60°$	L. k.	D. 1″.		D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			
60,50	1,137 6121	27 02	54 27 00 0	83 39		
60,51	1,137 8823	27 02	54 27 32 4	83 39		
52	38 1525	27 04	28 04 8	83 46		
53	38 4229	27 03	28 37 2	83 43		
54	38 6932	27 05	29 09 6	83 49		
55	38 9637	27 05	29 42 0	83 49		
60,56	1,139 2342	27 05	54 30 14 4	83 49		
57	39 5047	27 06	30 46 8	83 52		
58	39 7753	27 07	31 19 2	83 55		
59	40 0460	27 08	31 51 6	83 58		
60	40 3168	27 07	32 24 0	83 55		
60,61	1,140 5875	27 09	54 32 56 4	83 61		
62	40 8584	27 09	33 28 8	83 61		
63	41 1293	27 10	34 01 2	83 64		
64	41 4003	27 10	34 33 6	83 64		
65	41 6713	27 11	35 06 0	83 67		
60,66	1,141 9424	27 12	54 35 38 4	83 70		
67	42 2136	27 12	36 10 8	83 70		
68	42 4848	27 13	36 43 2	83 73		
69	42 7561	27 13	37 15 6	83 70		
70	43 0274	27 14	37 48 0	83 77		
60,71	1,143 2988	27 14	54 38 20 4	83 77		
72	43 5702	27 16	38 52 8	83 83		
73	43 8418	27 15	39 25 2	83 80		
74	44 1133	27 17	39 57 6	83 96		
75	44 3850	27 17	40 30 0	83 86		
60,76	1,144 6567	27 17	54 41 02 4	83 86		
77	44 9284	27 18	41 34 8	83 89		
78	45 2002	27 19	42 07 2	83 92		
79	45 4721	27 19	42 39 6	83 92		
80	45 7440	27 20	43 12 0	83 95		
60,81	1,146 0160	27 21	54 43 44 4	83 98		
82	46 2881	27 21	44 16 8	83 98		
83	46 5602	27 22	44 49 2	84 01		
84	46 8324	27 22	45 21 6	84 01		
85	47 1046	27 23	45 54 0	84 04		
60,86	1,147 3769	27 24	54 46 26 4	84 07		
87	47 6493	27 24	46 58 8	84 07		
88	47 9217	27 24	47 31 2	84 07		
89	48 1941	27 26	48 03 6	84 14		
90	48 4667	27 26	48 36 0	84 14		
60,91	1,148 7393	27 27	54 49 08 4	84 17		
92	49 0120	27 27	49 40 8	84 17		
93	49 2847	27 28	50 13 2	84 20		
94	49 5575	27 28	50 45 6	84 20		
95	49 8303	27 29	51 18 0	84 23		
60,96	1,150 1032	27 30	54 51 50 4	84 26		
97	50 3762	27 30	52 22 8	84 26		
98	50 6492	27 31	52 55 2	84 29		
99	50 9223	27 31	53 27 6	84 29		
61,00	51 1954		54 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.				
$k=61°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.	$k=61°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr.	M.	S.		Gr. M.				
61,00	1,151 1954	27 33	54	54	00 0	84 35	61,50	1,164 9315	27 63	55	21	00 0	85 28
61,01	1,151 4687	27 32	54	54	32 4	84 32	61,51	1,165 2078	27 63	55	21	32 4	85 28
02	51 7419	27 34		55	04 8	84 38	52	65 4841	27 65		22	04 8	85 31
03	52 0153	27 34		55	37 2	84 38	53	65 7606	27 65		22	37 2	85 34
04	52 2887	27 34		56	09 6	84 38	54	66 0371	27 65		23	09 6	85 34
05	52 5621	27 35		56	42 0	84 41	55	66 3136	27 66		23	42 0	85 37
61,06	1,152 8356	27 36	54	57	14 4	84 44	61,56	1,166 5902	27 67	55	24	14 4	85 40
07	53 1092	27 36		57	46 8	84 44	57	66 8669	27 68		24	46 8	85 43
08	53 3828	27 37		58	19 2	84 48	58	67 1437	27 68		25	19 2	85 43
09	53 6565	27 38		58	51 6	84 51	59	67 4205	27 69		25	51 6	85 46
10	53 9303	27 38		59	24 0	84 51	60	67 6974	27 69		26	24 0	85 46
61,11	1,154 2041	27 39	54	59	56 4	84 54	61,61	1,167 9743	27 70	55	26	56 4	85 49
12	54 4780	27 39	55	00	28 8	84 54	62	68 2513	27 71		27	28 8	85 52
13	54 7519	27 40		01	01 2	84 57	63	68 5284	27 71		28	01 2	85 52
14	55 0259	27 41		01	33 6	84 60	64	68 8055	27 72		28	33 6	85 56
15	55 3000	27 41		02	06 0	84 60	65	69 0827	27 72		29	06 0	85 56
61,16	1,155 5741	27 42	55	02	38 4	88 63	61,66	1,169 3599	27 73	55	29	38 4	85 59
17	55 8483	27 43		03	10 8	84 66	67	69 6372	27 74		30	10 8	85 62
18	56 1226	27 43		03	43 2	84 66	68	69 9146	27 75		30	43 2	85 65
19	56 3969	27 44		04	15 6	84 69	69	70 1921	27 75		31	15 6	85 65
20	56 6713	27 44		04	48 0	84 69	70	70 4696	27 75		31	48 0	8. 65
61,21	1,156 9457	27 45	55	05	20 4	84 72	61,71	1,170 7471	27 77	55	32	20 4	85 71
22	57 2202	27 46		05	52 8	84 75	72	71 0248	27 77		32	52 8	85 71
23	57 4948	27 46		06	25 2	84 75	73	71 3025	27 77		33	25 2	85 71
24	57 7694	27 47		06	57 6	84 78	74	71 5802	27 78		33	57 6	85 74
25	58 0441	27 47		07	30 0	84 78	75	71 8580	27 79		34	30 0	85 77
61,26	1,158 3188	27 49	55	08	02 4	84 85	61,76	1,172 1359	27 80	55	35	02 4	85 80
27	58 5937	27 48		08	34 8	84 81	77	72 4139	27 80		35	34 8	85 80
28	58 8685	27 50		09	07 2	84 88	78	72 6919	27 81		36	07 2	85 83
29	59 1435	27 50		09	39 6	84 88	79	72 9700	27 81		36	39 6	85 83
30	59 4185	27 50		10	12 0	84 88	80	73 2481	27 82		37	12 0	85 86
61,31	1,159 6935	27 51	55	10	44 4	84 91	61,81	1,173 5263	27 83	55	37	44 4	85 89
32	59 9686	27 52		11	16 8	84 94	82	73 8046	27 83		38	16 8	85 89
33	60 2438	27 53		11	49 2	84 97	83	74 0829	27 84		38	49 2	85 93
34	60 5191	27 53		12	21 6	84 97	84	74 3613	27 85		39	21 6	85 96
35	60 7944	27 53		12	54 0	84 97	85	74 6398	27 55		39	54 0	85 96
61,36	1,161 0697	27 55	55	13	26 4	85 03	61,86	1,174 9183	27 86	55	40	26 4	85 99
37	61 3452	27 55		13	58 8	85 03	87	75 1969	27 87		40	58 8	86 02
38	61 6207	27 55		14	31 2	85 03	88	75 4756	27 87		41	31 2	86 02
39	61 8962	27 56		15	03 6	85 06	89	75 7543	27 88		42	03 6	86 05
40	62 1718	27 57		15	36 0	85 09	90	76 0331	27 88		42	36 0	86 05
61,41	1,162 4475	27 58	55	16	08 4	85 12	61,91	1,176 3119	27 89	55	43	08 4	86 08
42	62 7233	27 58		16	40 8	85 12	92	76 5908	27 90		43	40 8	86 11
43	62 9991	27 58		17	13 2	85 12	93	76 8698	27 90		44	13 2	86 11
44	63 2749	27 60		17	45 6	85 18	94	77 1488	27 92		44	45 6	86 17
45	63 5509	27 60		18	18 0	85 18	95	77 4280	27 91		45	18 0	86 14
61,46	1,163 8269	27 60	55	18	50 4	85 18	61,96	1,177 7071	27 93	55	45	50 4	86 20
47	64 1029	27 61		19	22 8	85 22	97	77 9864	27 93		46	22 8	86 20
48	64 3790	27 62		19	55 2	85 25	98	78 2657	27 93		46	55 2	86 20
49	64 6552	27 63		20	27 6	85 28	99	78 5450	27 95		47	27 6	86 27
50	64 9315			21	00 0		62,00	78 8245			48	00 0	

N. E. $k=62°$	L. k.	Alte Einth. D. 1″.		N. E. $k=62°$	L. k.	Alte Einth. D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.	Gr. M.			Gr. M. S.
62,00	1,178 8245	27 95	55 48 00 0	86 27	62,50	1,192 8789	28 28	56 15 00 0	87 28
62,01	1,179 1040	27 95	55 48 32 4	86 27	62,51	1,193 1617	28 28	56 15 32 4	87 28
02	79 3835	27 96	49 04 8	86 30	52	93 4445	28 29	16 04 8	87 31
03	79 6631	27 97	49 37 2	86 33	53	93 7274	28 30	16 37 2	87 35
04	79 9428	27 98	50 09 6	86 36	54	94 0104	28 31	17 09 6	87 38
05	80 2226	27 98	50 42 0	86 36	55	94 2935	28 31	17 42 0	87 38
62,06	1,180 5024	27 99	55 51 14 4	86 39	62,56	1,194 5766	28 31	56 18 14 4	87 38
07	80 7823	27 99	51 46 8	86 39	57	94 8597	28 33	18 46 8	87 44
08	81 0622	28 00	52 19 2	86 42	58	95 1430	28 33	19 19 2	87 44
09	81 3422	28 01	52 51 6	86 45	59	95 4263	28 33	19 51 6	87 44
10	81 6223	28 01	53 24 0	86 45	60	95 7096	28 35	20 24 0	87 50
62,11	1,181 9024	28 02	55 53 56 4	86 48	62,61	1,195 9931	28 35	56 20 56 4	87 50
12	82 1826	28 03	54 28 8	86 51	62	96 2766	28 36	21 28 8	87 53
13	82 4629	28 03	55 01 2	86 51	63	96 5602	28 36	22 01 2	87 53
14	82 7432	28 04	55 33 6	86 54	64	96 8438	28 37	22 33 6	87 56
15	83 0236	28 05	56 06 0	86 57	65	97 1275	28 38	23 06 0	87 59
62,16	1,183 3041	28 05	55 56 38 4	86 57	62,66	1,197 4113	28 38	56 23 38 4	87 59
17	83 5846	28 06	57 10 8	86 60	67	97 6951	28 39	24 10 8	87 62
18	83 8652	28 07	57 43 2	86 64	68	97 9790	28 40	24 43 2	87 65
19	84 1459	28 07	58 15 6	86 64	69	98 2630	28 40	25 15 6	87 65
20	84 4266	28 08	58 48 0	86 67	70	98 5470	28 41	25 48 0	87 68
62,21	1,184 7074	28 09	55 59 20 4	86 70	62,71	1,198 8311	28 42	56 26 20 4	87 72
22	84 9883	28 09	55 59 52 8	86 70	72	99 1153	28 42	26 52 8	87 72
23	85 2692	28 10	56 00 25 2	86 73	73	99 3995	28 43	27 25 2	87 75
24	85 5502	28 10	00 57 6	86 73	74	99 6838	28 44	27 57 6	87 78
25	85 8312	28 11	01 30 0	86 76	75	99 9682	28 45	28 30 0	87 81
62,26	1,186 1123	28 12	56 02 02 4	86 79	62,76	1,200 2527	28 45	56 29 02 4	87 81
27	86 3935	28 13	02 34 8	86 82	77	00 5372	28 45	29 34 8	87 81
28	86 6748	28 13	03 07 2	86 82	78	00 8217	28 47	30 07 2	87 87
29	86 9561	28 14	03 39 6	86 85	79	01 1064	28 47	30 39 6	87 87
30	87 2375	28 14	04 12 0	86 85	80	01 3911	28 48	31 12 0	87 90
62,31	1,187 5189	28 15	56 04 44 4	86 88	62,81	1,201 6759	28 48	56 31 44 4	87 90
32	87 8004	28 16	05 16 8	86 91	82	01 9607	28 50	32 16 8	87 96
33	88 0820	28 17	05 49 2	86 94	83	02 2457	28 49	32 49 2	87 93
34	88 3637	28 17	06 21 6	86 94	84	02 5306	28 51	33 21 6	87 99
35	88 6454	28 17	06 54 0	86 94	85	02 8157	28 51	33 54 0	87 99
62,36	1,188 9271	28 19	56 07 26 4	87 01	62,86	1,203 1008	28 52	56 34 26 4	88 02
37	89 2090	28 19	07 58 8	87 01	87	03 3860	28 53	34 58 8	88 06
38	89 4909	28 20	08 31 2	87 04	88	03 6713	28 53	35 31 2	88 06
39	89 7729	28 20	09 03 6	87 04	89	03 9566	28 54	36 03 6	88 09
40	90 0549	28 21	09 36 0	87 07	90	04 2420	28 54	36 36 0	88 09
62,41	1,190 3370	28 22	56 10 08 4	87 10	62,91	1,204 5274	28 56	56 37 08 4	88 16
42	90 6192	28 22	10 40 8	87 10	92	04 8130	28 56	37 40 8	88 15
43	90 9014	28 23	11 13 2	87 13	93	05 0986	28 56	38 13 2	88 15
44	91 1837	28 24	11 45 6	87 16	94	05 3842	28 58	38 45 6	88 21
45	91 4661	28 24	12 18 0	87 16	95	05 6700	28 58	39 18 0	88 21
62,46	1,191 7485	28 25	56 12 50 4	87 19	62,96	1,205 9558	28 58	56 39 50 4	88 21
47	92 0310	28 26	13 22 8	87 22	97	06 2416	28 60	40 22 8	88 27
48	92 3136	28 26	13 55 2	87 22	98	06 5276	28 60	40 55 2	88 27
49	92 5962	28 27	14 27 6	87 25	99	06 8136	28 60	41 27 6	88 27
50	92 8789		15 00 0		63,00	07 0996		42 00 0	

N. E.		Alte Einth.		Alte Einth.
$k=63°$	$\mathfrak{L}$. k.	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
63,00	1,207 0996	28 62	56 42 00 0	88 33
63,01	1,207 3858	28 62	56 42 32 4	88 33
02	07 6720	28 63	43 04 8	88 36
03	07 9583	28 63	43 37 2	88 36
04	08 2446	28 64	44 09 6	88 39
05	08 5310	28 65	44 42 0	88 43
63,06	1,208 8175	28 66	56 45 14 4	88 46
07	09 1041	28 66	45 46 8	88 46
08	09 3907	28 67	46 19 2	88 49
09	09 6774	28 67	46 51 6	88 49
10	09 9641	28 69	47 24 0	88 55
63,11	1,210 2510	28 69	56 47 56 4	88 55
12	10 5379	28 69	48 28 8	88 55
13	10 8248	28 71	49 01 2	88 61
14	11 1119	28 71	49 33 6	88 61
15	11 3990	28 72	50 06 0	88 64
63,16	1,211 6862	28 72	56 50 38 4	88 64
17	11 9734	28 73	51 10 8	88 67
18	12 2607	28 74	51 43 2	88 70
19	12 5481	28 74	52 15 6	88 70
20	12 8355	28 75	52 48 0	88 73
63,21	1,213 1230	28 76	56 53 20 4	88 77
22	13 4106	28 77	53 52 8	88 80
23	13 6983	28 77	54 25 2	88 80
24	13 9860	28 78	54 57 6	88 83
25	14 2738	28 79	55 30 0	88 86
63,26	1,214 5617	28 79	56 56 02 4	88 86
27	14 8496	28 80	56 34 8	88 89
28	15 1376	28 81	57 07 2	88 92
29	15 4257	28 81	57 39 6	88 92
30	15 7138	28 82	58 12 0	88 95
63,31	1,216 0020	28 83	56 58 44 4	88 98
32	16 2903	28 84	59 16 8	89 01
33	16 5787	28 84	56 59 49 2	89 01
34	16 8671	28 85	57 00 21 6	89 04
35	17 1556	28 86	00 54 0	89 07
63,36	1,217 4442	28 86	57 01 26 4	89 07
37	17 7328	28 87	01 58 8	89 10
38	18 0215	28 88	02 31 2	89 14
39	18 3103	28 88	03 03 6	89 14
40	18 5991	28 89	03 36 0	89 17
63,41	1,218 8880	28 90	57 04 08 4	89 20
42	19 1770	28 90	04 40 8	89 20
43	19 4660	28 92	05 13 2	89 26
44	19 7552	28 92	05 45 6	89 26
45	20 0444	28 92	06 18 0	89 26
63,46	1,220 3336	28 93	57 06 50 4	89 29
47	20 6229	28 94	07 22 8	89 32
48	20 9123	28 95	07 55 2	89 35
49	21 2018	28 96	08 27 6	89 38
50	21 4904		09 00 0	

N. E.		Alte Einth.		Alte Einth.
$k=63°$	$\mathfrak{L}$. k.	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
63,50	1,221 4904	28 96	57 09 00 0	89 38
63,51	1,221 7810	28 97	57 09 32 4	89 41
52	22 0707	28 97	10 04 8	89 41
53	22 3604	28 98	10 37 2	89 44
54	22 6502	28 99	11 09 6	89 47
55	22 9401	29 00	11 42 0	89 51
63,56	1,223 2301	29 01	57 12 14 4	89 54
57	23 5202	29 01	12 46 8	89 54
58	23 8103	29 01	13 19 2	89 54
59	24 1004	29 03	13 51 6	89 60
60	24 3907	29 03	14 24 0	89 60
63,61	1,224 6810	29 04	57 14 56 4	89 63
62	24 9714	29 05	15 28 8	89 66
63	25 2619	29 05	16 01 2	89 66
64	25 5524	29 06	16 33 6	89 69
65	25 8430	29 07	17 06 0	89 72
63,66	1,226 1337	29 07	57 17 38 4	89 72
67	26 4244	29 08	18 10 8	89 75
68	26 7152	29 09	18 43 2	89 78
69	27 0061	29 10	19 15 6	89 81
70	27 2971	29 10	19 48 0	89 81
63,71	1,227 5881	29 11	57 20 20 4	89 85
72	27 8792	29 12	20 52 8	89 88
73	28 1704	29 12	21 25 2	89 88
74	28 4616	29 14	21 57 6	89 94
75	28 7530	29 14	22 30 0	89 94
63,76	1,229 0444	29 14	57 23 02 4	89 94
77	29 3358	29 16	23 34 8	90 00
78	29 6274	29 16	24 07 2	90 00
79	29 9190	29 16	24 39 6	90 00
80	30 2106	29 18	25 12 0	90 06
63,81	1,230 5024	29 18	57 25 44 4	90 06
82	30 7942	29 19	26 16 8	90 09
83	31 0861	29 20	26 49 2	90 12
84	31 3781	29 20	27 21 6	90 12
85	31 6701	29 21	27 54 0	90 15
63,86	1,231 9622	29 22	57 28 26 4	90 19
87	32 2544	29 22	28 58 8	90 19
88	32 5466	29 24	29 31 2	90 25
89	32 8390	29 23	30 03 6	90 22
90	33 1313	29 25	30 36 0	90 28
63,91	1,233 4238	29 26	57 31 08 4	90 31
92	33 7164	29 26	31 40 8	90 31
93	34 0090	29 26	32 13 2	90 31
94	34 3016	29 28	32 45 6	90 37
95	34 5944	29 28	33 18 0	90 37
63,96	1,234 8872	29 29	57 33 50 4	90 40
97	35 1801	29 30	34 22 8	90 43
98	35 4731	29 30	34 55 2	90 43
99	35 7661	29 32	35 27 6	90 49
64,00	36 0593		36 00 0	

N. E. $k=64°$	L. k.	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.	D. 1″.
Gr. M.				
64,00	1,236 0593	29 31	57 36 00 0	90 46
64,01	1,236 3524	29 33	57 36 32 4	90 52
02	36 6457	29 33	37 04 8	90 52
03	36 9390	29 35	37 37 2	90 59
04	37 2325	29 34	38 09 6	90 56
05	37 5259	29 36	38 42 0	90 62
64,06	1,237 8195	29 36	57 39 14 4	90 62
07	38 1131	29 37	39 46 8	90 65
08	38 4068	29 38	40 19 2	90 68
09	38 7006	29 38	40 51 6	90 68
10	38 9944	29 39	41 24 0	90 71
64,11	1,239 2883	29 40	57 41 56 4	90 74
12	39 5823	29 41	42 28 8	90 77
13	39 8764	29 41	43 01 2	90 77
14	40 1705	29 42	43 33 6	90 80
15	40 4647	29 43	44 06 0	90 83
64,16	1,240 7590	29 44	57 44 38 4	90 86
17	41 0534	29 44	45 10 8	90 86
18	41 3478	29 45	45 43 2	90 90
19	41 6423	29 46	46 15 6	90 93
20	41 9369	29 47	46 48 0	90 96
64,21	1,242 2316	29 47	57 47 20 4	90 96
22	42 5263	29 48	47 52 8	90 99
23	42 8211	29 48	48 25 2	90 99
24	43 1159	29 50	48 57 6	91 05
25	43 4109	29 50	49 30 0	91 05
64,26	1,243 7059	29 51	57 50 02 4	91 08
27	44 0010	29 52	50 34 8	91 11
28	44 2962	29 52	51 07 2	91 11
29	44 5914	29 53	51 39 6	91 14
30	44 8867	29 54	52 12 0	91 17
64,31	1,245 1821	29 55	57 52 44 4	91 20
32	45 4776	29 56	53 16 8	91 23
33	45 7731	29 56	53 49 2	91 23
34	46 0687	29 57	54 21 6	91 27
35	46 3644	29 58	54 54 0	91 30
64,36	1,246 6602	29 58	57 55 26 4	91 30
37	46 9560	29 59	55 58 8	91 33
38	47 2519	29 60	56 31 2	91 36
39	47 5479	29 60	57 03 6	91 36
40	47 8439	29 61	57 36 0	91 39
64,41	1,248 1400	29 62	57 58 08 4	91 42
42	48 4362	29 63	58 40 8	91 45
43	48 7325	29 64	59 13 2	91 48
44	49 0289	29 64	57 59 45 6	91 48
45	49 3253	29 65	58 00 18 0	91 51
64,46	1,249 6218	29 66	58 00 50 4	91 54
47	49 9184	29 66	01 22 8	91 54
48	50 2150	29 67	01 55 2	91 57
49	50 5117	29 68	02 27 6	91 60
50	50 8085		03 00 0	

N. E. $k=64°$	L. k.	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.	D. 1″.
Gr. M.				
64,50	1,250 8085	29 69	58 03 00 0	91 64
64,51	1,251 1054	29 70	58 03 32 4	91 67
52	51 4024	29 70	04 04 8	91 67
53	51 6994	29 71	04 37 2	91 70
54	51 9965	29 72	05 09 6	91 73
55	52 2937	29 72	05 42 0	91 73
64,56	1,252 5909	29 73	58 06 14 4	91 76
57	52 8882	29 74	06 46 8	91 79
58	53 1856	29 75	07 19 2	91 82
59	53 4831	29 76	07 51 6	91 85
60	53 7807	29 76	08 24 0	91 85
64,61	1,254 0783	29 77	58 08 56 4	91 88
62	54 3760	29 78	09 28 8	91 91
63	54 6738	29 78	10 01 2	91 91
64	54 9716	29 79	10 33 6	91 94
65	55 2695	29 80	11 06 0	91 98
64,66	1,255 5675	29 81	58 11 38 4	92 01
67	55 8656	29 82	12 10 8	92 04
68	56 1638	29 82	12 43 2	92 04
69	56 4620	29 83	13 15 6	92 07
70	56 7603	29 84	13 48 0	92 10
64,71	1,257 0587	29 84	58 14 20 4	92 10
72	57 3571	29 86	14 52 8	92 16
73	57 6557	29 86	15 25 2	92 16
74	57 9543	29 86	15 57 6	92 16
75	58 2529	29 88	16 30 0	92 22
64,76	1,258 5517	29 88	58 17 02 4	92 22
77	58 8505	29 89	17 34 8	92 25
78	59 1494	29 90	18 07 2	92 28
79	59 4484	29 91	18 39 6	92 31
80	59 7475	29 91	19 12 0	92 31
64,81	1,260 0466	29 92	58 19 44 4	92 35
82	60 3458	29 93	20 16 8	92 38
83	60 6451	29 94	20 49 2	92 41
84	60 9445	29 94	21 21 6	92 41
85	61 2439	29 96	21 54 0	92 47
64,86	1,261 5435	29 96	58 22 26 4	92 47
87	61 8431	29 96	22 58 8	92 47
88	62 1427	29 98	23 31 2	92 53
89	62 4425	29 98	24 03 6	92 53
90	62 7423	29 99	24 36 0	92 56
64,91	1,263 0422	30 00	58 25 08 4	92 59
92	63 3422	30 00	25 40 8	92 59
93	63 6422	30 02	26 13 2	92 65
94	63 9424	30 02	26 45 6	92 65
95	64 2426	30 03	27 18 0	92 69
64,96	1,264 5429	30 03	58 27 50 4	92 69
97	64 8432	30 05	28 22 8	92 75
98	65 1437	30 05	28 55 2	92 75
99	65 4442	30 06	29 27 6	92 78
65,00	65 7448		30 00 0	

N. E.		Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.		
$k=65°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=65°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
65,00	1,265 7448	30 07	58 30 00 0	92 81	65,50	1,280 8737	30 46	58 57 00 0	94 01
65,01	1,266 0455	30 07	58 30 32 4	92 81	65,51	1,281 1783	20 46	58 57 32 4	94 01
02	66 3462	30 08	31 04 8	92 84	52	81 4829	30 48	58 04 8	94 07
03	66 6470	30 09	31 37 2	92 87	53	81 7877	30 48	58 37 2	94 07
04	66 9479	30 10	32 09 6	92 90	54	82 0925	30 49	59 09 6	94 10
05	67 2489	30 11	32 42 0	92 93	55	82 3974	30 50	58 59 42 0	94 14
65,06	1,267 5500	30 11	58 33 14 4	92 93	65,56	1,282 7024	30 50	59 00 14 4	94 14
07	67 8511	30 12	33 46 8	92 96	57	83 0074	30 52	00 46 8	94 20
08	68 1523	30 13	34 19 2	92 99	58	83 3126	30 52	01 19 2	94 20
09	68 4536	30 13	34 51 6	92 99	59	83 6178	30 53	01 51 6	94 23
10	68 7549	30 15	35 24 0	93 06	60	83 9231	30 54	02 24 0	94 26
65,11	1,269 0564	30 15	58 35 56 4	93 06	65,61	1,284 2285	30 54	59 02 56 4	94 26
12	69 3579	30 16	36 28 8	93 09	62	84 5339	30 56	03 28 8	94 32
13	69 6595	30 17	37 01 2	93 12	63	84 8395	30 56	04 01 2	94 32
14	69 9612	30 17	37 33 6	93 12	64	85 1451	30 57	04 33 6	94 35
15	70 2629	30 19	38 06 0	93 18	65	85 4508	30 58	05 06 0	94 38
65,16	1,270 5648	30 19	58 38 38 4	93 18	65,66	1,285 7566	30 58	59 05 38 4	94 38
17	70 8667	30 20	39 10 8	93 21	67	86 0624	30 60	06 10 8	94 44
18	71 1687	30 20	39 43 2	93 21	68	86 3684	30 60	06 43 2	94 44
19	71 4707	30 22	40 15 6	93 27	69	86 6744	30 61	07 15 6	94 48
20	71 7729	30 22	40 48 0	93 27	70	86 9805	30 62	07 48 0	94 51
65,21	1,272 0751	30 23	58 41 20 4	93 30	65,71	1,287 2867	30 63	59 08 20 4	94 54
22	72 3774	30 24	41 52 8	93 33	72	87 5930	30 63	08 52 8	94 54
23	72 6798	30 24	42 25 2	93 33	73	87 8993	30 64	09 25 2	94 57
24	72 9822	30 24	42 57 6	93 33	74	88 2057	30 65	09 57 6	94 60
25	73 2848	30 26	43 30 0	93 40	75	88 5122	30 66	10 30 0	94 63
65,26	1,273 5874	30 27	58 44 02 4	93 43	65,76	1,288 8188	30 67	59 11 02 4	94 66
27	73 8901	30 27	44 34 8	93 43	77	89 1255	30 67	11 34 8	94 66
28	74 1928	30 29	45 07 2	93 49	78	89 4322	30 69	12 07 2	94 72
29	74 4957	30 29	45 39 6	93 49	79	89 7391	30 69	12 39 6	94 72
30	74 7986	30 30	46 12 0	93 52	80	90 0460	30 70	13 12 0	94 75
65,31	1,275 1016	30 31	58 46 44 4	93 55	65,81	1,290 3530	30 70	59 13 44 4	94 75
32	75 4047	30 32	47 16 8	93 58	82	90 6600	30 72	14 16 8	94 81
33	75 7079	30 32	47 49 2	93 58	83	90 9672	30 72	14 49 2	94 81
34	76 0111	30 33	48 21 6	93 61	84	91 2744	30 73	15 21 6	94 85
35	76 3144	30 34	48 54 0	93 64	85	91 5817	30 74	15 54 0	94 88
65,36	1,276 6178	30 35	58 49 26 4	93 67	65,86	1,291 8891	30 75	59 16 26 4	94 91
37	76 9213	30 35	49 58 8	93 67	87	92 1966	30 76	16 58 8	94 94
38	77 2248	30 37	50 31 2	93 73	88	92 5042	30 76	17 31 2	94 94
39	77 5285	30 37	51 03 6	93 73	89	92 8118	30 77	18 03 6	94 97
40	77 8322	30 38	51 36 0	93 77	90	93 1195	30 78	18 36 0	95 00
65,41	1,278 1360	30 39	58 52 08 4	93 80	65,91	1,293 4273	30 79	59 19 08 4	95 03
42	78 4399	30 39	52 40 8	93 80	92	93 7352	30 80	19 40 8	95 06
43	78 7438	30 40	53 13 2	93 83	93	94 0432	30 80	20 13 2	95 06
44	79 0478	30 42	53 45 6	93 89	94	94 3512	30 82	20 45 6	95 12
45	79 3520	30 41	54 18 0	93 86	95	94 6594	30 82	21 18 0	95 12
65,46	1,279 6561	30 43	58 54 50 4	93 92	65,96	1,294 9676	30 83	59 21 50 4	95 15
47	79 9604	30 43	55 22 8	93 92	97	95 2759	30 83	22 22 8	95 15
48	80 2647	30 45	55 55 2	93 98	98	95 5842	30 85	22 55 2	95 22
49	80 5692	30 45	56 27 6	93 98	99	95 8927	30 85	23 27 6	95 22
50	80 8737		57 00 0		66,00	96 2012		24 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=66°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		
Gr. M.			Gr. M. S.			
66,00	1,296 2012	30 87	59 24 00 0	95 28		
66,01	1,296 5099	30 87	59 24 32 4	95 28		
02	96 8186	30 88	25 04 8	95 31		
03	97 1274	30 88	25 37 2	95 31		
04	97 4362	30 90	26 09 6	95 37		
05	97 7452	30 90	26 42 0	95 37		
66,06	1,298 0542	30 91	59 27 14 4	95 40		
07	98 3633	30 92	27 46 8	95 43		
08	98 6725	30 93	28 19 2	95 46		
09	98 9818	30 93	28 51 6	95 46		
10	99 2911	30 95	29 24 0	95 52		
66,11	1,299 6006	30 95	59 29 56 4	95 52		
12	1,299 9101	30 96	30 28 8	95 56		
13	1,300 2197	30 97	31 01 2	95 59		
14	00 5294	30 98	31 33 6	95 62		
15	00 8392	30 98	32 06 0	95 62		
66,16	1,301 1490	31 00	59 32 38 4	95 68		
17	01 4590	31 00	33 10 8	95 68		
18	01 7690	31 01	33 43 2	95 71		
19	02 0791	31 02	34 15 6	95 74		
20	02 3893	31 03	34 48 0	95 77		
66,21	1,302 6996	31 03	59 35 20 4	95 77		
22	03 0099	31 05	35 52 8	95 83		
23	03 3204	31 05	36 25 2	95 83		
24	03 6309	31 06	36 57 6	95 86		
25	03 9415	31 07	37 30 0	95 90		
66,26	1,304 2522	31 07	59 38 02 4	95 90		
27	04 5629	31 09	38 34 8	95 96		
28	04 8738	31 09	39 07 2	95 96		
29	05 1847	31 10	39 39 6	95 99		
30	05 4957	31 11	40 12 0	96 02		
66,31	1,305 8068	31 12	59 40 44 4	96 05		
32	06 1180	31 13	41 16 8	96 08		
33	06 4293	31 13	41 49 2	96 08		
34	06 7406	31 15	42 21 6	96 14		
35	07 0521	31 15	42 54 0	96 14		
66,36	1,307 3636	31 16	59 43 26 4	96 17		
37	07 6752	31 17	43 58 8	96 20		
38	07 9869	31 18	44 31 2	96 23		
39	08 2987	31 18	45 03 6	96 23		
40	08 6105	31 20	45 36 0	96 30		
66,41	1,308 9225	31 20	59 46 08 4	96 30		
42	09 2345	31 21	46 40 8	96 33		
43	09 5466	31 22	47 13 2	96 36		
44	09 8588	31 23	47 45 6	96 39		
45	10 1711	31 23	48 18 0	96 39		
66,46	1,310 4834	31 25	59 48 50 4	96 45		
47	10 7959	31 25	49 22 8	96 45		
48	11 1084	31 26	49 55 2	96 48		
49	11 4210	31 27	50 27 6	96 51		
50	11 7337		51 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=66°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		
Gr. M.			Gr. M. S.			
66,50	1,311 7337	31 28	59 51 00 0	96 54		
66,51	1,312 0465	31 29	59 51 32 4	96 57		
52	12 3594	31 29	52 04 8	96 57		
53	12 6723	31 31	52 37 2	96 64		
54	12 9854	31 31	53 09 6	96 64		
55	13 2985	31 32	53 42 0	96 67		
66,56	1,313 6117	31 33	59 54 14 4	96 70		
57	13 9250	31 34	54 46 8	96 73		
58	14 2384	31 34	55 19 2	96 73		
59	14 5518	31 36	55 51 6	96 79		
60	14 8654	31 36	56 24 0	96 79		
66,61	1,315 1790	31 37	59 56 56 4	96 82		
62	15 4927	31 38	57 28 8	96 85		
63	15 8065	31 39	58 01 2	96 88		
64	16 1204	31 40	58 33 6	96 91		
65	16 4344	31 41	59 06 0	96 94		
66,66	1,316 7485	31 41	59 59 38 4	96 94		
67	17 0626	31 42	60 00 10 8	96 98		
68	17 3768	31 44	00 43 2	97 04		
69	17 6912	31 44	01 15 6	97 04		
70	18 0056	31 44	01 48 0	97 04		
66,71	1,318 3200	31 46	60 02 20 4	97 10		
72	18 6346	31 47	02 52 8	97 13		
73	18 9493	31 47	03 25 2	97 13		
74	19 2640	31 49	03 57 6	97 19		
75	19 5789	31 49	04 30 0	97 19		
66,76	1,319 8938	31 50	60 05 02 4	97 22		
77	20 2088	31 51	05 34 8	97 25		
78	20 5239	31 51	06 07 2	97 25		
79	20 8390	31 53	06 39 6	97 31		
80	21 1543	31 54	07 12 0	97 35		
66,81	1,321 4697	31 54	60 07 44 4	97 35		
82	21 7851	31 55	08 16 8	97 38		
83	22 1006	31 56	08 49 2	97 41		
84	22 4162	31 57	09 21 6	97 44		
85	22 7319	31 58	09 54 0	97 47		
66,86	1,3223 0477	31 58	60 10 26 4	97 47		
87	23 3635	31 60	10 58 8	97 53		
88	23 6795	31 60	11 31 2	97 53		
89	23 9955	31 62	12 03 6	97 59		
90	24 3117	31 62	12 36 0	97 59		
66,91	1,324 6279	31 63	60 13 08 4	97 62		
92	24 9442	31 64	13 40 8	97 65		
93	25 2606	31 64	14 13 2	97 65		
94	25 5770	31 66	14 45 6	97 72		
95	25 8936	31 66	15 18 0	97 72		
66,96	1,326 2102	31 68	60 15 50 4	97 78		
97	26 5270	31 68	16 22 8	97 78		
98	26 8438	31 69	16 55 2	97 81		
99	27 1607	31 70	17 27 6	97 84		
67,00	27 4777		18 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.		
$k=67°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.			$k=67°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.		
Gr. M.				Gr. M. S.				Gr. M.				Gr. M. S.			
67,00	1,327 4777	31	71	60 18 00 0	97	87		67,50	1,343 4400	32	15	60 45 00 0	99	23	
67,01	1,327 7948	31	72	60 18 32 4	97	90		67,51	1,343 7615	32	16	60 45 32 4	99	26	
02	28 1120	31	72	19 04 8	97	90		52	44 0831	32	17	46 04 8	99	29	
03	28 4292	31	74	19 37 2	97	96		53	44 4048	32	18	46 37 2	99	32	
04	28 7466	31	74	20 09 6	97	96		54	44 7266	32	19	47 09 6	99	35	
05	29 0640	31	75	20 42 0	97	99		55	45 0485	32	19	47 42 0	99	35	
67,06	1,329 3815	31	76	60 21 14 4	98	02		67,56	1,345 3704	32	21	60 48 14 4	99	41	
07	29 6991	31	77	21 46 8	98	06		57	45 6925	32	21	48 46 8	99	41	
08	30 0168	31	78	22 19 2	98	09		58	46 0146	32	23	49 19 2	99	48	
09	30 3346	31	79	22 51 6	98	12		59	46 3369	32	23	49 51 6	99	48	
10	30 6525	31	79	23 24 0	98	12		60	46 6592	32	24	50 24 0	99	51	
67,11	1,330 9704	31	81	60 23 56 4	98	18		67,61	1,346 9816	32	26	60 50 56 4	99	57	
12	31 2885	31	81	24 28 8	98	18		62	47 3042	32	26	51 28 8	99	57	
13	31 6066	31	82	25 01 2	98	21		63	47 6268	32	27	52 01 2	99	60	
14	31 9248	31	83	25 33 6	98	24		64	47 9495	32	28	52 33 6	99	63	
15	32 2431	31	84	26 06 0	98	27		65	48 2723	32	28	53 06 0	99	63	
67,16	1,332 5615	31	85	60 26 38 4	98	30		67,66	1,348 5951	32	30	60 53 38 4	99	69	
17	32 8800	31	86	27 10 8	98	33		67	48 9181	32	31	54 10 8	99	72	
18	33 1986	31	87	27 43 2	98	36		68	49 2412	32	31	54 43 2	99	72	
19	33 5173	31	87	28 15 6	98	36		69	49 5643	32	33	55 15 6	99	78	
20	33 8360	31	88	28 48 0	98	40		70	49 8876	32	33	55 48 0	99	78	
67,21	1,334 1548	31	90	60 29 20 4	98	86		67,71	1,350 2109	32	34	60 56 20 4	99	81	
22	34 4738	31	90	29 52 8	98	46		72	50 5343	32	35	56 52 8	99	85	
23	34 7928	31	91	30 25 2	98	49		73	50 8578	32	37	57 25 2	99	91	
24	35 1119	31	92	30 57 6	98	52		74	51 1815	32	37	57 57 6	99	91	
25	35 4311	31	93	31 30 0	98	55		75	51 5052	32	38	58 30 0	99	94	
67,26	1,335 7504	31	94	60 32 02 4	98	58		67,76	1,351 8290	32	38	60 59 02 4	99	94	
27	36 0698	31	94	32 34 8	98	58		77	52 1528	32	40	60 59 34 8	100	00	
28	36 3892	31	96	33 07 2	98	64		78	52 4768	32	41	61 00 07 2	100	03	
29	36 7088	31	96	33 39 6	98	64		79	52 8009	32	41	00 39 6	100	03	
30	37 0284	31	97	34 12 0	98	67		80	53 1250	32	43	01 12 0	100	09	
67,31	1,337 3481	31	99	60 34 44 4	98	73		67,81	1,353 4493	32	43	61 01 44 4	100	09	
32	37 6680	31	99	35 16 8	98	73		82	53 7736	32	45	02 16 8	100	15	
33	37 9879	32	00	35 49 2	98	77		83	54 0981	32	45	02 49 2	100	15	
34	38 3079	32	00	36 21 6	98	77		84	54 4226	32	46	03 21 6	100	19	
35	38 6279	32	02	36 54 0	98	83		85	54 7472	32	47	03 54 0	100	22	
67,36	1,338 9481	32	03	60 37 26 4	98	86		67,86	1,355 0719	32	48	61 04 26 4	100	25	
37	39 2684	32	03	37 58 8	98	86		87	55 3967	32	49	04 58 8	100	28	
38	39 5887	32	05	38 31 2	98	92		88	55 7216	32	50	05 31 2	100	31	
39	39 9092	32	05	39 03 6	98	92		89	56 0466	32	51	06 03 6	100	34	
40	40 2297	32	06	39 36 0	98	95		90	56 3717	32	52	06 36 0	100	37	
67,41	1,340 5503	32	07	60 40 08 4	98	98		67,91	1,356 6969	32	53	61 07 08 4	100	40	
42	40 8710	32	08	40 40 8	99	01		92	57 0222	32	53	07 40 8	100	40	
43	41 1918	32	09	41 13 2	99	04		93	57 3475	32	55	08 13 2	100	46	
44	41 5127	32	10	41 45 6	99	07		94	57 6730	32	55	08 45 6	100	46	
45	41 8337	32	11	42 18 0	99	10		95	57 9985	32	57	09 18 0	100	52	
67,46	1,342 1548	32	11	60 42 50 4	99	10		67,96	1,358 3242	32	57	61 09 50 4	100	52	
47	42 4759	32	13	43 22 8	99	17		97	58 6499	32	58	10 22 8	100	56	
48	42 7972	32	13	43 55 2	99	17		98	58 9757	32	59	10 55 2	100	59	
49	43 1185	32	15	44 27 6	99	23		99	59 3016	32	61	11 27 6	100	65	
50	43 4400			45 00 0				68,00	59 6277			12 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.				
$k=68°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.	$k=68°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			Gr. M.			Gr. M. S.		
68,00	1,359 6277	32 61	61 12 00 0	100 65		68,50	1,376 0483	33 08	61 39 00 0	102 10	
68,01	1,359 9538	32 62	61 12 32 4	100 68		68,51	1,376 3791	33 10	61 39 32 4	102 16	
02	60 2800	32 62	13 04 8	100 68		52	76 7101	33 10	40 04 8	102 16	
03	60 6062	32 64	13 37 2	100 74		53	77 0411	33 11	40 37 2	102 19	
04	60 9326	32 65	14 09 6	100 77		54	77 3722	33 13	41 09 6	102 25	
05	61 2591	32 66	14 42 0	100 80		55	77 7035	33 13	41 42 0	102 25	
68,06	1,361 5857	32 66	61 15 14 4	100 80		68,56	1,378 0348	33 14	61 42 14 4	102 28	
07	61 9123	32 68	15 46 8	100 86		57	78 3662	33 15	42 46 8	102 31	
08	62 2391	32 69	16 19 2	100 90		58	78 7977	33 17	43 19 2	102 38	
09	62 5660	32 69	16 51 6	100 90		59	79 0294	33 17	43 51 6	102 38	
10	62 8929	32 70	17 24 0	100 93		60	79 3611	33 18	44 24 0	102 41	
68,11	1,363 2199	32 72	61 17 56 4	100 99		68,61	1,379 6929	33 19	61 44 56 4	102 44	
12	63 5471	32 72	18 28 8	100 99		62	80 0248	33 20	45 28 8	102 47	
13	63 8743	32 73	19 01 2	101 02		63	80 3568	33 21	46 01 2	102 50	
14	64 2016	32 74	19 33 6	101 05		64	80 6889	33 22	46 33 6	102 53	
15	64 5290	32 75	20 06 0	101 08		65	81 0211	33 23	47 06 0	102 56	
68,16	1,364 8565	32 75	61 20 38 4	101 08		68,66	1,381 3534	33 24	61 47 38 4	102 59	
17	65 1842	32 76	21 10 8	101 11		67	81 6858	33 24	48 10 8	102 59	
18	65 5118	32 78	21 43 2	101 17		68	82 0182	33 26	48 43 2	102 65	
19	65 8396	32 79	22 15 6	101 20		69	82 3508	33 27	49 15 6	102 69	
20	66 1675	32 80	22 48 0	101 23		70	82 6835	33 28	49 48 0	102 72	
68,21	1,366 4955	32 81	61 23 20 4	101 27		68,71	1,383 0163	33 29	61 50 20 4	102 75	
22	66 8236	32 82	23 52 8	101 30		72	83 3492	33 30	50 52 8	102 78	
23	67 1518	32 82	24 25 2	101 30		73	83 6822	33 30	51 25 2	102 78	
24	67 4880	32 84	24 57 6	101 36		74	84 0152	33 32	51 57 6	102 84	
25	67 8084	32 84	25 30 0	101 36		75	84 3484	33 33	52 30 0	102 87	
68,26	1,368 1368	32 86	61 26 02 4	101 42		68,76	1,384 6817	33 34	61 53 02 4	102 90	
27	68 4654	32 86	26 34 8	101 42		77	85 0151	33 34	53 34 8	102 90	
28	68 7940	32 88	27 07 2	101 48		78	85 3485	33 36	54 07 2	102 96	
29	69 1228	32 88	27 39 6	101 48		79	85 6821	33 36	54 39 6	102 96	
30	69 4516	32 89	28 12 0	101 51		80	86 0157	33 38	55 12 0	103 02	
68,31	1,369 7805	32 91	61 28 44 4	101 57		68,81	1,386 3495	33 39	61 55 44 4	103 06	
32	70 1096	32 91	29 16 8	101 57		82	86 6834	33 39	56 16 8	103 06	
33	70 4387	32 92	29 49 2	101 60		83	87 0173	33 41	56 49 2	103 12	
34	70 7679	32 93	30 21 6	101 64		84	87 3514	33 41	57 21 6	103 12	
35	71 0972	32 94	30 54 0	101 67		85	87 6855	33 43	57 54 0	103 18	
68,36	1,371 4266	32 95	61 31 26 4	101 70		68,86	1,388 0198	33 43	61 58 26 4	103 18	
37	71 7561	32 96	31 58 8	101 73		87	88 3541	33 45	58 58 8	103 24	
38	72 0857	32 97	32 31 2	101 76		88	88 6886	33 45	61 59 31 2	103 24	
39	72 4154	32 98	33 03 6	101 79		89	89 0231	33 47	62 00 03 6	103 30	
40	72 7452	32 98	33 36 0	101 79		90	89 3578	33 47	00 36 0	103 30	
68,41	1,373 0750	33 00	61 34 08 4	101 85		68,91	1,389 6925	33 49	62 01 08 4	103 36	
42	73 4050	33 01	34 40 8	101 88		92	90 0274	33 49	01 40 8	103 36	
43	73 7351	33 02	35 13 2	101 91		93	90 3623	33 51	02 13 2	103 43	
44	74 0653	33 02	35 45 6	101 91		94	90 6974	33 51	02 45 6	103 43	
45	74 3955	33 04	36 18 0	101 98		95	91 0325	33 53	03 18 0	103 49	
68,46	1,374 7259	33 05	61 36 50 4	102 01		68,96	1,391 3678	33 53	62 03 50 4	103 49	
47	75 0564	33 05	37 22 8	102 01		97	91 7031	33 55	04 22 8	103 55	
48	75 3869	33 07	37 55 2	102 07		98	92 0386	33 55	04 55 2	103 55	
49	75 7176	33 07	38 27 6	102 07		99	92 3741	33 56	05 27 6	103 58	
50	76 0483		39 00 0			69,00	92 7097		06 00 0		

N. E.		Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.		
$k=69°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=69°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
69,00	1,392 7097	33 58	62 06 00 0	103 64	69,50	1,409 6202	34 08	62 33 00 0	105 19
69,01	1,393 0455	33 58	62 06 32 4	103 64	69,51	1,409 9610	34 09	62 33 32 4	105 22
02	93 3813	33 59	07 04 8	103 67	52	10 3019	34 10	34 04 8	100 25
03	93 7172	33 61	07 37 2	103 73	53	10 6429	34 11	34 37 2	105 28
04	94 0533	33 61	08 09 6	103 73	54	10 9840	34 12	35 09 6	100 31
05	94 3894	33 63	08 42 0	103 80	55	11 3252	34 14	35 42 0	105 37
69,06	1,394 7257	33 63	62 09 14 4	103 80	69,56	1,411 6666	34 14	62 36 14 4	105 37
07	95 0620	33 64	09 46 8	103 83	57	12 0080	34 15	36 46 8	105 40
08	95 3984	33 66	10 19 2	103 89	58	12 3495	34 16	37 19 2	105 43
09	95 7350	33 66	10 51 6	103 89	59	12 6911	34 18	37 51 6	105 49
10	96 0716	33 68	11 24 0	103 95	60	13 0329	34 18	38 24 0	105 49
69,11	1,396 4084	33 68	62 11 56 4	103 95	69,61	1,413 3747	34 20	62 38 56 4	105 56
12	96 7452	33 69	12 28 8	103 98	62	13 7167	34 20	39 28 8	105 56
13	97 0821	33 71	13 01 2	104 04	63	14 0587	34 22	40 01 2	105 62
14	97 4192	33 71	13 33 6	104 04	64	14 4009	34 22	40 33 6	105 62
15	97 7563	33 73	14 06 0	104 10	65	14 7431	34 24	41 06 0	105 68
69,16	1,398 0936	33 73	62 14 38 4	104 10	69,66	1,415 0855	34 25	62 41 38 4	105 71
17	98 4309	33 75	15 10 8	104 17	67	15 4280	34 25	42 10 8	105 71
18	98 7684	33 75	15 43 2	104 17	68	15 7705	34 27	42 43 2	105 77
19	99 1059	33 77	16 15 6	104 23	69	16 1132	34 28	43 15 6	105 80
20	99 4436	33 77	16 48 0	104 23	70	16 4560	34 29	43 48 0	105 83
69,21	1,399 7813	33 78	62 17 20 4	104 26	69,71	1,416 7989	34 29	62 44 20 4	105 83
22	1,400 1191	33 80	17 52 8	104 32	72	17 1418	34 31	44 52 8	105 90
23	00 4571	33 80	18 25 2	104 32	73	17 4849	34 32	45 25 2	105 93
24	00 7951	33 82	18 57 6	104 38	74	17 8281	34 33	45 57 6	105 96
25	01 1333	33 82	19 30 0	104 38	75	18 1714	34 34	46 30 0	105 99
69,26	1,401 4715	33 84	62 20 02 4	104 44	69,76	1,418 5148	34 35	62 47 02 4	106 02
27	01 8099	33 84	20 34 8	104 44	77	18 8583	34 36	47 34 8	106 05
28	02 1483	33 86	21 07 2	104 51	78	19 2019	34 37	48 07 2	106 08
29	02 4869	33 87	21 39 6	104 54	79	19 5456	34 39	48 39 6	106 14
30	02 8256	33 87	22 12 0	104 54	80	19 8895	34 40	49 12 0	106 17
69,31	1,403 1643	33 89	62 22 44 4	104 60	69,81	1,420 2335	34 40	62 49 44 4	106 17
32	03 5032	33 89	23 16 8	104 60	82	20 5775	34 41	50 16 8	106 20
33	03 8421	33 91	23 49 2	104 66	83	20 9216	34 43	50 49 2	106 27
34	04 1812	33 92	24 21 6	104 69	84	21 2659	34 43	51 21 6	106 27
35	04 5204	33 93	24 54 0	104 72	85	21 6102	34 45	51 54 0	106 33
69,36	1,404 8597	33 93	62 25 26 4	104 72	69,86	1,421 9547	34 46	62 52 26 4	106 36
37	05 1990	33 95	25 58 8	104 78	87	22 2993	34 46	52 58 8	106 36
38	05 5385	33 96	26 31 2	104 81	88	22 6439	34 48	53 31 2	106 42
39	05 8781	33 97	27 03 6	104 85	89	22 9887	34 49	54 03 6	106 45
40	06 2178	33 97	27 36 0	104 85	90	23 3336	34 50	54 36 0	106 48
69,41	1,406 5575	33 99	62 28 08 4	104 91	69,91	1,423 6786	34 51	62 55 08 4	106 51
42	06 8974	34 00	28 40 8	104 94	92	24 0237	34 52	55 40 8	106 54
43	07 2374	34 01	29 13 2	104 97	93	24 3689	34 53	56 13 2	106 57
44	07 5775	34 02	29 45 6	105 00	94	24 7142	34 54	56 45 6	106 60
45	07 9177	34 03	30 18 0	105 03	95	25 0596	34 55	57 18 0	106 64
69,46	1,408 2580	34 04	62 30 50 4	105 06	69,96	1,425 4051	34 56	62 57 50 4	106 67
47	08 5984	34 05	31 22 8	105 09	97	25 7507	34 58	58 22 8	106 73
48	08 9389	34 06	31 55 2	105 12	98	26 0965	34 58	58 55 2	106 73
49	09 2795	34 07	32 27 6	105 15	99	26 4423	34 59	62 59 27 6	106 76
50	09 6202		33 00 0		70,00	26 7882		63 00 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.				
$k=70°$	L. k.	D. 1″.		D. 1″.	$k=70°$	L. k.	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
70,00	1,426 7882	34 61	63 00 00 0	106 82	70,50	1,444 2230	35 15	63 27 00 0	108 49
70,01	1,427 1343	34 62	63 00 32 4	106 85	70,51	1,444 5745	35 16	63 27 32 4	108 52
02	27 4805	34 62	01 04 8	106 85	52	44 9261	35 17	28 04 8	108 55
03	27 8267	34 64	01 37 2	106 91	53	45 2778	35 18	28 37 2	108 58
04	28 1731	34 65	02 09 6	106 94	54	45 6296	35 19	29 09 6	108 61
05	28 5196	34 66	02 42 0	106 98	55	45 9815	35 21	29 42 0	108 67
70,06	1,428 8662	34 67	63 03 14 4	107 01	70,56	1,446 3336	35 21	63 30 14 4	108 67
07	29 2129	34 68	03 46 8	107 04	57	46 6857	35 23	30 46 8	108 73
08	29 5597	34 69	04 19 2	107 07	58	47 0380	35 23	31 19 2	108 73
09	29 9066	34 70	04 51 6	107 10	59	47 3903	35 25	31 51 6	108 80
10	30 2536	34 71	05 24 0	107 13	60	47 7428	35 26	32 24 0	108 83
70,11	1,430 6007	34 72	63 05 56 4	107 16	70,61	1,448 0954	35 27	63 32 56 4	108 86
12	30 9479	34 74	06 28 8	107 22	62	48 4481	35 28	33 28 8	108 89
13	31 2953	34 74	07 01 2	107 22	63	48 8009	35 29	34 01 2	108 92
14	31 6427	34 76	07 33 6	1o7 28	64	49 1538	35 31	34 33 6	108 98
15	31 9903	34 76	08 06 0	107 28	65	49 5069	35 31	35 06 0	108 98
70,16	1,432 3379	34 78	63 08 38 4	107 35	70,66	1,449 8600	35 33	63 35 38 4	109 04
17	32 6857	34 79	09 10 8	107 38	67	50 2133	35 34	36 10 8	109 07
18	33 0336	34 79	09 43 2	107 38	68	50 5667	35 34	36 43 2	109 02
19	33 3815	34 81	10 15 6	107 44	69	50 9201	35 36	37 15 6	109 14
20	33 7296	43 82	10 48 0	107 47	70	51 2737	35 37	37 48 0	109 17
70,21	1,434 0778	34 83	63 11 20 4	107 50	70,71	1,451 6274	35 39	63 38 20 4	109 23
22	34 4261	34 85	11 52 8	107 56	72	51 9813	35 39	38 52 8	109 23
23	34 7746	34 85	12 25 2	107 56	73	52 3352	35 40	39 25 2	109 26
24	35 1231	34 86	12 57 6	107 59	74	52 6892	35 42	39 57 6	109 32
25	35 4717	34 88	13 30 0	107 65	75	53 0434	35 43	40 30 0	109 35
70,26	1,435 8205	34 88	63 14 02 4	107 56	70,76	1,453 3977	35 43	63 41 02 4	109 35
27	36 1693	34 90	14 34 8	107 72	77	53 7520	35 45	41 34 8	109 41
28	36 5183	34 90	15 07 2	107 72	78	54 1065	35 46	42 07 2	109 44
29	36 8673	34 92	15 39 6	107 78	79	54 4611	35 48	42 39 6	109 51
30	37 2165	34 93	16 12 0	107 81	80	54 8159	35 48	43 12 0	109 51
70,31	1,437 5658	34 94	63 16 44 4	107 84	70,81	1,455 1707	35 49	63 43 44 4	109 54
32	37 9152	34 95	17 16 8	107 87	82	55 5256	35 51	44 16 8	109 60
33	38 2647	34 96	17 49 2	107 90	83	55 8807	35 52	44 49 2	109 63
34	38 6143	34 97	18 21 6	701 93	84	56 2359	35 52	45 21 6	109 63
35	38 9640	34 99	18 54 0	107 99	85	56 5911	35 54	45 54 0	109 69
70,36	1,439 3139	34 99	63 19 26 4	107 99	70,86	1,456 9465	35 56	63 46 26 4	109 75
37	39 6618	35 01	19 58 8	108 06	87	57 3021	35 56	46 58 8	109 75
38	40 0139	35 01	20 31 2	108 06	88	57 6577	35 57	47 31 2	109 78
39	40 3640	35 03	21 03 6	108 12	89	58 0134	35 59	48 03 6	109 85
40	40 7143	35 04	21 36 0	108 15	90	58 3693	35 59	48 36 0	109 85
70,41	1,441 0647	35 05	63 22 08 4	108 18	70,91	1,458 7252	35 61	63 49 08 4	109 91
42	41 4152	35 05	22 40 8	108 18	92	59 0813	35 62	49 40 8	109 94
43	41 7657	35 08	23 13 2	108 27	93	59 4375	35 63	50 13 2	190 97
44	42 1165	35 08	23 45 6	108 27	94	59 7938	35 64	50 45 6	110 00
45	42 4673	35 09	24 18 0	108 30	95	60 1502	35 65	51 18 0	110 03
70,46	1,442 8182	35 10	63 24 50 4	108 33	70,96	1,460 5067	35 67	63 51 50 4	110 09
47	43 1692	35 12	25 22 8	108 40	97	60 8634	35 68	52 22 8	110 12
48	43 5204	35 12	25 55 2	108 40	98	61 2202	35 68	52 55 2	110 12
49	43 8716	35 14	26 27 6	108 46	99	61 5770	35 70	53 27 6	110 19
50	44 2230		27 00 0		71,00	61 9340		54 00 0	

N. E.		Alte Einth.				N. E.		Alte Einth.			
$k=71°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.	$k=71°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.				Gr. M. S.		Gr. M.				Gr. M. S.	
71,00	1,461 9340	35	71	63 54 00 0	110 22	71,50	1,479 9313	36	29	64 21 00 0	112 01
71,01	1,462 2911	35	73	63 54 32 4	110 28	71,51	1,480 2942	36	31	64 21 32 4	112 07
02	62 6484	35	73	55 04 8	110 28	52	80 6573	36	32	22 04 8	112 10
03	63 0057	35	75	55 37 2	110 34	53	81 0205	36	33	22 37 2	112 13
04	63 3632	35	75	56 09 6	110 34	54	81 3838	36	34	23 09 6	112 16
05	63 7207	35	77	56 42 0	110 40	55	81 7472	36	35	23 42 0	112 19
71,06	1,464 0784	35	78	63 57 14 4	110 43	71,56	1,482 1107	36	77	64 24 14 4	112 25
07	64 4362	35	79	57 46 8	110 46	57	82 4744	36	37	24 46 8	112 25
08	64 7941	35	80	58 19 2	110 49	58	82 8381	36	39	25 19 2	112 31
09	65 1521	35	82	58 51 6	110 56	59	83 2020	36	40	25 51 6	112 35
10	65 5103	35	82	59 24 0	110 56	60	83 5660	36	42	26 24 0	112 41
71,11	1,465 8685	35	84	63 59 56 4	110 62	71,61	1,483 9302	36	42	64 26 56 4	112 41
12	66 2269	35	85	64 00 28 8	110 65	62	84 2944	36	44	27 28 8	112 47
13	66 5854	35	86	01 01 2	110 68	63	84 6588	36	45	28 01 2	112 50
14	66 9440	35	87	01 33 6	110 71	64	85 0233	36	46	28 33 6	112 53
15	67 3027	35	88	02 06 0	110 74	65	85 3879	36	47	29 06 0	112 56
71,16	1,467 6615	35	90	64 02 38 4	110 80	71,66	1,485 7526	36	48	64 29 38 4	112 59
17	68 0205	35	90	03 10 8	110 80	67	86 1174	36	50	30 10 8	112 55
18	68 3795	35	92	03 43 2	110 86	68	86 4824	36	51	30 43 2	112 69
19	68 7387	35	93	04 15 6	110 90	69	86 8475	36	52	31 15 6	112 72
20	69 0980	35	94	04 48 0	110 93	70	87 2127	36	53	31 48 0	112 75
71,21	1,469 4574	35	96	64 05 20 4	110 99	71,71	1,487 5780	36	55	64 32 20 4	112 81
22	69 8170	35	96	05 52 8	110 99	72	87 9435	36	55	32 52 8	112 81
23	70 1766	35	98	06 25 2	111 05	73	88 3090	36	57	33 25 2	112 87
24	70 5364	35	98	06 57 6	111 05	74	88 6747	36	58	33 57 6	112 90
25	70 8962	36	00	07 30 0	111 11	75	89 0405	36	60	34 30 0	112 96
71,26	1,471 2562	36	01	64 08 02 4	111 14	71,76	1,489 4065	36	60	64 35 02 4	112 96
27	71 6163	36	03	08 34 8	111 20	77	89 7725	36	62	35 34 8	113 02
28	71 9766	36	03	09 07 2	111 20	78	90 1387	36	63	36 07 2	113 06
29	72 3369	36	05	09 39 6	111 27	79	90 5050	36	64	36 39 6	113 09
30	72 6974	36	06	10 12 0	111 30	80	90 8714	36	66	37 12 0	113 15
71,31	1,473 0580	36	07	64 10 44 4	111 33	71,81	1,491 2380	36	66	64 37 44 4	113 15
32	73 4187	36	08	11 16 8	111 36	82	91 6046	36	68	38 16 8	113 21
33	73 7795	36	09	11 49 2	111 39	83	91 9714	36	69	38 49 2	113 24
34	74 1404	36	10	12 21 6	111 42	84	92 3383	36	70	39 21 6	113 27
35	74 5014	36	12	12 54 0	111 48	85	92 7053	36	72	39 54 0	113 33
71,36	1,474 8626	36	13	64 13 26 4	111 51	71,86	1,493 0725	36	73	64 40 26 4	113 36
37	75 2239	36	14	13 58 8	111 54	87	93 4398	36	74	40 58 8	113 40
38	75 5853	36	15	14 31 2	111 57	88	93 8072	36	75	41 31 2	113 43
39	75 9468	36	17	15 03 6	111 64	89	94 1747	36	76	42 03 6	113 46
40	76 3085	36	17	15 36 0	111 64	90	94 5423	36	78	42 36 0	113 52
71,41	1,476 6702	36	19	64 16 08 4	111 70	71,91	1,494 9101	36	78	64 43 08 4	113 52
42	77 0321	36	20	16 40 8	111 73	92	95 2779	36	80	43 40 8	113 58
43	77 3941	36	21	17 13 2	111 76	93	95 6459	36	82	44 13 2	113 64
44	77 7562	36	22	17 45 6	111 79	94	96 0141	36	82	44 45 6	113 64
45	78 1184	36	23	18 18 0	111 82	95	96 3823	63	84	45 18 0	113 70
71,46	1,478 4807	36	25	64 18 50 4	111 88	71,96	1,496 7507	36	85	64 45 50 4	113 73
47	78 8432	36	26	19 22 8	111 91	97	97 1192	36	86	46 22 8	113 77
48	79 2058	36	27	19 55 2	111 94	98	97 4878	36	87	46 55 2	113 80
49	79 5685	36	28	20 27 6	111 98	99	97 8565	36	89	47 27 6	113 86
50	79 9313			21 00 0		72,00	98 2254			48 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=72°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	Gr. M. S.		D. 1″.
Gr. M.					
72,00	1,498 2254	36 90	64 48 00 0	113 89	
72,01	1,498 5944	36 91	64 48 32 4	113 92	
02	98 9635	36 92	49 04 8	113 95	
03	99 3327	36 94	49 37 2	114 01	
04	1,499 7021	36 94	50 09 6	114 01	
05	1,500 0715	36 96	50 42 0	114 07	
72,06	1,500 4411	36 98	64 51 14 4	114 14	
07	00 8109	36 98	51 46 8	114 14	
08	01 1807	37 00	52 19 2	114 20	
09	01 5507	37 01	52 51 6	114 23	
10	01 9208	37 02	53 24 0	114 26	
72,11	1,502 2910	37 03	64 53 56 4	114 29	
12	02 6613	37 05	54 28 8	114 35	
13	03 0318	37 06	55 01 2	114 38	
14	03 4024	37 07	55 33 6	114 41	
15	03 7731	37 09	56 06 0	114 48	
72,16	1,504 1440	37 09	64 56 38 4	114 48	
17	04 5149	37 11	57 10 8	114 54	
18	04 8860	37 12	57 43 2	114 57	
19	05 2572	37 14	58 15 6	114 63	
20	05 6286	37 15	58 48 0	114 66	
72,21	1,506 0001	37 15	64 59 20 4	114 66	
22	06 3716	37 18	64 59 52 8	114 75	
23	06 7434	37 18	65 00 25 2	114 75	
24	07 1152	37 20	00 57 6	114 81	
25	07 4872	37 21	01 30 0	114 85	
72,26	1,507 8593	37 22	65 02 02 4	114 88	
27	08 2315	37 23	02 34 8	114 91	
28	08 6038	37 25	03 07 2	114 97	
29	08 9763	37 26	03 39 6	115 00	
30	09 3489	37 27	04 12 0	115 03	
72,31	1,509 7216	37 29	65 04 44 4	115 09	
32	10 0945	37 29	05 16 8	115 09	
33	10 4674	37 31	05 49 2	115 14	
34	10 8405	37 33	06 21 6	115 22	
35	11 2138	37 33	06 54 0	115 22	
72,36	1,511 5871	37 35	65 07 26 4	115 28	
37	11 9606	37 36	07 58 8	115 31	
38	12 3342	37 37	08 31 2	115 34	
39	12 7079	37 39	09 03 6	115 40	
40	13 0818	37 40	09 36 0	115 43	
72,41	1,513 4558	37 41	65 10 08 4	115 46	
42	13 8299	37 42	10 40 8	115 49	
43	14 2041	37 44	11 13 2	115 56	
44	14 5785	37 45	11 45 6	115 59	
45	14 9530	37 46	12 18 0	115 62	
72,46	1,515 3276	37 48	65 12 50 4	115 68	
47	15 7024	37 48	13 22 8	115 68	
48	16 0772	37 50	13 55 2	115 74	
49	16 4522	37 52	14 27 6	115 80	
50	16 8274		15 00 0		

N. E		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=72°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	Gr. M. S.		D. 1″.
Gr. M.					
72,50	1,516 8274	37 52	65 15 00 0	115 80	
72,51	1,517 2026	37 54	65 15 32 4	115 86	
52	17 5780	37 55	16 04 8	115 90	
53	17 9535	37 57	16 37 2	115 96	
54	18 3292	37 58	17 09 6	115 99	
55	18 7050	37 59	17 42 0	116 02	
72,56	1,519 0809	37 60	65 18 14 4	116 05	
57	19 4569	37 62	18 46 8	116 11	
58	19 8331	37 62	19 19 2	116 11	
59	20 2093	37 65	19 51 6	116 20	
60	20 5858	37 65	20 24 0	116 20	
72,61	1,520 9623	37 67	65 20 56 4	116 27	
62	21 3390	37 68	21 28 8	116 30	
63	21 7158	37 69	22 01 2	116 33	
64	22 0927	37 71	22 33 6	116 39	
65	22 4698	37 71	23 06 0	116 39	
72,66	1,522 8469	37 74	65 23 38 4	116 48	
67	23 2243	37 74	24 10 8	116 48	
68	23 6017	37 76	24 43 2	116 54	
69	23 9793	37 77	25 15 6	116 57	
70	24 3570	37 78	25 48 0	116 60	
72,71	1,524 7348	37 80	65 26 20 4	116 67	
72	25 1128	37 81	26 52 8	116 70	
73	25 4909	37 82	27 25 2	116 73	
74	25 8691	37 84	27 57 6	116 79	
75	26 2475	37 85	28 30 0	116 82	
72,76	1,526 6260	37 86	65 29 02 4	116 85	
77	27 0046	37 88	29 34 8	116 91	
78	27 3834	37 88	30 07 2	116 91	
79	27 7622	37 90	30 39 6	116 98	
80	28 1412	37 92	31 12 0	117 04	
72,81	1,528 5204	37 92	65 31 44 4	117 04	
82	28 8996	37 94	32 16 8	117 10	
83	29 2790	37 96	32 49 2	117 16	
84	29 6586	37 96	33 21 6	117 16	
85	30 0382	37 98	33 54 0	117 22	
72,86	1,530 4180	38 00	65 34 26 4	117 28	
87	30 7980	38 00	34 58 8	117 28	
88	31 1780	38 02	35 31 2	117 35	
89	31 5582	38 03	36 03 6	117 38	
90	31 9385	38 05	36 36 0	117 44	
72,91	1,532 3190	38 06	65 37 08 4	117 47	
92	32 6996	38 07	37 40 8	117 50	
93	33 0803	38 09	38 13 2	117 56	
94	33 4612	38 09	38 45 6	117 56	
95	33 8421	38 12	39 18 0	117 65	
72,96	1,534 2233	38 12	65 39 50 4	117 65	
97	34 6045	38 14	40 22 8	117 72	
98	34 9859	38 15	40 55 2	117 75	
99	35 3674	38 16	41 27 6	117 78	
73,00	35 7490		42 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=73°$	ϱ. k.	D. 1″.			D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.			
73,00	1,535 7490	38 18	65 42 00 0		117 84	
73,01	1,536 1308	38 19	65 42 32 4		117 87	
02	36 5127	38 21	43 04 8		117 93	
03	36 8948	38 21	43 37 2		117 93	
04	37 2769	38 24	44 09 6		118 02	
05	37 6593	38 24	44 42 0		118 02	
73,06	1,538 0417	38 26	65 45 14 4		118 09	
07	38 4243	38 27	45 46 8		118 12	
08	38 8070	38 28	46 19 2		118 15	
09	39 1898	38 30	46 51 6		118 21	
10	39 5728	38 31	47 24 0		118 24	
73,11	1,539 9559	38 33	65 47 56 4		118 30	
12	40 3392	38 33	48 28 8		118 30	
13	40 7225	38 36	49 01 2		118 40	
14	41 1061	38 36	49 33 6		118 40	
15	41 4897	38 38	50 06 0		118 46	
73,16	1,541 8735	38 39	65 50 38 4		118 49	
17	42 2574	38 41	51 10 8		118 55	
18	42 6415	38 41	51 43 2		118 55	
19	43 0256	38 44	52 15 6		118 64	
20	43 4100	38 44	52 48 0		118 64	
73,21	1,543 7944	38 46	65 53 20 4		118 70	
22	44 1790	38 47	53 52 8		118 73	
23	44 5637	38 49	54 25 2		118 80	
24	44 9486	38 50	54 57 6		118 83	
25	45 3336	38 51	55 30 0		118 86	
73,26	1,545 7187	38 53	65 56 02 4		118 92	
27	46 1040	38 54	56 34 8		118 95	
28	46 4894	38 55	57 07 2		118 98	
29	46 8749	38 57	57 39 6		119 04	
30	47 2606	38 58	58 12 0		119 07	
73,31	1,547 6464	38 59	65 58 44 4		119 10	
32	48 0323	38 61	59 16 8		119 17	
33	48 4184	38 62	65 59 49 2		119 20	
34	48 8046	38 64	66 00 21 6		119 26	
35	49 1910	38 65	00 54 0		119 29	
73,36	1,549 5775	38 66	66 01 26 4		119 32	
37	49 9641	38 68	01 58 8		119 38	
38	50 3509	38 69	02 31 2		119 41	
39	50 7378	38 70	03 03 6		119 44	
40	51 1248	38 72	03 36 0		119 51	
73,41	1,551 5120	38 73	66 04 08 4		119 54	
42	51 8993	38 75	04 40 8		119 60	
43	52 2868	38 75	05 13 2		119 60	
44	52 6743	38 78	05 45 6		119 69	
45	53 0621	38 78	06 18 0		119 69	
73,46	1,553 4499	38 80	66 06 50 4		119 75	
47	53 8379	38 82	07 22 8		119 81	
48	54 2261	38 82	07 55 2		119 81	
49	54 6143	38 84	08 27 6		119 88	
50	55 0027		09 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=73°$	ϱ. k.	D. 1″.			D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.			
73,50	1,555 0027	38 86	66 09 00 0		119 94	
73,51	1,555 3913	38 87	66 09 32 4		119 97	
52	55 7800	38 88	10 04 8		120 00	
53	56 1688	38 90	10 37 2		120 06	
54	56 5578	38 91	11 09 6		120 09	
55	56 9469	38 92	11 42 0		120 12	
73,56	1,557 3361	38 94	66 12 14 4		120 19	
57	57 7255	38 95	12 46 8		120 22	
58	58 1150	38 97	13 19 2		120 28	
59	58 5047	38 98	13 51 6		120 31	
60	58 8945	38 99	14 24 0		120 34	
73,61	1,559 2844	39 01	66 14 56 4		120 40	
62	59 6745	39 02	15 28 8		120 43	
63	60 0647	39 03	16 01 2		120 46	
64	60 4550	39 05	16 33 6		120 52	
65	60 8455	39 07	17 06 0		120 59	
73,66	1,561 2362	39 08	66 17 38 4		120 62	
67	61 6270	39 09	18 10 8		120 65	
68	62 0179	39 10	18 43 2		120 68	
69	62 4089	39 12	19 15 6		120 74	
70	62 8001	39 14	19 48 0		120 80	
73,71	1,563 1915	39 14	66 20 20 4		120 80	
72	63 5829	39 16	20 52 8		120 86	
73	63 9745	39 18	21 25 2		120 93	
74	64 3663	39 19	21 57 6		120 96	
75	64 7582	39 20	22 30 0		120 99	
73,76	1,565 1502	39 22	66 23 02 4		121 05	
77	65 5424	39 23	23 34 8		121 08	
78	65 9347	39 25	24 07 2		121 14	
79	66 3272	39 26	24 39 6		121 17	
80	66 7198	39 27	25 12 0		121 20	
73,81	1,567 1125	39 29	66 25 44 4		121 27	
82	67 5054	39 30	26 16 8		121 30	
83	67 8984	39 32	26 49 2		121 36	
84	68 2916	39 33	27 21 6		121 39	
85	68 6849	39 34	27 54 0		121 42	
73,86	1,569 0783	39 36	66 28 26 4		121 48	
87	69 4719	39 38	28 58 8		121 54	
88	69 8657	39 38	29 31 2		121 54	
89	70 2595	39 41	30 03 6		121 64	
90	70 6536	39 41	30 36 0		121 64	
73,91	1,571 0477	39 43	66 31 08 4		121 70	
92	71 4420	39 45	31 40 8		121 76	
93	71 8365	39 45	32 13 2		121 76	
94	72 2310	39 48	32 45 6		121 85	
95	72 6258	39 49	33 18 0		121 88	
73,96	1,573 0207	39 50	66 33 50 4		121 91	
97	73 4157	39 51	34 22 8		121 94	
98	73 8108	39 53	34 55 2		122 01	
99	74 2061	39 55	35 27 6		122 07	
74,00	74 6016		36 00 0			

N. E. $k=74°$	ϱ. k.	Alte Einth. D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
74,00	1,574 6016	39 56	66 36 00 0	122 16
74,01	1,574 9972	39 57	66 36 32 4	122 13
02	75 3929	39 59	37 04 8	122 19
03	75 7888	39 60	37 37 2	122 22
04	76 1848	39 62	38 09 6	122 28
05	76 5810	39 63	38 42 0	122 31
74,06	1,576 9773	39 64	66 39 14 4	122 35
07	77 3737	39 66	39 46 8	122 41
08	77 7703	39 68	40 19 2	122 47
09	78 1671	39 69	40 51 6	122 50
10	78 5640	39 70	41 24 0	122 53
74,11	1,578 9610	39 72	66 41 56 4	122 59
12	79 3582	39 73	42 28 8	122 62
13	79 7555	39 75	43 01 2	122 69
14	80 1530	39 76	43 33 6	122 72
15	80 5506	39 77	44 06 0	122 75
74,16	1,580 9483	39 79	66 44 38 4	122 81
17	81 3462	39 81	45 10 8	122 87
18	81 7443	39 82	45 43 2	122 90
19	82 1425	39 83	46 15 6	122 93
20	82 5408	39 85	46 48 0	122 99
74,21	1,582 9393	39 87	66 47 20 4	123 06
22	83 3380	39 87	47 52 8	123 06
23	83 7367	39 90	48 25 2	123 15
24	84 1357	39 90	48 57 6	123 15
25	84 5347	39 92	49 30 0	123 21
74,26	1,584 9339	39 94	66 50 02 4	123 27
27	85 3333	39 95	50 34 8	123 30
28	85 7328	39 97	51 07 2	123 36
29	86 1325	39 98	51 39 6	123 40
30	86 5323	39 99	52 12 0	123 43
74,31	1,586 9322	40 01	66 52 44 4	123 49
32	87 3323	40 03	53 16 8	123 55
33	87 7326	40 04	53 49 2	123 58
34	88 1330	40 05	54 21 6	123 61
35	88 5335	40 07	54 54 0	123 67
74,36	1,588 9342	40 08	66 55 26 4	123 70
37	89 3350	40 10	55 58 8	123 77
38	89 7360	40 12	56 31 2	123 83
39	90 1372	40 12	57 03 6	123 83
40	90 5384	40 15	57 36 0	123 92
74,41	1,590 9399	40 15	66 58 08 4	123 92
42	91 3414	40 18	58 40 8	124 01
43	91 7432	40 18	59 13 2	124 01
44	92 1450	40 21	66 59 45 6	124 10
45	92 5471	40 21	67 00 18 0	124 10
74,46	1,592 9492	40 24	67 00 50 4	124 20
47	93 3516	40 24	01 22 8	124 20
48	93 7540	40 27	01 55 2	124 29
49	94 1567	40 27	02 27 6	124 29
50	94 5594		03 00 0	

N. E. $k=74°$	ϱ. k.	Alte Einth. D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
74,50	1,594 5594	40 29	67 03 00 0	124 35
74,51	1,594 9623	40 31	67 03 32 4	124 41
52	95 3654	40 32	04 04 8	124 44
53	95 7686	40 34	04 37 2	124 51
54	96 1720	40 35	05 09 6	124 54
55	96 5755	40 37	05 42 0	124 60
74,56	1,596 9792	40 38	67 06 14 4	124 63
57	97 3830	40 39	06 46 8	124 66
58	97 7869	40 41	07 19 2	124 72
59	98 1910	40 43	07 51 6	124 78
60	98 5953	40 45	08 24 0	124 85
74,61	1,598 9998	40 45	67 08 56 4	124 85
62	99 4043	40 47	09 28 8	124 91
63	1,599 8090	40 49	10 01 2	124 97
64	1,600 2139	40 50	10 33 6	125 00
65	00 6189	40 52	11 06 0	125 06
74,66	1,601 0241	40 53	67 11 38 4	125 09
67	01 4294	40 55	12 10 8	125 15
68	01 8349	40 56	12 43 2	125 19
69	02 2405	40 58	13 15 6	125 25
70	02 6463	40 60	13 48 0	125 31
74,71	1,603 0523	40 60	67 14 20 4	125 31
72	03 4583	40 63	14 52 8	125 40
73	03 8646	40 64	15 26 2	125 43
74	04 2710	40 65	15 57 6	125 46
75	04 6775	40 67	16 30 0	125 52
74,76	1,605 0842	40 68	67 17 02 4	125 56
77	05 4910	40 70	17 34 8	125 62
78	05 8980	40 72	18 07 2	125 68
79	06 3052	40 73	18 39 6	125 71
80	06 7125	40 75	19 12 0	125 77
74,81	1,607 1200	40 76	67 19 44 4	125 80
82	07 5276	40 77	20 16 8	125 83
83	07 9353	40 80	20 49 2	125 93
84	08 3433	40 80	21 21 6	125 93
85	08 7513	40 83	21 54 0	126 02
74,86	1,609 1596	40 83	67 22 26 4	126 02
87	09 5679	40 86	22 58 8	126 11
88	09 9765	40 87	23 31 2	126 14
89	10 3852	40 88	24 03 6	126 17
90	10 7940	40 90	24 36 0	126 23
74,91	1,611 2030	40 91	67 25 08 4	126 27
92	11 6121	40 94	25 40 8	126 36
93	12 0215	40 94	26 13 2	126 36
94	12 4309	40 96	26 45 6	126 42
95	12 8405	40 98	27 18 0	126 48
74,96	1,613 2503	40 99	67 27 50 4	126 51
97	13 6602	41 01	28 22 8	126 57
98	14 0703	41 02	28 55 2	126 60
99	14 4805	41 04	29 27 6	126 67
75,00	14 8909		30 00 0	

N. E.		Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.		
$k=75°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=75°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
75,00	1,614 8909	41 06	67 30 00 0	126 73	75,50	1,635 6117	41 85	67 57 00 0	129 17
75,01	1,615 3015	41 07	67 30 32 4	126 76	75,51	1,636 0302	41 86	67 57 32 4	129 20
02	15 7122	41 08	31 04 8	126 79	52	36 4488	41 88	58 04 8	129 26
03	16 1230	41 10	31 37 2	126 85	53	36 8676	41 90	58 37 2	129 32
04	16 5340	41 12	32 09 6	126 91	54	37 2866	41 92	59 09 6	129 38
05	16 9452	41 13	32 42 0	126 94	55	37 7058	41 93	67 59 42 0	129 41
75,06	1,617 3565	41 15	67 33 14 4	127 01	75,56	1,638 1251	41 95	68 00 14 4	129 48
07	17 7680	41 17	33 46 8	127 07	57	38 5446	41 96	00 46 8	129 51
08	18 1797	41 18	34 19 2	127 10	58	38 9642	41 98	01 19 2	129 57
09	18 5915	41 19	34 51 6	127 13	59	39 3840	41 99	01 51 6	129 60
10	19 0034	41 21	35 24 0	127 19	60	39 8039	42 02	02 24 0	129 69
75,11	1,619 4155	41 23	67 35 56 4	127 25	75,61	1,640 2241	42 03	68 02 56 4	129 72
12	19 8278	41 24	36 28 8	127 28	62	40 6444	42 04	03 28 8	129 75
13	20 2402	41 26	37 01 2	127 35	63	41 0648	42 06	04 01 2	129 81
14	20 6528	41 27	37 33 6	127 38	64	41 4854	42 08	04 33 6	129 88
15	21 0655	41 29	38 06 0	127 44	65	41 9062	42 10	05 06 0	129 94
75,16	1,621 4784	41 31	67 38 38 4	127 50	75,66	1,642 3272	42 11	68 05 38 4	129 97
17	21 8915	41 32	39 10 8	127 53	67	42 7483	42 12	06 10 8	130 00
18	22 3047	41 34	39 43 2	127 59	68	43 1695	42 15	06 43 2	130 09
19	22 7181	41 35	40 15 6	127 62	69	43 5910	42 16	07 15 6	130 12
20	23 1316	41 37	40 48 0	127 69	70	44 0126	42 18	07 48 0	130 19
75,21	1,623 5453	41 38	67 41 20 4	127 72	75,71	1,644 4344	42 19	68 08 20 4	130 22
22	23 9591	41 40	41 52 8	127 78	72	44 8563	42 21	08 52 8	130 28
23	24 3731	41 42	42 25 2	127 84	73	45 2784	42 23	09 25 2	130 34
24	24 7873	41 43	42 57 6	127 87	74	45 7007	42 24	09 57 6	130 37
25	25 2016	41 45	43 30 0	127 93	75	46 1231	42 26	10 30 0	130 43
75,26	1,625 6161	41 46	67 44 02 4	127 96	75,76	1,646 5457	42 28	68 11 02 4	130 49
27	26 0307	41 48	44 34 8	128 02	77	46 9685	42 29	11 34 8	130 52
28	26 4455	41 50	45 07 2	128 09	78	47 3914	42 31	12 07 2	130 59
29	26 8605	41 51	45 39 6	128 12	79	47 8145	42 33	12 39 6	130 65
30	27 2756	41 53	46 12 0	128 18	80	48 2378	42 34	13 12 0	130 68
75,31	1,627 6909	41 54	67 46 44 4	128 21	75,81	1,648 6612	42 36	68 13 44 4	130 74
32	28 1063	41 56	47 16 8	128 27	82	49 0848	42 37	14 16 8	130 77
33	28 5219	41 58	47 49 2	128 33	83	49 5085	42 40	14 49 2	130 86
34	28 9377	41 59	48 21 6	128 36	84	49 9325	42 41	15 21 6	130 90
35	29 3536	41 61	48 54 0	128 43	85	50 3566	42 42	15 54 0	130 93
75,36	1,629 7697	41 62	67 49 26 4	128 46	75,86	1,650 7808	42 45	68 16 26 4	131 02
37	30 1859	41 64	49 58 8	128 52	87	51 2053	42 46	16 58 8	131 05
38	30 6023	41 66	50 31 2	128 58	88	51 6299	42 47	17 31 2	131 08
39	31 0189	41 67	51 03 6	128 61	89	52 0546	42 50	18 03 6	131 17
40	31 4356	41 69	51 36 0	128 67	90	52 4796	42 51	18 36 0	131 20
75,41	1,631 8525	41 70	67 52 08 4	128 70	75,91	1,652 9047	42 52	68 19 08 4	131 23
42	32 2695	41 72	52 40 8	128 77	92	53 3299	42 55	19 40 8	131 33
43	32 6867	41 74	53 13 2	128 83	93	53 7554	42 56	20 13 2	131 36
44	33 1041	41 75	53 45 6	128 86	94	54 1810	42 57	20 45 6	131 39
45	33 5216	41 77	54 18 0	128 92	95	54 6067	42 60	21 18 0	131 48
75,46	1,633 9393	41 78	67 54 50 4	128 95	75,96	1,655 0327	42 61	68 21 50 4	131 51
47	34 3571	41 81	55 22 8	129 04	97	55 4588	42 63	22 22 8	131 57
48	34 7752	41 81	55 55 2	129 04	98	55 8851	42 64	22 55 2	131 60
49	35 1933	41 84	56 27 6	129 14	99	56 3115	42 66	23 27 6	131 67
50	35 6117		57 00 0		76,00	56 7381		24 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=76°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		
Gr. M.			Gr. M. S.			
76,00	1,656 7381	42 68	68 24 00 0	131 73		
76,01	1,657 1649	42 70	68 24 32 4	131 79		
02	57 5919	42 71	25 04 8	131 82		
03	58 0190	42 73	25 37 2	131 88		
04	58 4463	42 75	26 09 6	131 94		
05	58 8738	42 76	26 42 0	131 98		
76,06	1,659 3014	42 78	68 27 14 4	132 04		
07	59 7292	42 80	27 46 8	132 10		
08	60 1572	42 81	28 19 2	132 13		
09	60 5853	42 83	28 51 6	132 19		
10	61 0136	42 85	29 24 0	132 25		
76,11	1,661 4421	42 87	68 29 56 4	132 31		
12	61 8708	42 88	30 28 8	132 35		
13	62 2996	42 90	31 01 2	132 41		
14	62 7286	42 92	31 33 6	132 47		
15	63 1578	42 93	32 06 0	132 50		
76,16	1,663 5871	42 95	68 32 38 4	132 56		
17	64 0166	42 97	33 10 8	132 62		
18	64 4463	42 99	33 43 2	132 69		
19	64 8762	43 00	34 15 6	132 72		
20	65 3062	43 02	34 48 0	132 78		
76,21	1,665 7364	43 04	68 35 20 4	132 84		
22	66 1668	43 06	35 52 8	132 90		
23	66 5974	43 07	36 25 2	132 93		
24	67 0281	43 09	36 57 6	132 99		
25	67 4590	43 10	37 30 0	133 02		
76,26	1,667 8900	43 13	68 38 02 4	133 12		
27	68 3213	43 14	38 34 8	133 15		
28	68 7527	43 16	39 07 2	133 21		
29	69 1843	43 18	39 39 6	133 28		
30	69 6161	43 19	40 12 0	133 30		
76,31	1,670 0480	43 21	68 40 44 4	133 36		
32	70 4801	43 23	41 16 8	133 43		
33	70 9124	43 24	41 49 2	133 46		
34	71 3448	43 27	42 21 6	133 55		
35	71 7775	43 28	42 54 0	133 58		
76,36	1,672 2103	43 29	68 43 26 4	133 61		
37	72 6432	43 32	43 58 8	133 70		
38	73 0764	43 33	44 31 2	133 73		
39	73 5097	43 35	45 03 6	133 80		
40	73 9432	43 37	45 36 0	133 86		
76,41	1,674 3769	43 38	68 46 08 4	133 89		
42	74 8107	43 41	46 40 8	133 98		
43	75 2448	43 42	47 13 2	134 01		
44	75 6790	43 44	47 45 6	134 07		
45	76 1134	43 45	48 18 0	134 10		
76,46	1,676 5479	43 48	68 48 50 4	134 20		
47	76 9827	43 49	49 22 8	134 23		
48	77 4176	43 51	49 55 2	134 29		
49	77 8527	43 52	50 27 6	134 32		
50	78 2879		51 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=76°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		
Gr. M.			Gr. M. S.			
76,50	1,678 2879	43 55	68 51 00 0	134 41		
76,51	1,678 7234	43 56	68 51 32 4	134 44		
52	79 1590	43 58	52 04 8	134 51		
53	79 5948	43 60	52 37 2	134 57		
54	80 0308	43 61	53 09 6	134 60		
55	80 4669	43 63	53 42 0	134 66		
76,56	1,680 9032	43 65	68 54 14 4	134 72		
57	81 3397	43 67	54 46 8	134 78		
58	81 7764	43 69	55 19 2	134 85		
59	82 2133	43 70	55 51 6	134 88		
60	82 6503	43 72	56 24 0	134 94		
76,61	1,683 0875	43 74	68 56 56 4	135 00		
62	83 5249	43 76	57 28 8	135 06		
63	83 9625	43 77	58 01 2	135 09		
64	84 4002	43 80	58 33 6	135 19		
65	84 8382	43 81	59 06 0	135 22		
76,66	1,685 2763	43 83	68 59 38 4	135 28		
67	85 7146	43 84	69 00 10 8	135 31		
68	86 1530	43 87	00 43 2	135 40		
69	86 5917	43 88	01 15 6	135 43		
70	87 0305	43 90	01 48 0	135 49		
76,71	1,687 4695	43 92	69 02 20 4	135 56		
72	87 9087	43 94	02 52 8	135 62		
73	88 3481	43 95	03 25 2	135 65		
74	88 7876	43 98	03 57 6	135 74		
75	89 2274	43 99	04 30 0	135 77		
76,76	1,689 6673	44 01	69 05 02 4	135 83		
77	90 1074	44 02	05 34 8	135 86		
78	90 5476	44 05	06 07 2	135 96		
79	90 9881	44 06	06 39 6	135 99		
80	91 4287	44 08	07 12 0	136 05		
76,81	1,691 8695	44 10	69 07 44 4	136 11		
82	92 3105	44 12	08 16 8	136 17		
83	92 7517	44 14	08 49 2	136 23		
84	93 1931	44 15	09 21 6	136 27		
85	93 6346	44 17	09 54 0	136 33		
76,86	1,694 0763	44 20	69 10 26 4	136 42		
87	94 5183	44 20	10 58 8	136 42		
88	94 9603	44 23	11 31 2	136 51		
89	95 4026	44 25	12 03 6	136 57		
90	95 8451	44 26	12 36 0	136 60		
76,91	1,696 2877	44 28	69 13 08 4	136 67		
92	96 7305	44 31	13 40 8	136 76		
93	97 1736	44 31	14 13 2	136 76		
94	97 6167	44 34	14 45 6	136 85		
95	98 0601	44 36	15 18 0	136 91		
76,96	1,698 5037	44 36	69 15 50 4	136 91		
97	98 9473	44 40	16 22 8	137 04		
98	99 3913	44 41	16 55 2	137 07		
99	99 8354	44 43	17 27 6	137 13		
77,00	1,700 2797		18 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.				
$k=77°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.	$k=77°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M.	S.		Gr. M.			Gr. M.	S.	
77,00	1,700 2797	44 45	69	18 00 0	137 19	77,50	1,722 7335	45 39	69	45 00 0	140 09
77,01	1,700 7242	44 47	69	18 32 4	137 25	77,51	1,723 1874	45 42	69	45 32 4	140 19
02	01 1698	44 48		19 04 8	137 28	52	23 6416	45 43		46 04 8	140 22
03	01 6137	44 51		19 37 2	137 38	53	24 0959	45 45		46 37 2	140 28
04	02 0588	44 52		20 09 6	137 41	54	24 5504	45 47		47 09 6	140 34
05	02 5040	44 54		20 42 0	137 47	55	25 0051	45 49		47 42 0	140 40
77,06	1,702 9494	44 56	69	21 14 4	137 53	77,56	1,725 4600	45 51	69	48 14 4	140 46
07	03 3950	44 58		21 46 8	137 59	57	25 9151	45 53		48 46 8	140 52
08	03 8408	44 59		22 19 2	137 62	58	26 3704	45 54		49 19 2	140 56
09	04 2867	44 62		22 51 6	137 72	59	26 8258	45 57		49 51 6	140 65
10	04 7329	44 63		23 24 0	137 75	60	27 2815	45 59		50 24 0	140 71
77,11	1,705 1792	44 65	69	23 56 4	137 81	77,61	1,727 7374	45 61	69	50 56 4	140 77
12	05 6257	44 68		24 28 8	137 90	62	28 1935	45 62		51 28 8	140 80
13	06 0725	44 69		25 01 2	137 93	63	28 6207	45 65		52 01 2	140 89
14	06 5194	44 70		25 33 6	137 96	64	29 1062	45 66		52 33 6	140 93
15	06 9664	44 73		26 06 0	138 06	65	29 5628	45 69		53 06 0	141 02
77,16	1,707 4137	44 75	69	26 38 4	138 12	77,66	1,730 0197	45 70	69	53 38 4	141 05
17	07 8612	44 76		27 10 8	138 15	67	30 4767	45 73		54 10 8	141 24
18	08 3088	44 78		27 43 2	138 21	68	30 9340	45 74		54 43 2	141 17
19	08 7566	44 80		28 15 6	138 27	69	31 3914	45 77		55 15 6	141 27
20	09 2046	44 82		28 48 0	138 33	70	31 8491	45 78		55 48 0	141 30
77,21	1,709 6528	44 84	69	29 20 4	138 39	77,71	1,732 3069	45 80	69	56 20 4	141 36
22	10 1012	44 86		29 52 8	138 46	72	32 7649	45 82		56 52 8	141 42
23	10 5498	44 88		30 25 2	138 52	73	33 2231	45 85		57 25 2	141 51
24	10 9986	44 90		30 57 6	138 58	74	33 6816	45 86		57 57 6	141 54
25	11 4476	44 91		31 30 0	138 61	75	34 1402	45 88		58 30 0	141 60
77,26	1,711 8967	44 94	69	32 02 4	138 70	77,76	1,734 5990	45 90	69	59 02 4	141 67
27	12 3461	44 95		32 34 8	138 73	77	35 0580	45 92	69	59 34 8	141 73
28	12 7956	44 97		33 07 2	138 80	78	35 5172	45 95	70	00 07 2	141 82
29	13 2453	44 99		33 39 6	138 86	79	35 9767	45 96		00 39 6	141 85
30	13 6952	45 01		34 12 0	138 92	80	36 4363	45 98		01 12 0	141 91
77,31	1,714 1453	45 03	69	34 44 4	138 98	77,81	1,736 8961	46 00	70	01 44 4	141 98
32	14 5956	45 05		35 16 8	139 04	82	37 3561	46 02		02 16 8	142 04
33	15 0461	45 07		35 49 2	139 10	83	37 8163	46 04		02 49 2	142 10
34	15 4968	45 08		36 21 6	139 14	84	38 2767	46 06		03 21 6	142 16
35	15 9476	45 11		36 54 0	139 23	85	38 7373	46 08		03 54 0	142 22
77,36	1,716 3987	45 12	69	37 26 4	139 26	77,86	1,739 1981	46 10	70	04 26 4	142 28
37	16 8499	45 14		37 58 8	139 32	87	39 6591	46 12		04 58 8	142 35
38	17 3013	45 17		38 31 2	139 41	88	40 1203	46 14		05 31 2	142 41
39	17 7530	45 18		39 03 6	139 44	89	40 5817	46 16		06 03 6	142 47
40	18 2048	45 20		39 36 0	139 51	90	41 0433	46 19		06 36 0	142 56
77,41	1,718 6568	45 22	69	40 08 4	139 57	77,91	1,741 5052	46 20	70	07 08 4	142 59
42	19 1090	45 24		40 40 8	139 63	92	41 9672	46 22		07 40 8	142 65
43	19 5614	45 26		41 13 2	139 69	93	42 4294	46 24		08 13 2	142 72
44	20 0140	45 27		41 45 6	139 72	94	42 8918	46 26		08 45 6	142 78
45	20 4667	45 30		42 18 0	139 81	95	43 3544	46 28		09 18 0	142 84
77,46	1,720 9179	45 32	69	42 50 4	139 88	77,96	1,743 8172	46 30	70	09 50 4	142 90
47	21 3729	45 33		43 22 8	139 91	97	44 2802	46 32		10 22 8	142 96
48	21 8262	45 36		43 55 2	140 00	98	44 7434	46 34		10 55 2	143 02
49	22 2798	45 37		44 27 6	140 03	99	45 2068	46 36		11 27 6	143 09
50	22 7335			45 00 0		78,00	45 6704			12 00 0	

N. E.		Alte Einth.		Alte Einth.	
$k=78°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
78,00	1,745 6704	46 39	70 12 00 0	143 18	
78,01	1,746 1343	46 40	70 12 32 4	143 21	
02	46 5983	46 42	13 04 8	143 27	
03	47 0625	46 44	13 37 2	143 33	
04	47 5269	46 47	14 09 6	143 43	
05	47 9916	46 48	14 42 0	143 46	
78,06	1,748 4564	46 51	70 15 14 4	143 55	
07	48 9215	46 52	15 46 8	143 58	
08	49 3867	46 55	16 19 2	143 67	
09	49 8522	46 56	16 51 6	143 70	
10	50 3178	46 59	17 24 0	143 80	
78,11	1,750 7837	46 60	70 17 56 4	143 83	
12	51 2497	46 63	18 28 8	143 92	
13	51 7160	46 65	19 01 2	143 98	
14	52 1825	46 66	19 33 6	144 01	
15	52 6491	46 69	20 06 0	144 10	
78,16	1,753 1160	46 71	70 20 38 4	144 17	
17	53 5831	46 73	21 10 8	144 23	
18	54 0504	46 75	21 43 2	144 29	
19	54 5179	46 77	22 15 6	144 35	
20	54 9856	46 79	22 48 0	144 41	
78,21	1,755 4535	46 81	70 23 20 4	144 48	
22	55 9216	46 83	23 52 8	144 54	
23	56 3899	46 85	24 25 2	144 60	
24	56 8584	46 88	24 57 6	144 69	
25	57 3272	46 89	25 30 0	144 72	
78,26	1,757 7961	46 92	70 26 02 4	144 81	
27	58 2653	46 93	26 34 8	144 85	
28	58 7346	46 96	27 07 2	144 94	
29	59 2042	46 98	27 39 6	145 00	
30	59 6740	46 99	28 12 0	145 03	
78,31	1,760 1439	47 02	70 28 44 4	145 12	
32	60 6141	47 04	29 16 8	145 19	
33	61 0845	47 06	29 49 2	145 25	
34	61 5551	47 08	30 21 6	145 31	
35	62 0259	47 11	30 54 0	145 40	
78,36	1,762 4970	47 12	70 31 26 4	145 43	
37	62 9683	47 14	31 58 8	145 49	
38	63 4396	47 17	32 31 2	145 59	
39	63 9113	47 18	33 03 6	145 62	
40	64 3831	47 21	33 36 0	145 71	
78,41	1,764 8552	47 23	70 34 08 4	145 77	
42	65 3275	47 25	34 40 8	145 83	
43	65 8000	47 27	35 13 2	145 89	
44	66 2727	47 29	35 45 6	145 96	
45	66 7456	47 31	36 18 0	146 02	
78,46	1,767 2187	47 34	70 36 50 4	146 11	
47	67 6921	47 35	37 22 8	146 14	
48	68 1656	47 38	37 55 2	146 23	
49	68 6394	47 40	38 27 6	146 30	
50	69 1134		39 00 0		

N. E.		Alte Einth.		Alte Einth.	
$k=78°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
78,50	1,769 1134	47 41	70 39 00 0	146 33	
78,51	1,769 5875	47 43	70 39 32 4	146 42	
52	70 0619	47 46	40 04 8	146 48	
53	70 5365	47 49	40 37 2	146 57	
54	71 0114	47 50	41 09 6	146 60	
55	71 4864	47 52	41 42 0	146 67	
78,56	1,771 9616	47 55	70 42 14 4	146 76	
57	72 4371	47 57	42 46 8	146 82	
58	72 9128	47 59	43 19 2	146 88	
59	73 3887	47 60	43 51 6	146 91	
60	73 8647	47 64	44 24 0	147 04	
78,61	1,774 3411	47 65	70 44 56 4	147 07	
62	74 8176	47 67	45 28 8	147 13	
63	75 2943	47 70	46 01 2	147 22	
64	75 7713	47 72	46 33 6	147 28	
65	76 2485	47 74	47 06 0	147 35	
78,66	1,776 7259	47 76	70 47 38 4	147 41	
67	77 2035	47 78	48 10 8	147 47	
68	77 6813	47 80	48 43 2	147 53	
69	78 1593	47 83	49 15 6	147 62	
70	78 6376	47 84	49 48 0	147 65	
78,71	1,779 1160	47 87	70 50 20 4	147 75	
72	79 5947	47 89	50 52 8	147 81	
73	80 0736	47 92	51 25 2	147 90	
74	80 5528	47 93	51 57 6	147 93	
75	81 0321	47 95	52 30 0	147 99	
78,76	1,781 5116	47 98	70 53 02 4	148 09	
77	81 9914	48 00	53 34 8	148 15	
78	82 4714	48 02	54 07 2	148 21	
79	82 9516	48 04	54 39 6	148 27	
80	83 4320	48 06	55 12 0	148 33	
78,81	1,783 9126	48 09	70 55 44 4	148 40	
82	84 3935	48 11	56 16 8	148 49	
83	84 8746	48 13	56 49 2	148 55	
84	85 3559	48 15	57 21 6	148 61	
85	85 8374	48 17	57 54 0	148 67	
78,86	1,786 3191	48 20	70 58 26 4	148 77	
87	86 8011	48 21	58 58 8	148 80	
88	87 2832	48 24	70 59 31 2	148 89	
89	87 7656	48 27	71 00 03 6	148 98	
90	88 2483	48 28	00 36 0	149 01	
78,91	1,788 7311	48 31	71 01 08 4	149 10	
92	89 2142	48 32	01 40 8	149 14	
93	89 6974	48 35	02 13 2	149 23	
94	90 1809	48 37	02 45 6	149 29	
95	90 6646	48 40	03 18 0	149 38	
78,96	1,791 1486	48 41	71 03 50 4	149 41	
97	91 6327	48 44	04 22 8	149 51	
98	92 1171	48 46	04 55 2	149 57	
99	92 6017	48 48	05 27 6	149 63	
79,00	93 0865		06 00 0		

N. E.		Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.		
$k=79°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=79°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
79,00	1,793 0865	48 51	71 06 00 0	149 72	79,50	1,817 6161	49 65	71 33 00 0	153 24
79,01	1,793 5716	48 52	71 06 32 4	149 75	79,51	1,818 1126	49 67	71 33 32 4	153 30
02	94 0568	48 55	07 04 8	149 85	52	18 6093	49 69	34 04 8	153 36
03	94 5423	48 58	07 37 2	149 94	53	19 1062	49 72	34 37 2	153 46
04	95 0281	48 59	08 09 6	149 97	54	19 6034	49 73	35 09 6	153 49
05	95 5140	48 62	08 42 0	150 06	55	20 1007	49 77	35 42 0	153 61
79,06	1,796 0002	48 64	71 09 14 4	150 12	79,56	1,820 5984	49 78	71 36 14 4	153 64
07	96 4866	48 66	09 46 8	150 19	57	21 0962	49 81	36 46 8	153 73
08	96 9732	48 68	10 19 2	150 25	58	21 5943	49 83	37 19 2	153 80
09	97 4600	48 71	10 51 6	150 34	59	22 0926	49 86	37 51 6	153 89
10	97 9471	48 73	11 24 0	150 40	60	22 5912	49 88	38 24 0	153 95
79,11	1,798 4344	48 75	71 11 56 4	150 46	79,61	1,823 0900	49 90	71 38 56 4	154 01
12	98 9219	48 77	12 28 8	150 52	62	23 5890	49 93	39 28 8	154 10
13	99 4096	48 80	13 01 2	150 62	63	24 0883	49 95	40 01 2	154 17
14	1,799 8976	48 82	13 33 6	150 68	64	24 5875	49 98	40 33 6	154 26
15	1,800 3858	48 84	14 06 0	150 74	65	25 0876	50 00	41 06 0	154 32
79,16	1,800 8742	48 86	71 14 38 4	150 80	79,66	1,825 5876	50 02	71 41 38 4	154 38
17	01 3628	48 89	15 10 8	150 89	67	26 0878	50 05	42 10 8	154 48
18	01 8517	48 90	15 43 2	150 93	68	26 5883	50 07	42 43 2	154 54
19	02 3407	48 94	16 15 6	151 05	69	27 0890	50 09	43 15 6	154 60
20	02 8301	48 95	16 48 0	151 08	70	27 5899	50 12	43 48 0	154 69
79,21	1,803 3196	48 98	71 17 20 4	151 17	79,71	1,828 0911	50 14	71 44 20 4	154 75
22	03 8094	49 00	17 52 8	151 23	72	28 5925	50 17	44 52 8	154 85
23	04 2994	49 02	18 25 2	151 30	73	29 0942	50 19	45 25 2	154 91
24	04 7896	49 05	18 57 6	151 39	74	29 5961	50 21	45 57 6	154 97
25	05 2801	49 06	19 30 0	151 42	75	30 0982	50 24	46 30 0	155 06
79,26	1,805 7707	49 10	71 20 02 4	151 54	79,76	1,830 6006	50 26	71 47 02 4	155 12
27	06 2617	49 11	20 34 8	151 57	77	31 1032	50 28	47 34 8	155 19
28	06 7528	49 14	21 07 2	151 67	78	31 6060	50 31	48 07 2	155 28
29	07 2442	49 16	21 39 6	151 73	79	32 1091	50 33	48 39 6	155 34
30	07 7358	49 18	22 12 0	151 79	80	32 6124	50 36	49 12 0	155 43
79,31	1,808 2276	49 20	71 22 44 4	151 85	79,81	1,833 1160	50 38	71 49 44 4	155 49
32	08 7196	49 23	23 16 8	151 94	82	33 6198	50 41	50 16 8	155 59
33	09 2119	49 25	23 49 2	152 01	83	34 1239	50 43	50 49 2	155 65
34	09 7044	49 28	24 21 6	152 10	84	34 6282	50 45	51 21 6	155 71
35	10 1972	49 30	24 54 0	152 16	85	35 1327	50 48	51 54 0	155 80
79,36	1,810 6902	49 32	71 25 26 4	152 22	79,86	1,835 6375	50 51	71 52 26 4	155 89
37	11 1834	49 34	25 58 8	152 28	87	36 1426	50 52	52 58 8	155 93
38	11 6768	49 37	26 31 2	152 38	88	36 6478	50 55	53 31 2	156 02
39	12 1705	49 38	27 03 6	152 41	89	37 1533	50 58	54 03 6	156 11
40	12 6643	49 42	27 36 0	152 53	90	37 6591	50 60	54 36 0	156 17
79,41	1,813 1585	49 43	71 28 08 4	152 56	79,91	1,838 1651	50 62	71 55 08 4	156 23
42	13 6528	49 46	28 40 8	152 65	92	38 6713	50 65	55 40 8	156 33
43	14 1474	49 49	29 13 2	152 75	93	39 1778	50 68	56 13 2	156 42
44	14 6423	49 50	29 45 6	152 78	94	39 6846	50 69	56 45 6	156 45
45	15 1373	49 53	30 18 0	152 87	95	40 1915	50 72	57 18 0	156 54
79,46	1,815 6326	49 55	71 30 50 4	152 93	79,96	1,840 6987	50 75	71 57 50 4	156 64
47	16 1281	49 58	31 22 8	153 02	97	41 2062	50 77	58 22 8	156 70
48	16 6239	49 60	31 55 2	153 09	98	41 7139	50 79	58 55 2	156 76
49	17 1199	49 62	32 27 6	153 15	99	42 2218	50 82	71 59 27 6	156 85
50	17 6161		33 00 0		80,00	42 7300		72 00 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=80°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
80,00	1,842 7300	50 85	72 00 00 0	156 94	
80,01	1,843 2385	50 87	72 00 32 4	157 01	
02	43 7472	50 89	01 04 8	157 07	
03	44 2561	50 92	01 37 2	157 16	
04	44 7653	50 94	02 09 6	157 22	
05	45 2747	50 97	02 42 0	157 31	
80,06	1,845 7844	50 99	72 03 14 4	157 38	
07	46 2943	51 02	03 46 8	157 47	
08	46 8045	51 04	04 19 2	157 53	
09	47 3149	51 07	04 51 6	157 62	
10	47 8256	51 09	05 24 0	157 69	
80,11	1,848 3365	51 12	72 05 56 4	157 78	
12	48 8477	51 14	06 28 8	157 84	
13	49 3591	51 16	07 01 2	157 90	
14	49 8707	51 20	07 33 6	158 02	
15	50 3827	51 21	08 06 0	158 05	
80,16	1,850 8948	51 24	72 08 38 4	158 15	
17	51 4072	51 27	09 10 8	158 24	
18	51 9199	51 29	09 43 2	158 30	
19	52 4328	51 31	10 15 6	158 36	
20	52 9459	51 34	10 48 0	158 46	
80,21	1,853 4593	51 37	72 11 20 4	158 55	
22	53 9730	51 39	11 52 8	158 61	
23	54 4869	51 42	12 25 2	158 70	
24	55 0011	51 44	12 57 6	158 77	
25	55 5155	51 47	13 30 0	158 86	
80,26	1,856 0302	51 49	72 14 02 4	158 92	
27	56 5451	51 52	14 34 8	159 01	
28	57 0603	51 54	15 07 2	159 07	
29	57 5757	51 57	15 39 6	159 17	
30	58 0914	51 59	16 12 0	159 23	
80,31	1,858 6073	51 62	72 16 44 4	159 32	
32	59 1235	51 65	17 16 8	159 41	
33	59 6400	51 67	17 49 2	159 48	
34	60 1567	51 69	18 21 6	159 54	
35	60 6736	51 72	18 54 0	159 63	
80,36	1,861 1908	51 75	72 19 26 4	159 72	
37	61 7083	51 77	19 58 8	159 78	
38	62 2260	51 79	20 31 2	159 85	
39	62 7439	51 83	21 03 6	159 97	
40	63 2622	51 84	21 36 0	160 00	
80,41	1,863 7806	51 88	72 22 08 4	160 12	
42	64 2994	51 90	22 40 8	160 19	
43	64 8184	51 92	23 13 2	160 25	
44	65 3376	51 95	23 45 6	160 34	
45	65 8571	51 98	24 18 0	160 43	
80,46	1,866 3769	52 00	72 24 50 4	160 49	
47	66 8969	52 03	25 22 8	160 59	
48	67 4172	52 06	25 55 2	160 68	
49	67 9378	52 08	26 27 6	160 74	
50	68 4586		27 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=80°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
80,50	1,868 4586	52 10	72 27 00 0	160 80	
80,51	1,868 9796	52 14	72 27 32 4	160 93	
52	69 5010	52 15	28 04 8	160 96	
53	70 0225	52 19	28 37 2	161 08	
54	70 5444	52 21	29 09 6	161 14	
55	71 0665	52 23	29 42 0	161 20	
80,56	1,871 5888	52 26	72 30 14 4	161 30	
57	72 1114	52 29	30 46 8	161 39	
58	72 6343	52 31	31 19 2	161 45	
59	73 1574	52 34	31 51 6	161 54	
60	73 6808	52 37	32 24 0	161 64	
80,61	1,874 2045	52 39	72 32 56 4	161 70	
62	74 7284	52 42	33 28 8	161 79	
63	75 2526	52 44	34 01 2	161 85	
64	75 7770	52 47	34 33 6	161 94	
65	76 3017	52 50	35 06 0	162 04	
80,66	1,876 8267	52 53	72 35 38 4	162 13	
67	77 3520	52 55	36 10 8	162 19	
68	77 8775	52 57	36 43 2	162 25	
69	78 4032	52 60	37 15 6	162 35	
70	78 9292	52 63	37 48 0	162 44	
80,71	1,879 4555	52 66	72 38 20 4	162 53	
72	79 9821	52 68	38 52 8	162 59	
73	80 5089	52 71	39 25 2	162 69	
74	81 0360	52 73	39 57 6	162 75	
75	81 5633	52 77	40 30 0	162 87	
80,76	1,882 0910	52 78	72 41 02 4	162 90	
77	82 6188	52 82	41 34 8	163 02	
78	83 1470	52 84	42 07 2	163 09	
79	83 6754	52 86	42 39 6	163 15	
80	84 2040	52 90	43 12 0	163 27	
80,81	1,884 7330	52 92	72 43 44 4	163 33	
82	85 2622	52 95	44 16 8	163 43	
83	85 7917	52 98	44 49 2	163 52	
84	86 3215	53 00	45 21 6	163 58	
85	86 8515	53 03	45 54 0	163 67	
80,86	1,887 3818	53 05	72 46 26 4	163 73	
87	87 9123	53 09	46 58 8	163 86	
88	88 4432	53 11	47 31 2	163 92	
89	88 9743	53 13	48 03 6	163 98	
90	89 5056	53 17	48 36 0	164 10	
80,91	1,890 0373	53 19	72 49 08 4	164 17	
92	90 5692	53 21	49 40 8	164 23	
93	91 1013	53 25	50 13 2	164 35	
94	91 6338	53 27	50 45 6	164 41	
95	92 1665	53 30	51 18 0	164 51	
80,96	1,892 6995	53 32	72 51 50 4	164 57	
97	93 2327	53 36	52 22 8	164 69	
98	93 7663	53 37	52 55 2	164 72	
99	94 3000	53 41	53 27 6	164 85	
81,00	94 8341		54 00 0		

N. E.		Alte Einth.				N. E.		Alte Einth.			
$k=81°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.	$k=81^g$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			Gr. M.			Gr. M. S.		
81,00	1,894 8341	53 44	72 54 00 0		164 94	81,50	1,921 8919	54 83	73 21 00 0		169 23
81,01	1,895 3685	53 46	72 54 32 4		165 00	81,51	1,922 4102	54 87	73 21 32 4		169 35
02	95 9031	53 49	55 04 8		165 09	52	22 9889	54 90	22 04 8		169 44
03	96 4380	53 51	55 37 2		165 15	53	23 5379	54 92	22 37 2		169 51
04	96 9731	53 55	56 09 6		165 28	54	24 0871	54 95	23 09 6		169 60
05	97 5086	33 57	56 42 0		165 34	55	24 6366	54 98	23 42 0		169 69
81,06	1,898 0443	53 60	72 57 14 4		165 43	81,56	1,925 1864	55 01	73 24 14 4		169 78
07	98 5803	53 63	73 57 46 8		165 52	57	25 7365	55 04	24 46 8		169 88
08	99 1166	53 65	58 19 2		165 59	58	26 2869	55 07	25 19 2		169 97
09	1,899 6531	53 68	58 51 6		165 68	59	26 8376	55 09	25 51 6		170 03
10	1,900 1899	53 71	59 24 0		165 77	60	27 3885	55 13	26 24 0		170 15
81,11	1,900 7270	53 74	73 59 56 4		165 86	81,61	1,927 9398	55 15	73 26 56 4		170 22
12	01 2644	53 77	00 28 8		165 96	62	28 4913	55 19	27 28 8		170 34
13	01 8021	53 79	01 01 2		166 02	63	29 0432	55 21	28 01 2		170 40
14	02 3400	53 82	01 33 6		166 11	64	29 5953	55 25	28 33 6		170 52
15	02 8782	53 84	02 06 0		166 17	65	30 1478	55 27	29 06 0		170 59
81,16	1,903 4166	53 88	73 02 38 4		166 30	81,66	1,930 7005	55 30	73 29 38 4		170 68
17	03 9554	53 90	03 10 8		166 36	67	31 2535	55 33	30 10 8		170 77
18	04 4944	53 93	03 43 2		166 45	68	31 8068	55 37	30 43 2		170 90
19	05 0337	53 96	04 15 6		166 54	69	32 3605	55 39	31 15 6		170 96
20	05 5733	53 98	74 48 0		166 60	70	32 9144	55 42	31 48 0		171 05
81,21	1,906 1131	54 02	73 05 20 4		166 73	81,71	1,933 4686	55 44	73 32 20 4		171 11
22	06 6533	54 04	05 52 8		166 79	72	34 0230	55 48	32 52 8		171 23
23	07 1937	54 07	06 25 2		166 88	73	34 5778	55 51	33 25 2		171 33
24	07 7344	54 10	06 57 6		166 98	74	35 1329	55 54	33 57 6		171 42
25	08 2754	54 13	07 30 0		167 07	75	35 6883	55 56	34 30 0		171 49
81,26	1,908 8167	54 15	73 08 02 4		167 13	81,76	1,936 2439	55 60	73 35 02 4		171 60
27	09 3582	54 18	08 34 8		167 22	77	36 7999	55 63	35 34 8		171 70
28	09 9000	54 22	09 07 2		167 35	78	37 3562	55 65	36 07 2		171 76
29	10 4422	54 24	09 39 6		167 41	79	37 9127	55 69	36 39 6		171 88
30	10 9846	54 26	10 12 0		167 47	80	38 4696	55 71	37 12 0		171 94
81,31	1,911 5272	54 30	73 10 44 4		167 59	81,81	1,939 0267	55 75	73 37 44 4		172 07
32	12 0702	54 32	11 16 8		167 65	82	39 5842	55 77	38 16 8		172 13
33	12 6134	54 35	11 49 2		167 75	83	40 1419	55 81	38 49 2		172 25
34	13 1569	54 38	12 21 6		167 84	84	40 7000	55 83	39 21 6		172 31
35	13 7007	54 41	12 54 0		167 93	85	41 2583	55 87	39 54 0		172 44
81,36	1,914 2448	54 44	73 13 26 4		168 02	81,86	1,941 8170	55 90	73 40 26 4		172 53
37	14 7892	54 46	13 58 8		168 09	87	42 3766	55 92	40 58 8		172 59
38	15 3338	54 49	14 31 2		168 18	88	42 9352	55 96	41 31 2		172 72
39	15 8787	54 52	15 03 6		168 27	89	43 4948	55 98	42 03 6		172 78
40	16 4239	54 55	15 36 0		168 36	90	44 0546	56 02	42 36 0		172 90
81,41	1,916 9694	54 58	73 16 08 4		168 46	81,91	1,944 6148	56 04	73 43 08 4		172 96
42	17 5152	54 61	16 40 8		168 55	92	45 1752	56 08	43 40 8		173 09
43	18 0613	54 64	17 13 2		168 64	93	45 7360	56 10	44 13 2		173 15
44	18 6077	54 66	17 45 6		168 70	94	46 2970	56 14	44 45 6		173 27
45	19 1543	54 70	18 18 0		168 88	95	46 8584	56 17	45 18 0		173 36
81,46	1,919 7013	54 72	73 18 50 4		168 89	81,96	1,947 4201	56 19	73 45 50 4		173 43
47	20 2485	54 75	19 22 8		168 93	97	47 9820	56 23	46 22 8		173 55
48	20 7960	54 78	19 55 2		169 07	98	48 5443	56 25	46 55 2		173 61
49	21 3438	54 81	20 27 6		169 17	99	49 1068	56 29	47 27 6		173 73
50	21 8919		21 00 0			82,00	49 6697		48 00 0		

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=82°$	$\mathfrak{L}$. k.	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
82,00	1,949 6697	56 32	73 48 00 0	173 83	
82,01	1,950 2329	56 34	73 48 32 4	173 89	
02	50 7963	56 38	49 04 8	174 01	
03	51 3601	56 41	49 37 2	174 10	
04	51 9242	56 44	50 09 6	174 20	
05	52 4886	56 48	50 42 0	174 32	
82,06	1,953 0534	56 50	73 51 14 4	174 33	
07	53 6184	56 53	51 46 8	174 48	
08	54 1837	56 56	52 19 2	174 57	
09	54 7493	56 60	52 51 6	174 69	
10	55 3153	56 62	53 24 0	174 75	
82,11	1,955 8815	56 66	73 53 56 4	174 88	
12	56 4481	56 69	54 28 8	174 97	
13	57 0150	56 71	55 01 2	175 03	
14	57 5821	56 75	55 33 6	175 15	
15	58 1495	56 78	56 06 0	175 25	
82,16	1,958 7174	56 81	73 56 38 4	175 34	
17	59 2855	56 84	57 10 8	175 43	
18	59 8539	56 87	57 43 2	175 52	
19	60 4226	56 90	58 15 6	175 62	
20	60 9916	56 93	58 48 0	175 71	
82,21	1,961 5609	56 97	73 59 20 4	175 83	
22	62 1306	56 99	73 59 52 8	175 90	
23	62 7005	57 03	74 00 25 2	176 02	
24	63 2708	57 06	00 57 6	176 11	
25	63 8414	57 09	01 30 0	176 30	
82,26	1,964 4123	57 12	74 02 02 4	176 30	
27	64 9835	57 16	02 34 8	176 42	
28	65 5551	57 18	03 07 2	176 43	
29	66 1269	57 22	03 39 6	176 60	
30	66 6991	57 24	04 12 0	176 67	
82,31	1,967 2716	57 28	74 04 44 4	176 79	
32	67 8442	57 31	05 16 8	176 88	
33	68 4175	57 34	05 49 2	176 98	
34	68 9909	57 37	06 21 6	177 07	
35	69 5646	57 41	06 54 0	177 19	
82,36	1,970 1387	57 44	74 07 26 4	177 28	
37	70 7131	57 46	07 58 8	177 35	
38	71 2877	57 50	08 31 2	177 47	
39	71 8627	57 53	09 03 6	177 56	
40	72 4380	57 57	09 36 0	177 69	
82,41	1,973 0137	57 59	74 10 08 4	177 75	
42	73 5896	57 63	10 40 8	177 87	
43	74 1659	57 66	11 13 2	177 96	
44	74 7425	57 69	11 45 6	178 06	
45	75 3194	57 73	12 18 0	178 18	
82,46	1,975 8967	57 75	74 12 50 4	178 24	
47	76 4742	57 79	13 22 8	178 36	
48	77 0521	57 82	13 55 2	178 46	
49	77 6303	57 86	14 27 6	178 58	
50	78 2089		15 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=82°$	$\mathfrak{L}$. k.	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
82,50	1,978 2059	57 88	74 15 00 0	178 64	
82,51	1,978 7877	57 92	74 15 32 4	178 77	
52	79 3669	57 95	16 04 8	178 86	
53	79 9464	57 98	16 37 2	178 95	
54	80 5262	58 02	17 09 6	179 07	
55	81 1064	58 04	17 42 0	179 14	
82,56	1,981 6868	58 08	74 18 14 4	179 26	
57	82 2676	58 11	18 46 8	179 35	
58	82 8487	58 15	19 19 2	179 48	
59	83 4302	58 17	19 51 6	179 54	
60	84 0119	58 21	20 24 0	179 66	
82,61	1,984 5940	58 24	74 20 56 4	179 75	
62	85 1764	58 28	21 28 8	179 88	
63	85 7592	58 31	22 01 2	179 97	
64	86 3423	58 34	22 33 6	180 06	
65	86 9257	58 37	23 06 0	180 15	
82,66	1,987 5094	58 41	74 23 38 4	180 28	
67	88 0935	58 43	24 10 8	180 34	
68	88 6778	58 48	24 43 2	180 49	
69	89 2626	58 50	25 15 6	180 56	
70	89 8476	58 54	25 48 0	180 68	
82,71	1,990 4330	58 57	74 26 20 4	180 77	
72	91 0187	58 60	26 52 8	180 86	
73	91 6047	58 64	27 25 2	180 99	
74	92 1911	58 67	27 57 6	181 08	
75	92 7778	58 70	28 30 0	181 17	
82,76	1,993 3648	58 74	74 29 02 4	181 30	
77	93 9522	58 77	29 34 8	181 39	
78	94 5399	58 80	30 07 2	181 48	
79	95 1279	58 84	30 39 6	181 60	
80	95 7163	58 87	31 12 0	181 70	
82,81	1,996 3050	58 90	74 31 44 4	181 79	
82	96 8940	58 94	32 16 8	181 91	
83	97 4834	58 97	32 49 2	182 01	
84	98 0731	59 00	33 21 6	182 10	
85	98 6631	59 04	33 54 0	182 22	
82,86	1,999 2535	59 07	74 34 26 4	182 31	
87	1,999 8442	59 10	34 58 8	182 41	
88	2,000 4352	59 14	35 31 2	182 53	
89	01 0266	59 17	36 03 6	182 62	
90	01 6183	59 21	36 36 0	182 75	
82,91	2,002 2104	59 24	74 37 08 4	182 84	
92	02 8028	59 27	37 40 8	182 93	
93	03 3955	59 31	38 13 2	183 06	
94	03 9886	59 34	38 45 6	183 15	
95	04 5820	59 37	39 18 0	183 24	
82,96	2,005 1757	59 41	74 39 50 4	183 36	
97	05 7698	59 45	40 22 8	183 49	
98	06 3643	59 47	40 55 2	183 55	
99	06 9590	59 52	41 27 6	183 70	
83,00	07 5542		42 00 0		

N. E. $k=83°$	Ω. k.	Alte Einth. D. 1″.		Gr. M.	Ω. k.	Alte Einth. D. 1″.		
Gr. M.								
83,00	2,007 5542	59 54	74 42 00 0	83,50	2,037 7543	61 31	75 09 00 0	
83,01	2,008 1496	59 58	74 42 32 4	83,51	2,038 3674	61 34	75 09 32 4	
02	08 7454	59 61	43 04 8	52	38 9808	61 38	10 04 8	
03	09 3415	59 65	43 37 2	53	39 5946	61 42	10 37 2	
04	09 9380	59 69	44 09 6	54	40 2088	61 45	11 09 6	
05	10 5349	59 71	44 42 0	55	40 8233	61 49	11 42 0	
83,06	2,011 1320	59 75	74 45 14 4	83,56	2,041 4382	61 53	75 12 14 4	
07	11 7295	59 79	45 46 8	57	42 0535	61 56	12 46 8	
08	12 3274	59 82	46 19 2	58	42 6691	66 61	13 19 2	
09	12 9256	59 85	46 51 6	59	43 2852	61 63	13 51 6	
10	13 5241	59 89	47 24 0	60	43 9015	61 68	14 24 0	
83,11	2,014 1230	59 93	74 47 56 4	83,61	2,044 5183	61 71	75 14 56 4	
12	14 7223	59 96	48 28 8	62	45 1354	61 75	15 28 8	
13	15 3219	59 99	49 01 2	63	45 7529	61 78	16 01 2	
14	15 9218	60 03	49 33 6	64	46 3707	61 82	16 33 6	
15	16 5221	60 06	50 06 0	65	46 9889	61 86	17 06 0	
83,16	2,017 1227	60 10	74 50 38 4	83,66	2,047 6075	61 89	75 17 38 4	
17	17 7237	60 13	51 10 8	67	48 2264	61 94	18 10 8	
18	18 3250	60 17	51 43 2	68	48 8458	61 97	18 43 2	
19	18 9267	60 21	52 15 6	69	49 4655	62 00	19 15 6	
20	19 5288	60 23	52 48 0	70	50 0855	62 05	19 48 0	
83,21	2,020 1311	60 28	74 53 20 4	83,71	2,050 7060	62 08	75 20 20 4	
22	20 7339	60 30	53 52 8	72	51 3268	62 12	20 52 8	
23	21 3369	60 35	54 25 2	73	51 9480	62 15	21 25 2	
24	21 9404	60 38	54 57 6	74	52 5695	62 19	21 57 6	
25	22 5442	60 41	55 30 0	75	53 1914	62 23	22 30 0	
83,26	2,023 1483	60 45	74 56 02 4	83,76	2,053 8137	62 27	75 23 02 4	
27	23 7528	60 48	56 34 8	77	54 4364	62 31	23 34 8	
28	24 3576	60 52	57 07 2	78	55 0595	62 34	24 07 2	
29	24 9628	60 56	57 39 6	79	55 6829	62 38	24 39 6	
30	25 5684	60 59	58 12 0	80	56 3067	62 42	25 12 0	
83,31	2,026 1743	60 62	74 58 44 4	83,81	2,056 9309	62 46	75 25 44 4	
32	26 7805	60 66	59 16 8	82	57 5555	62 49	26 16 8	
33	27 3871	60 70	74 59 49 2	83	58 1804	62 53	26 49 2	
34	27 9941	60 73	75 00 21 6	84	58 8057	62 57	27 21 6	
35	28 6014	60 77	00 54 0	85	59 4314	62 61	27 54 0	
83,36	2,029 2091	60 80	75 01 26 4	83,86	2,060 0575	62 65	75 28 26 4	
37	29 8171	60 84	01 58 8	87	60 6840	62 68	28 58 8	
38	30 4255	60 88	02 31 2	88	61 3108	62 72	29 31 2	
39	31 0343	60 91	03 03 6	89	61 9380	62 76	30 03 6	
40	31 6434	60 95	03 36 0	90	62 5656	62 80	30 36 0	
83,41	2,032 2529	60 98	75 04 08 4	83,91	2,063 1936	62 84	75 31 08 4	
42	32 8627	61 02	04 40 8	92	63 8220	62 87	31 40 8	
43	33 4729	61 05	05 13 2	93	64 4507	62 91	32 13 2	
44	34 0834	61 10	05 45 6	94	65 0798	62 95	32 45 6	
45	34 6944	61 12	06 18 0	95	65 7093	62 99	33 18 0	
83,46	2,035 3056	61 17	75 06 50 4	83,96	2,066 3392	63 03	75 33 50 4	
47	35 9173	61 19	07 22 8	97	66 9695	63 07	34 22 8	
48	36 5292	61 24	07 55 2	98	67 6002	63 10	34 55 2	
49	37 1416	61 27	08 27 6	99	68 2312	63 15	35 27 6	
50	37 7543		09 00 0	84,00	68 8627		36 00 0	

N. E.		Alte Einth.			
$k=84°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			
Gr. M.				Gr. M. S.	
84,00	2,068 8627	63	18	75 36 00	0
84,01	2,069 4945	63	22	75 36 32	4
02	70 1267	63	26	37 04	8
03	70 7593	63	30	37 37	2
04	71 3923	63	34	38 09	6
05	72 0257	63	37	38 42	0
84,06	2,072 6594	63	42	75 39 14	4
07	73 2936	63	45	39 46	8
08	73 9281	63	49	40 19	2
09	74 5630	63	54	40 51	6
10	75 1984	63	57	41 24	0
84,11	2,075 8341	63	61	75 41 56	4
12	76 4702	63	65	42 28	8
13	77 1067	63	69	43 01	2
14	77 7436	63	73	43 33	6
15	78 3809	63	76	44 05	0
84,16	2,079 0185	63	81	75 44 38	4
17	79 6566	63	85	45 10	8
18	80 2951	63	88	45 43	2
19	80 9339	63	93	46 15	6
20	81 5732	63	96	46 48	0
84,21	2,082 2128	64	01	75 47 20	4
22	82 8529	64	04	47 52	8
23	83 4933	64	09	48 25	2
24	84 1342	64	12	48 57	6
25	84 7754	64	17	49 30	0
84,26	2,085 4171	64	20	75 50 02	4
27	86 0591	64	24	50 34	8
28	86 7015	64	29	51 07	2
29	87 3444	64	32	51 39	6
30	87 9876	64	37	52 12	0
84,31	2,088 6313	64	40	75 52 44	4
32	89 2753	64	45	53 16	8
33	89 9198	64	48	53 49	2
34	90 5646	64	53	54 21	6
35	91 2099	64	57	54 54	0
84,36	2,091 8556	64	60	75 55 26	4
37	92 5016	64	65	55 58	8
38	93 1481	64	69	56 31	2
39	93 7950	64	73	57 03	6
40	94 4423	64	76	57 36	0
84,41	2,095 0899	64	81	75 58 08	4
42	95 7380	64	85	58 40	8
43	96 3865	64	90	59 13	2
44	97 0355	64	93	75 59 45	6
45	97 6848	64	97	76 00 18	0
84,46	2,098 3345	65	02	76 00 50	4
47	98 9847	65	05	01 22	8
48	2,099 6352	65	10	01 55	2
49	2,100 2862	65	13	02 27	6
50	00 9375			03 00	0

N. E.		Alte Einth.			
$k=84°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			
Gr. M.				Gr. M. S.	
84,50	2,100 9375	65	18	76 03 00	0
84,51	2,101 5893	65	22	76 03 32	4
52	02 2415	65	26	04 04	8
53	02 8941	65	31	04 37	2
54	03 5472	65	34	05 09	6
55	04 2006	65	39	05 42	0
84,56	2,104 8545	65	42	76 06 14	4
57	05 5087	65	47	06 46	8
58	06 1634	65	51	07 19	2
59	06 8185	65	55	07 51	6
60	07 4740	65	60	08 24	0
84,61	2,108 1300	65	63	76 08 56	4
62	08 7863	65	68	09 28	8
63	09 4431	65	72	10 01	2
64	10 1003	65	76	10 33	6
65	10 7579	65	80	11 06	0
84,66	2,111 4159	65	85	76 11 38	4
67	12 0744	65	88	12 10	8
68	12 7332	65	93	12 43	2
69	13 3925	65	98	13 15	6
70	14 0523	66	01	13 48	0
84,71	2,114 7124	66	06	76 14 20	4
72	15 3730	66	10	14 52	8
73	16 0340	66	14	15 25	2
74	16 6954	66	18	15 57	6
75	17 3572	66	23	16 30	0
84,76	2,118 0195	66	27	76 17 02	4
77	18 6822	66	31	17 34	8
78	19 3453	66	35	18 07	2
79	20 0088	66	40	18 39	6
80	20 6728	66	44	19 12	0
84,81	2,121 3372	66	48	76 19 44	4
82	22 0020	66	53	20 16	8
83	22 6673	66	57	20 49	2
84	23 3330	66	61	21 21	6
85	23 9991	66	66	21 54	0
84,86	2,124 6657	66	70	76 22 26	4
87	25 3327	66	74	22 58	8
88	26 0001	66	78	23 31	2
89	26 6679	66	83	24 03	6
90	27 3362	66	87	24 36	0
84,91	2,128 0049	66	92	76 25 08	4
92	28 6741	66	96	25 40	8
93	29 3437	67	00	26 13	2
94	30 0137	67	05	26 45	6
95	30 6842	67	09	27 18	0
84,96	2,131 3551	67	13	76 27 50	4
97	32 0264	67	18	28 22	8
98	32 6982	67	22	28 55	2
99	33 3704	67	26	29 27	6
85,00	43 0430			30 00	0

N. E. $k=85°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.		N. E. $k=85°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.	Gr. M.			Gr. M. S.
85,00	2,134 0430	67 31	76 30 00 0	85,50	2,168 2498	69 59	76 57 00 0
85,01	2,134 7161	67 36	76 30 32 4	85,51	2,163 9457	69 63	76 57 32 4
02	35 3897	67 40	31 04 8	52	69 6420	69 69	58 04 8
03	36 0637	67 44	31 37 2	53	70 3389	69 73	58 37 2
04	36 7381	67 48	32 09 6	54	71 0362	69 78	59 09 6
05	37 4129	67 53	32 42 0	55	71 7340	69 82	76 59 42 0
85,06	2,138 0882	67 58	76 33 14 4	85,56	2,172 4322	69 87	77 00 14 4
07	38 7640	67 62	33 46 8	57	73 1309	69 93	00 46 8
08	39 4402	67 66	34 19 2	58	73 8302	69 96	01 19 2
09	40 1168	67 71	34 51 6	59	74 5298	70 02	01 51 6
10	40 7939	67 75	35 24 0	60	75 2300	70 07	02 24 0
85,11	2,141 4714	67 80	76 35 56 4	85,61	2,175 9307	70 11	77 02 56 4
12	42 1494	67 84	36 28 8	62	76 6318	70 16	03 28 8
13	42 8278	67 89	37 01 2	63	77 3334	70 21	04 01 2
14	43 5067	67 93	37 33 6	64	78 0355	70 25	04 33 6
15	44 1860	67 99	38 06 0	65	78 7380	70 31	05 06 0
85,16	2,144 8658	68 02	76 38 38 4	85,66	2,179 4411	70 35	77 05 38 4
17	45 5460	68 07	39 10 8	67	80 1446	70 40	06 10 8
18	46 2267	68 11	39 43 2	68	80 8486	70 45	06 43 2
19	46 9078	68 16	40 15 6	69	81 5531	70 49	07 15 6
20	47 5894	68 20	40 48 0	70	82 2580	70 55	07 48 0
85,21	2,148 2714	68 25	76 41 20 4	85,71	2,182 9635	70 60	77 08 20 4
22	48 9539	68 29	41 52 8	72	83 6695	70 64	08 52 8
23	49 6368	68 34	42 25 2	73	84 3759	70 69	09 25 2
24	50 3202	68 39	42 57 6	74	85 0828	70 74	09 57 6
25	51 0041	68 43	43 30 0	75	85 7902	70 79	10 30 0
85,26	2,151 6884	68 47	76 44 02 4	85,76	2,186 4981	70 84	77 11 02 4
27	52 3731	68 52	44 34 8	77	87 2065	70 89	11 34 8
28	53 0583	68 57	45 07 2	78	87 9154	70 93	12 07 2
29	53 7440	68 61	45 39 6	79	88 6247	70 99	12 39 6
30	54 4301	68 66	46 12 0	80	89 3346	71 03	13 12 0
85,31	2,155 1167	68 71	76 46 44 4	85,81	2,190 0449	71 08	77 13 44 4
32	55 8038	68 75	47 16 8	82	90 7557	71 14	14 16 8
33	56 4913	68 79	47 49 2	83	91 4671	71 18	14 49 2
34	57 1792	68 84	48 21 6	84	92 1789	71 23	15 21 6
35	57 8676	68 89	48 54 0	85	92 8912	71 28	15 54 0
85,36	2,158 5565	68 94	76 49 26 4	85,86	2,193 6039	71 33	77 16 26 4
37	59 2459	68 98	49 58 8	87	94 3173	71 38	16 58 8
38	59 9357	69 03	50 31 2	88	95 0311	71 44	17 31 2
39	60 6260	69 07	51 03 6	89	95 7455	71 48	18 03 6
40	61 3167	69 12	51 36 0	90	96 4603	71 53	18 36 0
85,41	2,162 0079	69 17	76 52 08 4	85,91	2,197 1756	71 58	77 19 08 4
42	62 6996	69 21	52 40 8	92	97 8914	71 63	19 40 8
43	63 3917	69 26	53 13 2	93	98 6077	71 68	20 13 2
44	64 0843	69 31	53 45 6	94	2,199 3245	71 73	20 45 6
45	64 7774	69 35	54 18 0	95	2,200 0418	71 78	21 18 0
85,46	2,165 4709	69 40	76 54 50 4	85,96	2,200 7595	71 83	77 21 50 4
47	66 1649	69 45	55 22 8	97	01 4779	71 88	22 22 8
48	66 8594	69 50	55 55 2	98	02 1967	71 93	22 55 2
49	67 5544	69 54	56 27 6	99	02 9160	71 98	23 27 6
50	68 2498		57 00 0	86,00	03 6358		24 00 0

N. E. $k=86°$	L. k.	D. 1″.	Alte Einth. Gr. M. S.
86,00	2,203 6358	72 04	77 24 00 0
86,01	2,204 3562	72 08	77 24 32 4
02	05 0770	72 13	25 04 8
03	05 7983	72 19	25 37 2
04	06 5202	72 24	26 09 6
05	07 2426	72 28	26 42 0
86,06	2,207 9654	72 34	77 27 14 4
07	08 6888	72 39	27 46 8
08	09 4127	72 44	28 19 2
09	10 1371	72 49	28 51 6
10	10 8620	72 54	29 24 0
86,11	2,211 5874	72 60	77 29 56 4
12	12 3134	72 64	30 28 8
13	13 0398	72 70	31 01 2
14	13 7668	72 75	31 33 6
15	14 4943	72 80	32 06 0
86,16	2,215 2223	72 85	77 32 38 4
17	15 9508	72 91	33 10 8
18	16 6799	72 95	33 43 2
19	17 4094	73 01	34 15 6
20	18 1395	73 06	34 48 0
86,21	2,218 8701	73 12	77 35 20 4
22	19 6013	73 16	35 52 8
23	20 3329	73 22	36 25 2
24	21 0651	73 27	36 57 6
25	21 7978	73 32	37 30 0
86,26	2,222 5310	73 38	77 38 02 4
27	23 2648	73 42	38 34 8
28	23 9990	73 48	39 07 2
29	24 7338	73 54	39 39 6
30	25 4692	73 58	40 12 0
86,31	2,226 2050	73 64	77 40 44 4
32	26 9414	73 69	41 16 8
33	27 6783	73 75	41 49 2
34	28 4158	73 79	42 21 6
35	29 1537	73 86	42 54 0
86,36	2,229 8923	73 90	77 43 26 4
37	30 6313	73 96	43 58 8
38	31 3709	74 01	44 31 2
39	32 1110	74 06	45 03 6
40	32 8516	74 12	45 36 0
86,41	2,233 5928	74 17	77 46 08 4
42	34 3345	74 23	46 40 8
43	35 0768	74 28	47 13 2
44	35 8196	74 33	47 45 6
45	36 5629	74 39	48 18 0
86,46	2,237 3068	74 44	77 48 50 4
47	38 0512	74 50	49 22 8
48	38 7962	74 55	49 55 2
49	39 5417	74 60	50 27 6
50	40 2877		51 00 0

N. E. $k=86°$	L. k.	D. 1″.	Alte Einth. Gr. M. S.
86,50	2,240 2877	74 66	77 51 00 0
86,51	2,241 0343	74 72	77 51 32 4
52	41 7815	74 77	52 04 8
53	42 5292	74 82	52 37 2
54	43 2774	74 88	53 09 6
55	44 0262	74 93	53 42 0
86,56	2,244 7755	74 99	77 54 14 4
57	45 5254	75 04	54 46 8
58	46 2758	75 10	55 19 2
59	47 0268	75 15	55 51 6
60	47 7783	75 21	56 24 0
86,61	2,248 5304	75 26	77 56 56 4
62	49 2830	75 32	57 28 8
63	50 0362	75 38	58 01 2
64	50 7900	75 43	58 33 6
65	51 5443	75 48	59 06 0
86,66	2,252 2991	75 55	77 59 38 4
67	53 0546	75 59	78 00 10 8
68	53 8105	75 66	00 43 2
69	54 5671	75 71	01 15 6
70	55 3242	75 76	01 48 0
86,71	2,256 0818	75 82	78 02 20 4
72	56 8400	75 88	02 52 8
73	57 5988	75 94	03 25 2
74	58 3582	75 99	03 57 6
75	59 1181	76 05	04 30 0
86,76	2,259 8786	76 10	78 05 02 4
77	60 6396	76 16	05 34 8
78	61 4012	76 22	06 07 2
79	62 1634	76 28	06 39 6
80	62 9262	76 33	07 12 0
86,81	2,263 6895	76 39	78 07 44 4
82	64 4534	76 44	08 16 8
83	65 2178	76 50	08 49 2
84	65 9828	76 56	09 21 6
85	66 7484	76 62	09 54 0
86,86	2,267 5146	76 68	78 10 26 4
87	68 2814	76 73	10 58 8
88	69 0487	76 79	11 31 2
89	69 8166	76 85	12 03 6
90	70 5851	76 91	12 36 0
86,91	2,271 3542	76 96	78 13 08 4
92	72 1238	77 02	13 40 8
93	72 8940	77 08	14 13 2
94	73 6648	77 14	14 45 6
95	74 4362	77 20	15 18 0
86,96	2,275 2082	77 25	78 15 50 4
97	75 9807	77 32	16 22 8
98	76 7539	77 37	16 55 2
99	77 5276	77 43	17 27 6
87,00	78 3019		18 00 0

N. E. $k=87°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.
Gr. M.			
87,00	2,278 3019	77 49	78 18 00 0
87,01	2,279 0768	77 55	78 18 32 4
02	79 8523	77 61	19 04 8
03	80 6284	77 66	19 37 2
04	81 4050	77 73	20 09 6
05	82 1823	77 78	20 42 0
87,06	2,282 9601	77 85	78 21 14 4
07	83 7386	77 90	21 46 8
08	84 5176	77 95	22 19 2
09	85 2972	78 03	22 51 6
10	86 0775	78 08	23 24 0
87,11	2,286 8583	78 14	78 23 56 4
12	87 6397	78 20	24 28 8
13	88 4217	78 26	25 01 2
14	89 2043	78 33	25 33 6
15	89 9876	78 38	26 06 0
87,16	2,290 7714	78 44	78 26 38 4
17	91 5558	78 50	27 10 8
18	92 3408	78 57	27 43 2
19	93 1265	78 62	28 15 6
20	93 9127	78 68	28 48 0
87,21	2,294 6995	78 75	78 29 20 4
22	95 4870	78 81	29 52 8
23	96 2751	78 86	30 25 2
24	97 0637	78 93	30 57 6
25	97 8530	78 99	31 30 0
87,26	2,298 6429	79 05	78 32 02 4
27	2,299 4334	79 11	32 34 8
28	2,300 2245	79 17	33 07 2
29	01 0162	79 24	33 39 6
30	01 8086	79 29	34 12 0
87,31	2,302 6015	79 36	78 34 44 4
32	03 3951	79 42	35 16 8
33	04 1893	79 48	35 49 2
34	04 9841	79 54	36 21 6
35	05 7795	79 61	36 54 0
87,36	2,306 5756	79 67	78 37 26 4
37	07 3723	79 73	37 58 8
38	08 1696	79 79	38 31 2
39	08 9675	79 85	39 03 6
40	09 7660	79 92	39 36 0
87,41	2,310 5652	79 98	78 40 08 4
42	11 3650	80 04	40 40 8
43	12 1654	80 10	41 13 2
44	12 9664	80 17	41 45 6
45	13 7681	80 23	42 18 0
87,46	2,314 5704	80 30	78 42 50 4
47	15 3734	80 35	43 22 8
48	16 1769	80 43	43 55 2
49	16 9812	80 48	44 27 6
50	17 7860		45 00 0

N. E. $k=87°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.
Gr. M.			
87,50	2,317 7860	80 55	78 45 00 0
87,51	2,318 5915	80 61	78 45 32 4
52	19 3976	80 68	46 04 8
53	20 2044	80 74	46 37 2
54	21 0118	80 80	47 09 6
55	21 8198	80 87	47 42 0
87,56	2,322 6285	80 93	78 48 14 4
57	23 4378	80 99	48 46 8
58	24 2477	81 07	49 19 2
59	25 0584	81 12	49 51 6
60	25 8696	81 19	50 24 0
87,61	2,326 6815	81 26	78 50 56 4
62	27 4941	81 32	51 28 8
63	28 3073	81 38	52 01 2
64	29 1211	81 45	52 33 6
65	29 9356	81 51	53 06 0
87,66	2,330 7507	81 58	78 53 38 4
67	31 5665	81 65	54 10 8
68	32 3830	81 71	54 43 2
69	33 2001	81 78	55 15 6
70	34 0179	81 84	55 48 0
87,71	2,334 8363	81 91	78 56 20 4
72	35 6554	81 97	56 52 8
73	36 4751	82 04	57 25 2
74	37 2955	82 10	57 57 6
75	38 1265	82 17	58 30 0
87,76	2,338 9382	82 24	78 59 02 4
77	39 7606	82 31	78 59 34 8
78	40 5837	82 37	79 00 07 2
79	41 4074	82 43	00 39 6
80	42 2317	82 51	01 12 0
87,81	2,343 0568	82 57	79 01 44 4
82	43 8825	82 64	02 16 8
83	44 7089	82 70	02 49 2
84	45 5359	82 78	03 21 6
85	46 3637	82 84	03 54 0
87,86	2,347 1921	82 90	79 04 26 4
87	48 0211	82 98	04 58 8
88	48 8509	83 04	05 31 2
89	49 6813	83 11	06 03 6
90	50 5124	83 18	06 36 0
87,91	2,351 3442	83 25	79 07 08 4
92	52 1767	83 31	07 40 8
93	53 0093	83 38	08 13 2
94	53 8436	83 45	08 45 6
95	54 6781	83 52	09 18 0
87,96	2,355 5133	83 59	79 09 50 4
97	56 3492	83 66	10 22 8
89	57 1858	83 72	10 55 2
99	58 0230	83 80	11 27 6
88,00	58 8610		12 00 0

N. E. $k=88°$	Ł. k.	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.
Gr. M.			
88,00	2,358 8610	83 86	79 12 00 0
88,01	2,359 6996	83 93	79 12 32 4
02	60 5389	84 01	13 04 8
03	61 3790	84 07	13 37 2
04	62 2197	84 14	14 09 6
05	63 0611	84 21	14 42 0
88,06	2,363 9032	84 28	79 15 14 4
07	64 7460	84 35	15 46 8
08	65 5895	84 42	16 19 2
09	66 4337	84 49	16 51 6
10	67 2786	84 56	17 24 0
88,11	2,368 1242	84 63	79 17 56 4
12	68 9705	84 70	18 28 8
13	69 8175	84 77	19 01 2
14	70 6652	84 84	19 33 6
15	71 5136	84 91	20 06 0
88,16	2,372 3627	84 99	79 20 38 4
17	73 2126	85 05	21 10 8
18	74 0631	85 13	21 43 2
19	74 9144	85 20	22 15 6
20	75 7664	85 27	22 48 0
88,21	2,376 6191	85 34	79 23 20 4
22	77 4725	85 41	23 52 8
23	78 3266	85 48	24 25 2
24	79 1814	85 56	24 57 6
25	80 0370	85 63	25 30 0
88,26	2,380 8933	85 70	79 26 02 4
27	81 7503	85 77	26 34 8
28	82 6080	85 84	27 07 2
29	83 4664	85 92	27 39 6
30	84 3256	85 99	28 12 0
88,31	2,385 1855	86 06	79 28 44 4
32	86 0461	86 14	29 16 8
33	86 9075	86 20	29 49 2
34	87 7695	86 29	30 21 6
35	88 6324	86 35	30 54 0
88,36	2,389 4959	86 43	79 31 26 4
37	90 3602	86 50	31 58 8
38	91 2252	86 57	32 31 2
39	92 0909	86 65	33 03 6
40	92 9574	86 72	33 36 0
88,41	2,393 8246	86 80	79 34 08 4
42	94 6926	86 87	34 40 8
43	95 5613	86 95	35 13 2
44	96 4308	87 02	35 45 6
45	97 3010	87 09	36 18 0
88,46	2,398 1719	87 17	79 36 50 4
47	99 0436	87 24	37 22 8
48	2,399 9160	87 32	37 55 2
49	2,400 7892	87 39	38 27 6
50	01 6631		39 00 0

N. E. $k=88°$	Ł. k.	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.
Gr. M.			
88,50	2,401 6631	87 47	79 39 00 0
88,51	2,402 5378	87 55	79 39 32 4
52	03 4133	87 62	40 04 8
53	04 2895	87 69	40 37 2
54	05 1664	87 77	41 09 6
55	06 0441	87 85	41 42 0
88,56	2,406 9226	87 92	79 42 14 4
57	07 8018	88 00	42 46 8
58	08 6818	88 08	43 19 2
59	09 5626	88 15	43 51 6
60	10 4441	88 23	44 24 0
88,61	2,411 3264	88 30	79 44 56 4
62	12 2094	88 38	45 28 8
63	13 0932	88 46	46 01 2
64	13 9778	88 54	46 33 6
65	14 8632	88 61	47 06 0
88,66	2,415 7493	88 69	79 47 38 4
67	16 6362	88 77	48 10 8
68	17 5239	88 84	48 43 2
69	18 4123	88 93	49 15 6
70	19 3016	89 00	49 48 0
88,71	2,420 1916	89 08	79 50 20 4
72	21 0824	89 16	50 52 8
73	21 9740	89 23	51 25 2
74	22 8663	89 31	51 57 6
75	23 7594	89 40	52 30 0
88,76	2,424 6534	89 47	79 53 02 4
77	25 5481	89 55	53 34 8
78	26 4436	89 63	54 07 2
79	27 3399	89 71	54 39 6
80	28 2370	89 78	55 12 0
88,81	2,429 1348	89 87	79 55 44 4
82	30 0335	89 95	56 16 8
83	30 9330	90 02	56 49 2
84	31 8332	90 11	57 21 6
85	32 7343	90 19	57 54 0
88,86	2,433 6362	90 26	79 58 26 4
87	34 5388	90 35	58 58 8
88	35 4423	90 43	79 59 31 2
89	36 3466	90 50	80 00 03 6
90	37 2516	90 59	00 36 0
88,91	2,438 1575	90 67	80 01 08 4
92	39 0642	90 75	01 40 8
93	39 9717	90 83	02 13 2
94	40 8800	90 92	02 45 6
95	41 7892	90 99	03 18 0
88,96	2,442 6991	91 08	80 03 50 4
97	43 6099	91 16	04 22 8
98	44 5215	91 24	04 55 2
99	45 4339	91 32	05 27 6
89,00	46 3471		06 00 0

N. E.		Alte Einth.		N. E.		Alte Einth.	
$k=89°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		$k=89°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.	Gr. M.			Gr. M. S.
89,00	2,446 3471	91 40	80 06 00 0	89,50	2,493 0889	95 71	80 33 00 0
89,01	2,447 2611	91 49	80 06 32 4	89,51	2,494 0460	95 81	80 33 32 4
02	48 1760	91 57	07 04 8	52	95 0041	95 90	34 04 8
03	49 0917	91 65	07 37 2	53	95 9631	95 99	34 37 2
04	50 0082	91 73	08 09 6	54	96 9230	96 08	35 09 6
05	50 9255	91 82	08 42 0	55	97 8838	96 17	35 42 0
89,06	2,451 8437	91 90	80 09 14 4	89,56	2,498 8455	96 26	80 36 14 4
07	52 7627	91 99	09 46 8	57	2,499 8081	96 35	36 46 8
08	53 6826	92 06	10 19 2	58	2,500 7716	96 45	37 19 2
09	54 6032	92 16	10 51 6	59	01 7361	96 53	37 51 6
10	55 5248	92 23	11 24 0	60	02 7014	96 63	38 24 0
89,11	2,456 4471	92 32	80 11 56 4	89,61	2,503 6677	96 72	80 38 56 4
12	57 3703	92 40	12 28 8	62	04 6349	96 82	39 28 8
13	58 2943	92 49	13 01 2	63	05 6031	96 90	40 01 2
14	59 2192	92 57	13 33 6	64	06 5721	97 00	40 33 6
15	60 1449	92 66	14 06 0	65	07 5421	97 09	41 06 0
89,16	2,461 0715	92 74	80 14 38 4	89,66	2,508 5130	97 19	80 41 38 4
17	61 9989	92 82	15 10 8	67	09 4849	97 28	42 10 8
18	62 9271	92 91	15 43 2	68	10 4577	97 37	42 43 2
19	63 8562	93 00	16 15 6	69	11 4314	97 46	43 15 6
20	64 7862	93 08	16 48 0	70	12 4060	97 56	43 48 0
89,21	2,465 7170	93 17	80 17 20 4	89,71	2,513 3816	97 65	80 44 20 4
22	66 6487	93 25	17 52 8	72	14 3581	97 75	44 52 8
23	67 5812	93 34	18 25 2	73	15 3356	97 85	45 25 2
24	68 5146	93 42	18 57 6	74	16 3141	97 93	45 57 6
25	96 4488	93 51	19 30 0	75	17 2934	98 03	46 30 0
89,26	2,470 3839	93 59	80 20 02 4	89,76	2,518 2737	98 13	80 47 02 4
27	71 3198	93 69	20 34 8	77	19 2550	98 22	47 34 8
28	72 2567	93 77	21 07 2	78	20 2372	98 32	48 07 2
29	73 1944	93 85	21 39 6	79	21 2204	98 41	48 39 6
30	74 1329	93 95	22 12 0	80	22 2045	98 51	49 12 0
89,31	2,475 0724	94 03	80 22 44 4	89,81	2,523 1896	98 60	80 49 44 4
32	76 0127	94 11	23 16 8	82	24 1756	98 70	50 16 8
33	76 9538	94 21	23 49 2	83	25 1626	98 80	50 49 2
34	77 8959	94 30	24 21 6	84	26 1506	98 89	51 21 6
35	78 8389	94 37	24 54 0	85	27 1395	98 99	51 54 0
89,36	2,479 7826	94 47	80 25 26 4	89,86	2,528 1294	99 08	80 52 26 4
37	80 7273	94 55	25 58 8	87	29 1202	99 19	52 58 8
38	81 6728	94 65	26 31 2	88	30 1121	99 28	53 31 2
39	82 6193	94 73	27 03 6	89	31 1049	99 38	54 03 6
40	83 5666	94 82	27 36 0	90	32 0987	99 47	54 36 0
89,41	2,484 5148	94 91	80 28 08 4	89,91	2,533 0934	99 57	80 55 08 4
42	85 4639	95 00	28 40 8	92	34 0891	99 68	55 40 8
43	86 4139	95 09	29 13 2	93	35 0859	99 76	56 13 2
44	87 3648	95 18	29 45 6	94	36 0835	99 87	56 45 6
45	88 3166	95 26	30 18 0	95	37 0822	99 96	57 18 0
89,46	2,489 2692	95 36	80 30 50 4	89,96	2,538 0818	100 07	80 57 50 4
47	90 2228	95 45	31 22 8	97	39 0825	100 17	58 22 8
48	91 1773	95 53	31 55 2	89	40 0842	100 26	58 55 2
49	92 1326	95 63	32 27 6	99	41 0868	100 36	80 59 27 6
50	93 0889		33 00 0	90,00	42 0904		81 00 00 0

N. E. $k=90°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.
Gr. M.			
90,00	2,542 0904	100 47	81 00 00 0
90,01	2,543 0951	100 56	81 00 32 4
02	44 1007	100 66	01 04 8
03	45 1073	100 76	01 37 2
04	46 1149	100 86	02 09 6
05	47 1235	100 97	02 42 0
90,06	2,548 1332	101 06	81 03 14 4
07	49 1438	101 17	03 46 8
08	50 1555	101 26	04 19 2
09	51 1681	101 37	04 51 6
10	52 1818	101 47	05 24 0
90,11	2,553 1965	101 57	81 05 56 4
12	54 2122	101 67	06 28 8
13	55 2289	101 78	07 01 2
14	56 2467	101 88	07 33 6
15	57 2655	101 98	08 06 0
90,16	2,558 2853	102 08	81 08 38 4
17	59 3061	102 19	09 10 8
18	60 3280	102 29	09 43 2
19	61 3509	102 39	10 15 6
20	62 3748	102 50	10 48 0
90,21	2,563 3998	102 60	81 11 20 4
22	64 4258	102 70	11 52 8
23	65 4528	102 81	12 25 2
24	66 4809	102 92	12 57 6
25	67 5101	103 01	13 30 0
90,26	2,568 5402	103 13	81 14 02 4
27	69 5715	103 23	14 34 8
28	70 6038	103 33	15 07 2
29	71 6371	103 44	15 39 6
30	72 6715	103 55	16 12 0
90,31	2,573 7070	103 55	81 16 44 4
32	74 7435	103 76	17 16 8
33	75 7811	103 86	17 49 2
34	76 8197	103 97	18 21 6
35	77 8594	104 08	18 54 0
90,36	2,578 9002	104 19	81 19 26 4
37	79 9421	104 29	19 58 8
38	80 9850	104 40	20 31 2
39	82 0290	104 51	21 03 6
40	83 0741	104 61	21 36 0
90,41	2,584 1202	104 73	81 22 08 4
42	85 1675	104 83	22 40 8
43	86 2158	104 95	23 13 2
44	87 2653	105 05	23 45 6
45	88 3158	105 16	24 18 0
90,46	2,589 3674	105 27	81 24 50 4
47	90 4201	105 38	25 22 8
48	91 4739	105 49	25 55 2
49	92 5288	105 60	26 27 6
50	93 5848		27 00 0

N. E. $k=90°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.
Gr. M.			
90,50	2,593 5848	105 71	81 27 00 0
90,51	2,594 6419	105 82	81 27 32 4
52	95 7001	106 93	28 04 8
53	96 7594	106 04	28 37 2
54	97 8198	106 15	29 09 6
55	98 8813	106 27	29 42 0
90,56	2,599 9440	106 38	81 30 14 4
57	2,601 0078	106 49	30 46 8
58	02 0727	106 60	31 19 2
59	03 1387	106 71	31 51 6
60	04 2058	106 83	32 24 0
90,61	2,605 2741	106 94	81 32 56 4
62	06 3435	107 05	33 28 8
63	07 4140	107 17	34 01 2
64	08 4857	107 28	34 33 6
65	09 5585	107 39	35 06 0
90,66	2,610 6324	107 51	81 35 38 4
67	11 7075	107 62	36 10 8
68	12 7837	107 74	36 43 2
69	13 8611	107 86	37 15 6
70	14 9397	107 96	37 48 0
90,71	2,616 0193	108 09	81 38 20 4
72	17 1002	108 20	38 52 8
73	18 1822	108 31	39 25 2
74	19 2653	108 43	39 57 6
75	20 3496	108 55	40 30 0
90,76	2,621 4351	108 67	81 41 02 4
77	22 5218	108 78	41 34 8
78	23 6096	108 90	42 07 2
79	24 6986	109 01	42 39 6
80	25 7887	109 14	43 12 0
90,81	2,626 8801	109 25	81 43 44 4
82	27 9726	109 37	44 16 8
83	29 0663	109 49	44 49 2
84	30 1612	109 60	45 21 6
85	31 2572	109 73	45 54 0
90,86	2,632 3545	109 84	81 46 26 4
87	33 4529	109 97	46 58 8
88	34 5526	110 09	47 31 2
89	35 6535	110 20	48 03 6
90	36 7555	110 33	48 36 0
90,91	2,637 8588	110 44	81 49 08 4
92	38 9632	110 57	49 40 8
93	40 0689	110 69	50 13 2
94	41 1758	110 81	50 45 6
95	42 2839	110 93	51 18 0
90,96	2,643 3932	111 05	81 51 50 4
97	44 5037	111 18	52 22 8
98	45 6155	111 29	52 55 2
99	46 7284	111 42	53 27 6
91,00	47 8426		54 00 0

N. E. $k=91°$	Ω. k.	Alte Einth. D. 1″.		Gr. M. S.
Gr. M.				
91,00	2,647 8426	111 55	81 54 00 0	
91,01	2,648 9581	111 66	81 54 32 4	
02	50 0747	111 80	55 04 8	
03	51 1927	111 81	55 37 2	
04	52 3118	112 04	56 09 6	
05	53 4322	112 16	56 42 0	
91,06	2,654 5538	112 29	81 57 14 4	
07	55 6767	112 41	57 46 8	
08	56 8008	112 54	58 19 2	
09	57 9262	112 66	58 51 6	
10	59 0528	112 79	59 24 0	
91,11	2,660 1807	112 92	81 59 56 4	
12	61 3099	113 04	82 00 28 8	
13	62 4403	113 17	01 01 2	
14	63 5720	113 29	01 33 6	
15	64 7049	113 43	02 06 0	
91,16	2,665 8392	113 55	82 02 38 4	
17	66 9747	113 68	03 10 8	
18	68 1115	113 80	03 43 2	
19	69 2495	113 94	04 15 6	
20	70 3889	114 06	74 48 0	
91,21	2,671 5295	114 19	82 05 20 4	
22	72 6714	114 32	05 52 8	
23	73 8146	114 46	06 25 2	
24	74 9592	114 58	06 57 6	
25	76 1050	114 71	07 30 0	
91,26	2,677 2521	114 84	82 08 02 4	
27	78 4005	114 97	08 34 8	
28	79 5502	115 11	09 07 2	
29	80 7013	115 23	09 39 6	
30	81 8536	115 37	10 12 0	
91,31	2,683 0073	115 50	82 10 44 4	
32	84 1623	115 63	11 16 8	
33	85 3186	115 76	11 49 2	
34	86 4762	115 90	12 21 6	
35	87 6352	116 03	12 54 0	
91,36	2,688 7955	116 16	82 13 26 4	
37	89 9571	116 30	13 58 8	
38	91 1201	116 43	14 31 2	
39	92 2844	116 57	15 03 6	
40	93 4501	116 70	15 36 0	
91,41	2,694 6171	116 84	82 16 08 4	
42	95 7855	116 97	16 40 8	
43	96 9552	117 11	17 13 2	
44	98 1263	117 24	17 45 6	
45	99 1987	117 38	18 18 0	
91,46	2,700 4725	117 51	82 18 50 4	
47	01 6476	117 66	19 22 8	
48	02 8242	117 79	19 55 2	
49	04 0021	117 93	20 27 6	
50	05 1814		21 00 0	

N. E. $k=91°$	Ω. k.	Alte Einth. D. 1″.		Gr. M. S.
Gr. M.				
91,50	2,705 1814	118 06	82 21 00 0	
91,51	2,706 3620	118 21	82 21 32 4	
52	07 5441	118 34	22 04 8	
53	08 7275	118 48	22 37 2	
54	09 9123	118 63	23 09 6	
55	11 0986	118 76	23 42 0	
91,56	2,712 2862	118 90	82 24 14 4	
57	13 4752	119 04	24 46 8	
58	14 6656	119 18	25 19 2	
59	15 8574	119 32	25 51 6	
60	17 0506	119 47	26 24 0	
91,61	2,718 2453	119 61	82 26 56 4	
62	19 4414	119 74	27 28 8	
63	20 6388	119 89	28 01 2	
64	21 8377	120 04	28 33 6	
65	23 0381	120 17	29 06 0	
91,66	2,724 2398	120 32	82 29 38 4	
67	25 4430	120 47	30 10 8	
68	26 6477	120 60	30 43 2	
69	27 8537	120 75	31 15 6	
70	29 0612	120 90	31 48 0	
91,71	2,730 2702	121 04	82 32 20 4	
72	31 4806	121 19	32 52 8	
73	32 6925	121 33	33 25 2	
74	33 9058	121 48	33 57 6	
75	35 1206	121 63	34 30 0	
91,76	2,736 3369	121 77	82 35 02 4	
77	37 5546	121 92	35 34 8	
78	38 7738	122 07	36 07 2	
79	39 9945	122 21	36 39 6	
80	41 2166	122 36	37 12 0	
91,81	2,742 4402	122 52	82 37 44 4	
82	43 4566	122 66	38 16 8	
83	44 8920	122 81	38 49 2	
84	46 1201	122 96	39 21 6	
85	47 3497	123 11	39 54 0	
91,86	2,748 5808	123 26	82 40 26 4	
87	49 8134	123 41	40 58 8	
88	51 0475	123 56	41 31 2	
89	52 2831	123 72	42 03 6	
90	53 5203	123 86	42 36 0	
91,91	2,754 7589	124 02	82 43 08 4	
92	55 9991	124 17	43 40 8	
93	57 2408	124 33	44 13 2	
94	58 4841	124 48	44 45 6	
95	59 7289	124 63	45 18 0	
91,96	2,760 9752	124 79	82 45 50 4	
97	62 2231	124 94	46 22 8	
98	63 4725	125 09	46 55 2	
99	64 7234	125 26	47 27 6	
92,00	65 9760		48 00 0	

N. E. $k=92°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.
Gr. M.			
92,00	2,765 9760	125 40	82 48 00 0
92,01	2,767 2300	125 57	82 48 32 4
02	68 4857	125 72	49 04 8
03	69 7429	125 88	49 37 2
04	71 0017	126 03	50 09 6
05	72 2620	126 19	50 42 0
92,06	2,773 5239	126 35	82 51 14 4
07	74 7874	126 51	51 46 8
08	76 0525	126 67	52 19 2
09	77 3192	126 82	52 51 6
10	78 5874	127 00	53 24 0
92,11	2,779 8574	127 15	82 53 56 4
12	81 1289	127 30	54 28 8
13	82 4019	127 47	55 01 2
14	83 6766	127 63	55 33 6
15	84 9529	127 80	56 06 0
92,16	2,786 2309	127 95	82 56 38 4
17	87 5104	128 12	57 10 8
18	88 7916	128 28	57 43 2
19	90 0744	128 45	58 15 6
20	91 3589	128 60	58 48 0
92,21	2,792 6449	128 78	82 59 20 4
22	93 9327	128 93	82 59 52 8
23	95 2220	129 11	83 00 25 2
24	96 5131	129 27	00 57 6
25	97 8058	129 43	01 30 0
92,26	2,799 1001	129 60	83 02 02 4
27	2,800 3961	129 77	02 34 8
28	01 6938	129 94	03 07 2
29	02 9932	130 10	03 39 6
30	04 2942	130 27	04 12 0
92,31	2,805 5969	130 44	83 04 44 4
32	06 9013	130 61	05 16 8
33	08 2074	130 78	05 49 2
34	09 5152	130 95	06 21 6
35	10 8247	131 12	06 54 0
92,36	2,812 1359	131 29	83 07 26 4
37	13 4488	131 46	07 58 8
38	14 7634	131 63	08 31 2
39	16 0797	131 81	09 03 6
40	17 3978	131 98	09 36 0
92,41	2,818 7176	132 15	83 10 08 4
42	20 0391	132 32	10 40 8
43	21 3623	132 50	11 13 2
44	22 6873	132 68	11 45 6
45	24 0141	132 85	12 18 0
92,46	2,825 3426	133 02	83 12 50 4
47	26 6728	133 20	13 22 8
48	28 0048	133 38	13 55 2
49	29 3386	133 55	14 27 6
50	30 6741		15 00 0

N. E. $k=92°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.
Gr. M.			
92,50	2,830 6741	133 73	83 15 00 0
92,51	2,832 0114	133 91	83 15 32 4
52	33 3505	134 09	16 04 8
53	34 6914	134 26	16 37 2
54	36 0340	134 45	17 09 6
55	37 3785	134 62	17 42 0
92,56	2,838 7247	134 81	83 18 14 4
57	40 0728	134 99	18 46 8
58	41 4227	135 16	19 19 2
59	42 7743	135 35	19 51 6
60	44 1278	135 53	20 24 0
92,61	2,845 4831	135 72	83 20 56 4
62	46 8403	135 89	21 28 8
63	48 1992	136 08	22 01 2
64	49 5600	136 27	22 33 6
65	50 9227	136 45	23 06 0
92,66	2,852 2872	136 63	83 23 38 4
67	53 6535	136 82	24 10 8
68	55 0217	137 01	24 43 2
69	56 3918	137 19	25 15 6
70	57 7637	137 38	25 48 0
92,71	2,859 1375	137 57	83 26 20 4
72	60 5132	137 76	26 52 8
73	61 8908	137 95	27 25 2
74	63 2703	138 13	27 57 6
75	64 6516	138 32	28 30 0
92,76	2,866 0348	138 52	83 29 02 4
77	67 4200	138 71	29 34 8
78	68 8071	138 89	30 07 2
79	70 1960	139 09	30 39 6
80	71 5869	139 28	31 12 0
92,81	2,872 9797	139 48	83 31 44 4
82	74 3745	139 67	32 16 8
83	75 7712	139 86	32 49 2
84	77 1698	140 06	33 21 6
85	78 5704	140 25	33 54 0
92,86	2,879 9727	140 45	83 34 26 4
87	81 3774	140 64	34 58 8
88	82 7838	140 84	35 31 2
89	84 1922	141 04	36 03 6
90	85 6026	141 24	36 36 0
92,91	2,887 0150	141 43	83 37 08 4
92	88 4293	141 64	37 40 8
93	89 8457	141 83	38 13 2
94	91 2640	142 03	38 45 6
95	92 6843	142 24	39 18 0
92,96	2,894 1067	142 44	83 39 50 4
97	95 5311	142 63	40 22 8
98	96 9574	142 84	40 55 2
99	98 3858	143 05	41 27 6
93,00	99 8163		42 00 0

N. E. $k=93°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.
Gr. M.			
93,00	2,899 8163	143 25	83 42 00 0
93,01	2,901 2488	143 45	83 42 32 4
02	02 6833	143 65	43 04 8
03	04 1198	143 87	43 37 2
04	05 5585	144 06	44 09 6
05	06 9991	144 28	44 42 0
93,06	2,908 4419	144 48	83 45 14 4
07	09 8867	144 69	45 46 8
08	11 3336	144 90	46 19 2
09	12 7826	145 10	46 51 6
10	14 2336	145 32	47 24 0
93,11	2,915 6868	145 53	83 47 56 4
12	17 1421	145 73	48 28 8
13	18 5994	145 95	49 01 2
14	20 0589	146 17	49 33 6
15	21 5206	146 37	50 06 0
93,16	2,922 9843	146 59	83 50 38 4
17	24 4502	146 80	51 10 8
18	25 9182	147 01	51 43 2
19	27 3883	147 23	52 15 6
20	28 8606	147 45	52 48 0
93,21	2,930 3351	147 66	83 53 20 4
22	31 8117	147 89	53 52 8
23	33 2906	148 09	54 25 2
24	34 7715	148 32	54 57 6
25	36 2547	148 54	55 30 0
93,26	2,937 7401	148 75	83 56 02 4
27	39 2276	148 98	56 34 8
28	40 7174	149 19	57 07 2
29	42 2093	149 42	57 39 6
30	43 7035	149 64	58 12 0
93,31	2,945 1999	149 87	83 58 44 4
32	46 6986	150 08	59 16 8
33	48 1994	150 32	83 59 49 2
34	49 7026	150 53	84 00 21 6
35	51 2079	150 77	00 54 0
93,36	2,952 7156	150 99	84 01 26 4
37	54 2255	151 21	01 58 8
38	55 7376	151 45	02 31 2
39	57 2521	151 67	03 03 6
40	58 7688	151 90	03 36 0
93,41	2,960 2878	152 13	84 04 08 4
42	61 8091	152 36	04 40 8
43	63 3327	152 60	05 13 2
44	64 8587	152 82	05 45 6
45	66 3869	153 06	06 18 0
93,46	2,967 9175	153 29	84 06 50 4
47	69 4504	153 53	07 22 8
48	70 9857	153 76	07 55 2
49	72 5233	153 99	08 27 6
50	74 0632		09 00 0

N. E. $k=93°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.
Gr. M.			
93,50	2,974 0632	154 23	84 09 00 0
93,51	2,975 6055	154 47	84 09 32 4
52	77 1502	154 71	10 04 8
53	78 6973	154 95	10 37 2
54	80 2468	155 18	11 09 6
55	81 7986	155 42	11 42 0
93,56	2,983 3528	155 67	84 12 14 4
57	84 9095	155 91	12 46 8
58	86 4686	156 15	13 19 2
59	88 0301	156 39	13 51 6
60	89 5940	156 63	14 24 0
93,61	2,991 1603	156 88	84 14 56 4
62	92 7291	157 13	15 28 8
63	94 3004	157 37	16 01 2
64	95 8741	157 62	16 33 6
65	97 4503	157 86	17 06 0
93,66	2,999 0289	158 12	84 17 38 4
67	3,000 6101	158 36	18 10 8
68	02 1937	158 61	18 43 2
69	03 7798	158 87	19 15 6
70	05 3685	159 11	19 48 0
93,71	3,006 9596	159 37	84 20 20 4
72	08 5533	159 62	20 52 8
73	10 1495	159 88	21 25 2
74	11 7483	160 13	21 57 6
75	13 3496	160 38	22 30 0
93,76	3,014 9534	160 64	84 23 02 4
77	16 5598	160 90	23 34 8
78	18 1688	161 16	24 07 2
79	19 7804	161 41	24 39 6
80	21 3945	161 68	25 12 0
93,81	3,023 0113	161 94	84 25 44 4
82	24 6307	162 19	26 16 8
83	26 2526	162 46	26 49 2
84	27 8772	162 73	27 21 6
85	29 5045	162 98	27 54 0
93,86	3,031 1343	163 25	84 28 26 4
87	32 7668	163 52	28 58 8
88	34 4020	163 79	29 31 2
89	36 0399	164 05	30 03 6
90	37 6804	164 32	30 36 0
93,91	3,039 3236	164 59	84 31 08 4
92	40 9695	164 86	31 40 8
93	42 6181	165 13	32 13 2
94	44 2694	165 40	32 45 6
95	45 9234	165 67	33 18 0
93,96	3,047 5801	165 95	84 33 50 4
97	49 2396	166 22	34 22 8
98	50 9018	166 50	34 55 2
99	52 5668	166 78	35 27 6
94,00	54 2346		36 00 0

N. E.		Alte Einth.						N. E.		Alte Einth.					
$k=94°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.						$k=94°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.					
Gr. M.				Gr.	M.	S.		Gr. M.				Gr.	M.	S.	
94,00	3,054 2346	167	05	84	36	00	0	94,50	3,141 3643	182	21	85	03	00	0
94,01	3,055 9051	167	33	84	36	32	4	94,51	3,143 1864	182	54	85	03	32	4
02	57 5784	167	61		37	04	8	52	45 0118	182	88		04	04	8
03	59 2545	167	89		37	37	2	53	46 8406	183	20		04	37	2
04	60 9334	168	17		38	09	6	54	48 6726	183	55		05	09	6
05	62 6151	168	46		38	42	0	55	50 5081	183	87		05	42	0
94,06	3,064 2997	168	73	84	39	14	4	94,56	3,152 3468	184	22	85	06	14	4
07	65 9870	169	02		39	46	8	57	54 1890	184	56		06	46	8
08	67 6772	169	31		40	19	2	58	56 0346	184	89		07	19	2
09	69 3703	169	59		40	51	6	59	57 8835	185	24		07	51	6
10	71 0662	169	88		41	24	0	60	59 7359	185	58		08	24	0
94,11	3,072 7650	170	16	84	41	56	4	94,61	3,161 5917	185	92	85	08	56	4
12	74 4666	170	46		42	28	8	62	63 4509	186	27		09	28	8
13	76 1712	170	74		43	01	2	63	65 3136	186	61		10	01	2
14	77 8786	171	04		43	33	6	64	67 1797	186	96		10	33	6
15	79 5890	171	33		44	06	0	65	69 0493	187	31		11	06	0
94,16	3,081 3023	171	62	84	44	38	4	94,66	3,170 9224	187	66	85	11	38	4
17	83 0185	171	91		45	10	8	67	72 7990	188	02		12	10	8
18	84 7376	172	21		45	43	2	68	74 6792	188	36		12	43	2
19	86 4597	172	50		46	15	6	69	76 5628	188	72		13	15	6
20	88 1847	172	80		46	48	0	70	78 4500	189	08		13	48	0
94,21	3,089 9127	173	10	84	47	20	4	94,71	3,180 3408	189	43	85	14	20	4
22	91 6437	173	40		47	52	8	72	82 2351	189	79		14	52	8
23	93 3777	173	70		48	25	2	73	84 1330	190	15		15	25	2
24	95 1147	174	00		48	57	6	74	86 0345	190	51		15	57	6
25	96 8547	174	30		49	30	0	75	87 9396	190	88		16	30	0
94,26	3,098 5977	174	60	84	50	02	4	94,76	3,189 8484	191	23	85	17	02	4
27	3,100 3437	174	91		50	34	8	77	91 7607	191	61		17	34	8
28	02 0928	175	21		51	07	2	78	93 6768	191	97		18	07	2
29	03 8449	175	52		51	39	6	79	95 5965	192	33		18	39	6
30	05 6001	175	83		52	12	0	80	97 5198	192	71		19	12	0
94,31	3,107 3584	176	14	84	52	44	4	94,81	3,199 4469	193	08	85	19	44	4
32	09 1198	176	44		53	16	8	82	3,201 3777	193	45		20	16	8
33	10 8842	176	76		53	49	2	83	03 3122	193	82		20	49	2
34	12 6518	177	06		54	21	6	84	05 2504	194	20		21	21	6
35	14 4224	177	38		54	54	0	85	07 1924	194	57		21	54	0
94,36	3,116 1962	177	70	84	55	26	4	94,86	3,209 1381	194	96	85	22	26	4
37	17 9732	178	01		55	58	8	87	11 0877	195	33		22	58	8
38	19 7533	178	32		56	31	2	88	13 0410	195	71		23	31	2
39	21 5365	178	65		57	03	6	89	14 9981	196	10		24	03	6
40	23 3230	178	96		57	36	0	90	16 9591	196	48		24	36	0
94,41	3,125 1126	179	28	84	58	08	4	94,91	3,218 9239	196	87	85	25	08	4
42	26 9054	179	60		58	40	8	92	20 8926	197	25		25	40	8
43	28 7014	179	92		59	13	2	93	22 8651	197	64		26	13	2
44	30 5006	180	25	84	59	45	6	94	24 8415	198	00		26	45	6
45	32 3031	180	57	85	00	18	0	95	26 8219	198	42		27	18	0
94,46	3,134 1088	180	90	85	00	50	4	94,96	3,228 8061	198	82	85	27	50	4
47	35 9178	181	22		01	22	8	97	30 7943	199	21		28	22	8
48	37 7300	181	55		01	55	2	98	32 7864	199	61		28	55	2
49	39 5455	181	88		02	27	6	99	34 7825	200	00		29	27	6
50	41 3643				03	00	0	95,00	36 7825			85	30	00	0

N. E. $k=95°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.
Gr. M.			
95,00	3,236 7825	200 41	85 30 00 0
95,01	3,238 7866	200 81	85 30 32 4
02	40 7947	201 20	31 04 8
03	42 8067	201 62	31 37 2
04	44 8229	202 02	32 09 6
05	46 8431	202 43	32 42 0
95,06	3,248 8674	202 83	85 33 14 4
07	50 8957	203 25	33 46 8
08	52 9282	203 66	34 19 2
09	54 9648	204 08	34 51 6
10	57 0056	204 49	35 24 0
95,11	3,259 0505	204 91	85 35 56 4
12	61 0996	205 33	36 28 8
13	63 1529	205 75	37 01 2
14	65 2104	206 17	37 33 6
15	67 2721	206 60	38 06 0
95,16	3,269 3381	207 03	85 38 38 4
17	71 4084	207 45	39 10 8
18	73 4829	207 88	39 43 2
19	75 5617	208 31	40 15 6
20	77 6448	208 75	40 48 0
95,21	3,279 7323	209 19	85 41 20 4
22	81 8242	209 62	41 52 8
23	83 9204	210 06	42 25 2
24	86 0210	210 50	42 57 6
25	88 1260	210 94	43 30 0
95,26	3,290 2354	211 39	85 44 02 4
27	92 3493	211 83	44 34 8
28	94 4676	212 29	45 07 2
29	96 5905	212 73	45 39 6
30	98 7178	213 19	46 12 0
95,31	3,300 8497	213 64	85 46 44 4
32	02 9861	214 09	47 16 8
33	05 1270	214 56	47 49 2
34	07 2726	215 01	48 21 6
35	09 4227	215 48	48 54 0
95,36	3,311 5775	215 94	85 49 26 4
37	13 7369	216 40	49 58 8
38	15 9009	216 88	50 31 2
39	18 0697	217 34	51 03 6
40	20 2431	217 82	51 36 0
95,41	3,322 4213	218 29	85 52 08 4
42	24 6042	218 77	52 40 8
43	26 7919	219 25	53 13 2
44	28 9844	219 72	53 45 6
45	31 1816	220 21	54 18 0
95,46	3,333 3837	220 70	85 54 50 4
47	35 5907	221 18	55 22 8
48	37 8025	221 67	55 55 2
49	40 0192	222 16	56 27 6
50	42 2408		57 00 0

N. E. $k=95°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.
Gr. M.			
95,50	3,342 2408	222 65	85 57 00 0
95,51	3,344 4673	223 15	85 57 32 4
52	46 6988	223 65	58 04 8
53	48 9353	224 15	58 37 2
54	51 1768	224 65	59 09 6
55	53 4233	225 15	85 59 42 0
95,56	3,355 6748	225 66	86 00 14 4
57	57 9314	226 18	00 46 8
58	60 1932	226 68	01 19 2
59	62 4600	227 19	01 51 6
60	64 7319	227 72	02 24 0
95,61	3,367 0091	228 23	86 02 56 4
62	69 2914	228 75	03 28 8
63	71 5789	229 27	04 01 2
64	73 8716	229 80	04 33 6
65	76 1696	230 33	05 06 0
95,66	3,378 4729	230 86	86 05 38 4
67	80 7815	231 39	06 10 8
68	83 0954	231 93	06 43 2
69	85 4147	232 47	07 15 6
70	87 7394	233 00	07 48 0
95,71	3,390 0694	233 55	86 08 20 4
72	92 4049	234 09	08 52 8
73	94 7458	234 65	09 25 2
74	97 0923	235 19	09 57 6
75	99 4442	235 74	10 30 0
95,76	3,401 8016	236 31	86 11 02 4
77	04 1647	236 86	11 34 8
78	06 5333	237 42	12 07 2
79	08 9075	237 98	12 39 6
80	11 2873	238 56	13 12 0
95,81	3,413 6729	239 12	86 13 44 4
82	16 0641	239 69	14 16 8
83	18 4610	240 27	14 49 2
84	20 8637	240 84	15 21 6
85	23 2721	241 43	15 54 0
95,86	3,425 6864	242 00	86 16 26 4
87	28 1064	242 60	16 58 8
88	30 5324	243 18	17 31 2
89	32 9642	243 78	18 03 6
90	35 4020	244 37	18 36 0
95,91	3,437 8457	244 96	86 19 08 4
92	40 2953	245 57	19 40 8
93	42 7510	246 17	20 13 2
94	45 2127	246 77	20 45 6
95	47 6804	247 39	21 18 0
95,96	3,450 1543	248 00	86 21 50 4
97	52 6343	248 61	22 22 8
98	55 1204	249 23	22 55 2
99	57 6127	249 85	23 27 6
96,00	60 1112		24 00 0

N. E. $k=96°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	Alte Einth. Gr. M. S.
Gr. M.			
96,00	3,460 1112	250 48	86 24 00 0
96,01	3,462 6160	251 11	86 24 32 4
02	65 1271	251 73	25 04 8
03	67 6444	252 37	25 37 2
04	70 1681	253 01	26 09 6
05	72 6982	253 65	26 42 0
96,06	3,475 2347	254 29	86 27 14 4
07	77 7776	254 94	27 46 8
08	80 3270	255 59	28 19 2
09	82 8829	256 24	28 51 6
10	85 4453	256 90	29 24 0
96,11	3,488 0143	257 56	86 29 56 4
12	90 5899	258 22	30 28 8
13	93 1721	258 90	31 01 2
14	95 7611	259 56	31 33 6
15	98 3567	260 23	32 06 0
96,16	3,500 9590	260 92	86 32 38 4
17	03 5682	261 59	33 10 8
18	06 1841	262 29	33 43 2
19	08 8069	262 97	34 15 6
20	11 4366	263 66	34 48 0
96,21	3,514 0732	264 36	86 35 20 4
22	16 7168	265 06	35 52 8
23	19 3674	265 76	36 25 2
24	22 0250	266 46	36 57 6
25	24 6896	267 18	37 30 0
96,26	3,527 3614	267 89	86 38 02 4
27	30 0403	268 61	38 34 8
28	32 7264	269 33	39 07 2
29	35 4197	270 06	39 39 6
30	38 1203	270 79	40 12 0
96,31	3,540 8282	271 52	86 40 44 4
32	43 5434	272 26	41 16 8
33	46 2660	273 00	41 49 2
34	48 9960	273 75	42 21 6
35	51 7335	274 50	42 54 0
96,36	3,554 4785	275 25	86 43 26 4
37	57 2310	276 01	43 58 8
38	59 9911	276 78	44 31 2
39	62 7589	277 54	45 03 6
40	65 5343	278 31	45 36 0
96,41	3,568 3174	279 09	86 46 08 4
42	71 1083	279 87	46 40 8
43	73 9070	280 65	47 13 2
44	76 7135	281 44	47 45 6
45	79 5279	282 23	48 18 0
96,46	3,582 3502	283 03	86 48 50 4
47	85 1805	283 84	49 22 8
48	88 0189	284 64	49 55 2
49	90 8653	285 45	50 27 6
50	93 7198		51 00 0

N. E. $k=96°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	Alte Einth. Gr. M. S.
Gr. M.			
96,50	3,593 7198	286 26	86 51 00 0
96,51	3,596 5824	287 09	86 51 32 4
52	3,599 4533	287 91	52 04 8
53	3,602 3324	288 75	52 37 2
54	05 2199	289 58	53 09 6
55	08 1157	290 41	53 42 0
96,56	3,611 0198	291 26	86 54 14 4
57	13 9325	292 11	54 46 8
58	16 8536	292 96	55 19 2
59	19 7832	293 83	55 51 6
60	22 7215	294 69	56 24 0
96,61	3,625 6684	295 56	86 56 56 4
62	28 6240	296 44	57 28 8
63	31 5884	297 31	58 01 2
64	34 5615	298 20	58 33 6
65	37 5435	299 09	59 06 0
96,66	3,640 5344	299 99	86 59 38 4
67	43 5343	300 89	87 00 10 8
68	46 5432	301 80	00 43 2
69	49 5612	302 70	01 15 6
70	52 5882	303 63	01 48 0
96,71	3,655 6245	304 55	87 02 20 4
72	58 6700	305 48	02 52 8
73	61 7248	306 41	03 25 2
74	64 7889	307 35	03 57 6
75	67 8624	308 31	04 30 0
96,76	3,670 9455	309 25	87 05 02 4
77	74 0380	310 21	05 34 8
78	77 1401	311 17	06 07 2
79	80 2518	312 15	06 39 6
80	83 3733	313 12	07 12 0
96,81	3,686 5045	314 10	87 07 44 4
82	89 6455	315 09	08 16 8
83	92 7964	316 09	08 49 2
84	95 9573	317 09	09 21 6
85	99 1282	318 09	09 54 0
96,86	3,702 3091	319 11	87 10 26 4
87	05 5002	320 13	10 58 8
88	08 7015	321 15	11 31 2
89	11 9130	322 19	12 03 6
90	15 1349	323 23	12 36 0
96,91	3,718 3672	324 28	87 13 08 4
92	21 6100	325 33	13 40 8
93	24 8633	326 39	14 13 2
94	28 1272	327 46	14 45 6
95	31 4018	328 53	15 18 0
96,96	3,734 6871	329 61	87 15 50 4
97	37 9832	330 71	16 22 8
98	41 2903	331 80	16 55 2
99	44 6083	332 90	17 27 6
97,00	47 9373		18 00 0

N. E. $k=97°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.		N. E. $k=97°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.	Gr. M.			Gr. M. S.
97,00	3,747 9373	334 01	87 18 00 0	97,50	3,930 3154	400 91	87 45 00 0
97,01	3,751 2774	335 13	87 18 32 4	97,51	3,934 3245	402 51	87 45 32 4
02	54 6287	336 26	19 04 8	52	38 3496	404 15	46 04 8
03	57 9913	337 39	19 37 2	53	42 3911	405 78	46 37 2
04	61 3652	338 53	20 09 6	54	46 4489	407 43	47 09 6
05	64 7505	339 68	20 42 0	55	50 5232	409 10	47 42 0
97,06	3,768 1473	340 84	87 21 14 4	97,56	3,954 6142	410 78	87 48 14 4
07	71 5557	342 00	21 46 8	57	58 7220	412 47	48 46 8
08	74 9757	343 17	22 19 2	58	62 8467	414 18	49 19 2
09	78 4074	344 36	22 51 6	59	66 9885	415 90	49 51 6
10	81 8510	345 54	23 24 0	60	71 1475	417 63	50 24 0
97,11	3,785 3064	346 74	87 23 56 4	97,61	3,975 3238	419 39	87 50 56 4
12	88 7738	347 94	24 28 8	62	79 5177	421 15	51 28 8
13	92 2532	349 16	25 01 2	63	83 7292	422 93	52 01 2
14	95 7448	350 38	25 33 6	64	87 9585	424 73	52 33 6
15	99 2486	351 61	26 06 0	65	92 2058	426 53	53 06 0
97,16	3,802 7647	352 86	87 26 38 4	97,66	3,996 4711	428 37	87 53 38 4
17	06 2933	354 09	27 10 8	67	4,000 7548	430 20	54 10 8
18	09 8342	355 36	27 43 2	68	05 0568	432 06	54 43 2
19	13 3878	356 62	28 15 6	69	09 3774	433 94	55 15 6
20	16 9540	357 90	28 48 0	70	13 7168	435 82	55 48 0
97,21	3,820 5330	359 18	87 29 20 4	97,71	4,018 0750	437 73	87 56 20 4
22	24 1248	360 48	29 52 8	72	22 4523	439 63	56 52 8
23	27 7296	361 77	30 25 2	73	26 8489	441 59	57 25 2
24	31 3473	363 09	30 57 6	74	31 2648	443 55	57 57 6
25	34 9782	364 42	31 30 0	75	35 7003	445 53	58 30 0
97,26	3,838 6224	365 74	87 32 02 4	97,76	4,040 1556	448 52	87 59 02 4
27	42 2798	367 08	32 34 8	77	44 6308	449 53	87 59 34 8
28	45 9506	368 44	33 07 2	78	49 1261	451 56	88 00 07 2
29	49 6350	369 80	33 39 6	79	53 6417	453 61	00 39 6
30	53 3330	371 17	34 12 0	80	58 1778	455 67	01 12 0
97,31	3,857 0447	372 55	87 34 44 4	97,81	4,062 7345	457 76	88 01 44 4
32	60 7702	373 94	35 16 8	82	67 3121	459 86	02 16 8
33	64 5096	375 34	35 49 2	83	71 9107	461 98	02 49 2
34	68 2630	376 76	36 21 6	84	76 5305	464 13	03 21 6
35	72 0306	378 18	36 54 0	85	81 1718	466 29	03 54 0
97,36	3,875 8124	379 62	87 37 26 4	97,86	4,085 8347	468 47	88 04 26 4
37	79 6086	381 06	37 58 8	87	90 5194	470 68	04 58 8
38	83 4192	382 52	38 31 2	88	95 2262	471 90	05 31 2
39	87 2444	383 98	39 03 6	89	4,099 9552	475 14	06 03 6
40	91 0842	385 46	39 36 0	90	4,104 7066	477 42	06 36 0
97,41	3,894 9388	386 96	87 40 08 4	97,91	4,109 4808	479 70	88 07 08 4
42	3,898 8084	388 45	40 40 8	92	14 2778	482 01	07 40 8
43	3,902 6929	389 97	41 13 2	93	19 0979	484 35	08 13 2
44	06 5926	391 50	41 45 6	94	23 9414	486 71	08 45 6
45	10 5076	393 03	42 18 0	95	28 8085	489 08	09 18 0
97,46	3,914 4379	394 58	87 42 50 4	97,96	4,133 6993	491 48	88 09 50 4
47	18 3837	396 15	43 22 8	97	38 6141	493 91	10 22 8
48	22 3452	397 72	43 55 2	98	43 5532	496 37	10 55 2
49	26 3224	399 30	44 27 6	99	48 5169	498 83	11 27 6
50	30 3154		45 00 0	98,00	53 5052		12 00 0

N. E. $k=98°$	$\mathfrak{L}$. k.	Alte Einth. Gr. M. S.
98,00	4,153 5052	88 12 00 0
98,01	4,158 5186	88 12 32 4
02	63 5572	13 04 8
03	68 6213	13 37 2
04	73 7112	14 09 6
05	78 8271	14 42 0
98,06	4,183 9693	88 15 14 4
07	89 1381	15 46 8
08	94 3337	16 19 2
09	4,199 5564	16 51 6
10	4,204 8065	17 24 0
98,11	4,210 0844	88 17 56 4
12	15 3902	18 28 8
13	20 7243	19 01 2
14	26 0870	19 33 6
15	31 4786	20 06 0
98,16	4,236 8995	88 20 38 4
17	42 3498	21 10 8
18	47 8300	21 43 2
19	53 3405	22 15 6
20	58 8814	22 48 0
98,21	4,264 4532	88 23 20 4
22	70 0561	23 52 8
23	75 6907	24 25 2
24	81 3572	24 57 6
25	87 0559	25 30 0
98,26	4,292 7873	88 26 02 4
27	4,298 5517	26 34 8
28	4,304 3495	27 07 2
29	10 1812	27 39 6
30	16 0470	28 12 0
98,31	4,321 9474	88 28 44 4
32	27 8828	29 16 8
33	33 8537	29 49 2
34	39 8604	30 21 6
35	45 9034	30 54 0
98,36	4,351 9831	88 31 26 4
37	58 1000	31 58 8
38	64 2554	32 31 2
39	70 4472	33 03 6
40	76 6784	33 36 0
98,41	4,382 9487	88 34 08 4
42	89 2585	34 40 8
43	4,395 6084	35 13 2
44	4,401 9988	35 45 6
45	08 4303	36 18 0
98,46	4,414 9035	88 36 50 4
47	21 4188	37 22 8
48	27 9768	37 55 2
49	34 5781	38 27 6
50	41 2233	39 00 0

N. E. $k=98°$	$\mathfrak{L}$. k.	Alte Einth. Gr. M. S.
98,50	4,441 2233	88 39 00 0
98,51	4,447 9129	88 39 32 4
52	54 6475	40 04 8
53	61 4278	40 37 2
54	86 2544	41 09 6
55	75 1279	41 42 0
98,56	4,482 0489	88 42 14 4
57	89 0182	42 46 8
58	4,496 0363	43 19 2
59	4,503 1041	43 51 6
60	10 2221	44 24 0
98,61	4,517 3912	88 44 56 4
62	24 6120	45 28 8
63	31 8853	46 01 2
64	39 2119	46 33 6
65	46 5926	47 06 0
98,66	4,554 0281	88 47 38 4
67	61 5193	48 10 8
68	69 0671	48 43 2
69	76 6722	49 15 6
70	84 3356	49 48 0
98,71	4,592 0582	88 50 20 4
72	4,599 8409	50 52 8
73	4,607 6846	51 25 2
74	15 5903	51 57 6
75	23 5590	52 30 0
98,76	4,631 5917	88 53 02 4
77	39 6894	53 34 8
78	47 8532	54 07 2
79	56 0842	54 39 6
80	64 3835	55 12 0
98,81	4,672 7522	88 55 44 4
82	81 1916	56 16 8
83	89 7028	56 49 2
84	4,698 2870	57 21 6
85	4,706 9455	57 54 0
98,86	4,715 6797	88 58 26 4
87	24 4908	58 58 8
88	33 3802	88 59 31 2
89	42 3493	89 00 03 6
90	51 3906	00 36 0
98,91	4,760 5325	89 01 08 4
92	69 7496	01 40 8
93	79 0525	02 13 2
94	88 4426	02 45 6
95	97 9218	03 18 0
98,96	4,807 4917	89 03 50 4
97	17 1540	04 22 8
98	26 9106	04 55 2
99	36 7634	05 27 6
99,00	46 7141	06 00 0

N. E. $k=99°$	Ω. k.	Alte Einth.
Gr. M.		Gr. M. S.
99,00	4,846 7141	89 06 00 0
99,01	4,856 7648	89 06 32 4
02	4,866 9176	07 04 8
03	4,877 1745	07 37 2
04	4,887 5377	08 09 6
05	4,898 0094	08 42 0
99,06	4,908 5919	89 09 14 4
07	4,919 2876	09 46 8
08	4,930 0989	10 19 2
09	4,941 0283	10 51 6
10	4,952 0785	11 24 0
99,11	4,963 2522	89 11 56 4
12	4,974 5521	12 28 8
13	4,985 9812	13 01 2
14	4,997 5423	13 33 6
15	5,009 2387	14 06 0
99,16	5,021 0735	89 14 38 4
17	5,033 0501	15 10 8
18	5,045 1718	15 43 2
19	5,057 4422	16 15 6
20	5,069 8651	16 48 0
99,21	5,082 4442	89 17 20 4
22	5,095 1835	17 52 8
23	5,108 0872	18 25 2
24	5,121 1596	18 57 6
25	5,134 4052	19 30 0
99,26	5,147 8285	89 20 02 4
27	5,161 4344	20 34 8
28	5,175 2281	21 07 2
29	5,189 2146	21 39 6
30	5,203 3995	22 12 0
99,31	5,217 7886	89 22 44 4
32	5,232 3870	23 16 8
33	5,247 2030	23 49 2
34	5,262 2411	24 21 6
35	5,277 5089	24 54 0
99,36	5,293 0133	89 25 26 4
37	5,308 7620	25 58 8
38	5,324 7626	26 31 2
39	5,341 0233	27 03 6
40	5,357 5529	27 36 0
99,41	5,374 3602	89 28 08 4
42	5,391 4549	28 40 8
43	5,408 8469	29 13 2
44	5,426 5467	29 45 6
45	5,444 5654	30 18 0
99,46	5,462 9148	89 30 50 4
47	5,481 6072	31 22 8
48	5,500 6556	31 55 2
49	5,520 0739	32 27 6
50	5,539 8767	33 00 0

N. E. $k=99°$	Ω. k.	Alte Einth.
Gr. M.		Gr. M. S.
99,50	5,539 8767	89 33 00 0
99,51	5,560 0796	89 33 32 4
52	5,580 6991	34 04 8
53	5,601 7527	34 37 2
54	5,623 2591	35 09 6
55	5,645 2382	35 42 0
99,56	5,667 7112	89 36 14 4
57	5,690 7009	36 46 8
58	5,714 2316	37 19 2
59	5,738 3293	37 51 6
60	5,763 0221	38 24 0
99,61	5,788 3401	89 38 56 4
62	5,814 3157	39 28 8
63	5,840 9841	40 01 2
64	5,868 3832	40 33 6
65	5,896 5543	41 06 0
99,66	5,925 5419	89 41 38 4
67	5,955 3950	42 10 8
68	5,986 1668	42 43 2
69	6,017 9157	43 15 6
70	6,050 7056	43 48 0
99,71	6,084 6073	89 44 20 4
72	6,119 6987	44 52 8
73	6,156 0664	45 25 2
74	6,193 8069	45 57 6
75	6,233 0277	46 30 0
99,76	6,273 8498	89 47 02 4
77	6,316 4095	47 34 8
78	6,360 8614	48 07 2
79	6,407 3815	48 39 6
80	6,456 1718	49 12 0
99,81	6,507 4651	89 49 44 4
82	6,561 5324	50 16 8
83	6,618 6909	50 49 2
84	6,679 3156	51 21 6
85	6,743 8542	51 54 0
99,86	6,812 8471	89 52 26 4
87	6,886 9551	52 58 8
88	6,966 9979	53 31 2
89	7,054 0093	54 03 6
90	7,149 3195	54 36 0
99,91	7,254 6801	89 55 08 4
92	7,372 4632	55 40 8
93	7,505 9946	56 13 2
94	7,660 1453	56 45 6
95	7,842 4669	57 18 0
99,96	8,065 6105	89 57 50 4
97	8,353 2925	58 22 8
89	8,758 7577	58 55 2
99	9,451 9048	89 59 27 6
100,00	Infin. positiv.	90 00 00 0

(Die Fortsetzung folgt.)

7.

Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques.

(Suite du mémoire No. 3. dans le cahier précédent.)

(Par M. *J. V. Poncelet*, chef de Bataillon du Génie.)

Analyse des transversales.

Première partie,

spécialement consacrée à l'exposition générale de la méthode considérée dans son application aux lignes géométriques individuelles.

§. 1.

Préliminaires relatifs aux lignes des second et troisième ordres.

Pour donner, tout de suite, une idée de nos méthodes, et en rendre l'exposition générale plus claire et plus facile, nous commencerons par les appliquer au cas simple des lignes du second ordre, ou du système de deux droites indéfinies situées, à volonté, sur un même plan: quelques exemples suffiront pour montrer comment les principes de la théorie des transversales conduisent directement aux propriétés les plus universelles de ces lignes.

Des quadrilatères inscrits aux lignes du second ordre.

143. Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque *), avec ses deux diagonales AC et BD se rencontrant au point G, et dont E, F sont les points de concours des couples de côtés opposés AB et CD, AD et BC. Soit ae une droite ou transversale arbitraire, rencontrant les directions indéfinies des diagonales AC, BD aux points e, f, et celles des côtés AB, BC, CD, DA aux points a, b, c, d respectivement. On aura, en vertu du théorème fondamental de *Carnot* et en tant que le triangle Eac, se trouve coupé par le système des deux côtés opposés ADF, BCF, du qua-

*) Le lecteur est prié de vouloir bien suppléer, dans tout le cours de ces recherches, les figures dont il y est simplement fait mention: sans cette attention, il lui serait difficile, pour beaucoup de cas, de suivre la marche des calculs et des raisonnemens.

drilatère, considéré comme une ligne du second ordre

$$\frac{EA.EB}{ED.EC}\cdot\frac{ad.ab}{cd.cb}\cdot\frac{cD.cC}{aA.aB}=1.$$

Le même triangle, coupé par le système des deux diagonales *ACe*, *BDf*, donnera pareillement

$$\frac{CD.EC}{EA.EB}\cdot\frac{aA.aB}{cD.cC}\cdot\frac{ce.cf}{ae.af}=1;$$

comparant entre elles ces équations, on en déduira cette troisième

$$\frac{ab.ad}{ae.af}=\frac{cb.cd}{ce.cf}.$$

Il est clair qu'en traitant de même les triangles *Ebd*, *efG*, qui sont formés par la transversale arbitraire *ef* et par le couple des deux autres côtés opposés ou des diagonales du quadrilatère *ABCD*, on auroit également

$$\frac{ba.be}{be.bf}=\frac{da.de}{de.df},\qquad\frac{ea.ec}{eb.ed}=\frac{fa.fc}{fb.fd},$$

relations qui, étant combinées entre elles et avec la précédente par voie de multiplication ou de division, donnent lieu à ces quatre autres

$$ec.ab.df=eb.af.de,\quad ea.cd.bf=cd.cf.ab$$
$$ad.be.cf=ae.be.df,\quad ad.bf.ce=de.af.bc.$$

Ce sont là, en effet, les sept relations démontrées, par M. *Brianchon*, dans son *Mémoire, sur les lignes du second ordre*, imprimé à Paris, en 1817; relations qui, d'après *Désargues*, expriment que les six points d'intersection *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* de la transversale arbitraire, sont *en involution*.

On sait d'ailleurs que l'une quelconque d'entre elles comporte nécessairement les six autres, qui ainsi n'expriment individuellement que la même propriété de situation des points auxquels elles s'appliquent: savoir que, „si l'on décrit, à volonté, sur un plan, un quadrilatère simple „quelconque, dont les côtés et les diagonales, à la réserve d'un seul ou „d'une seule, soient assujettis à passer respectivement par cinq quelcon„ques de ces points pris dans un ordre convenable, le dernier côté ou la „dernière diagonale ira naturellement passer par le dernier point."

144. Supposons maintenant que le quadrilatère *ABCD* soit inscrit à une ligne du second ordre quelconque, comme il l'est en effet au système indéfini des deux diagonales *AC* et *BD*; soient e' et f' les nouvelles intersections de la transversale arbitraire *ef* avec la courbe, intersections qui peuvent d'ailleurs être réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues en

une seule etc., on aura d'abord, entre les six points a, b, c, d, e, f, les sept relations ci-dessus. De plus, si l'on considère, à son tour, la courbe comme transversale des triangles formés, par l'arbitraire ef, soit avec chacun des couples de côtés opposés du quadrilatère $ABCD$, soit avec le système des diagonales de ce quadrilatère, on en déduira trois nouvelles équations qui, étant combinées entre elles et avec les précédentes par voie de division ou de multiplication, conduiront à sept autres relations indépendantes des points e et f des diagonales, et qui exprimeront que les intersections e', f', relatives à la courbe, jouent, par rapport aux intersections a, b, c, d, des côtés du quadrilatère, absolument le même rôle que les intersections propres e, f des diagonales; proposition qui a son analogue pour les courbes géométriques d'un ordre quelconque, comme on le verra plus tard, et qui peut s'énoncer ainsi d'une manière fort simple:

Un quadrilatère quelconque étant inscrit à une ligne du second ordre, toute transversale coupe les côtés de ce quadrilatère et la courbe en six points qui sont en involution.

Ce principe est, comme on sait *), d'une fécondité remarquable: outre qu'il conduit immédiatement, et par forme de simples corollaires, aux propriétés des côtés et polaires des lignes du second ordre, à celles de la division harmonique des lignes droites, au tracé des tangentes etc., il permet encore de construire directement les courbes du second degré par points, soit à l'aide du calcul, soit par de simples intersections de lignes droites. Mais ces dernières qualités, il ne les possède pas d'une manière exclusive, et l'on arrive aux mêmes résultats, plus rapidement encore, en partant directement de notre principe fondamental, qui a l'avantage de s'appliquer immédiatement aux lignes et surfaces géométriques de tous les ordres, et qui, en particulier, définit ou carractérise celles du second ordre, de la manière la plus générale et la plus précise comme on va le voir.

Tracé par points des lignes du second ordre; propriété des hexagones inscrits; remarque fondamentale sur le principe des transversales.

145. Soient p, p' q, q' et r cinq points choisis arbitrairement sur le perimètre d'une ligne du second ordre; traçons les droites pp', qq' se

*) Voyez le *Mémoire* déjà cité de M. *Brianchon*, ainsi que le *Traité des propriétés projectives des figures*, sect. II. chap. 1.

rencontrant en b, et proposons nous de trouver l'intersection r' de la courbe avec une droite quelconque rr' qui, passant par r, rencontrerait en a et c respectivement les deux premières. Le triangle abc, considéré comme transversale de la courbe, nous donnera, pour déterminer r,

$$\frac{ap\,.\,ap'}{bp\,.\,bp'}\cdot\frac{bq\,.\,bq'}{cq\,.\,cq'}\cdot\frac{cr\,.\,cr'}{ar\,.\,ar'}=1,$$

relation dans laquelle tout est connu sauf le rapport de cr' à ar'; on pourra donc calculer ou construire géométriquement ce rapport, et, par suite, obtenir le point r' sur la direction de rr'; car quoi qu'il y ait deux points qui résolvent la question par rapport aux sommets a et c du triangle abc, il ne saurait néaumoins y avoir ici aucune incertitude sur la véritable position de celui, r', dont il s'agit (voyez le No. 149. ci après). Fesant donc varier la position de la droite rr', ou ae, autour du point r, on obtiendra successivement tous les points de la ligne du second ordre qui passe par les cinq points donnés p, p', q, q', et r.

On simplifiera un peu l'équation ci-dessus et par conséquent le calcul ou le nombre des opérations nécessaires pour trouver le point r en traçant, une fois pour toutes, la transversale qr qui rencontre en K le côté du triangle abc dont les points q et r ne dépendent pas; car cette transversale donnera lieu à la nouvelle équation

$$\frac{ar}{cr}\cdot\frac{cq}{bq}\cdot\frac{bK}{aK}=1,$$

de laquelle on tire, après l'avoir multipliée par la précédente,

$$\frac{ap\,.\,ap'}{bp\,.\,bp'}\cdot\frac{bq'}{cq'}\cdot\frac{cr'}{ar'}\cdot\frac{bK}{aK}=1.$$

Au lieu de déterminer directement r' sur la droite rb, on pourrait encore se borner à construire le point L où la direction de bc est rencontrée par celle de $p'r'$. Or, en considérant $p'r'L$ comme une nouvelle transversale du triangle abc, on aura

$$\frac{ar'}{cr'}\cdot\frac{bp'}{ap'}\cdot\frac{cL}{bL}=1;$$

et, en multipliant par la précédente,

$$\frac{ap}{bp}\cdot\frac{bq'}{cq'}\cdot\frac{bK}{aK}\cdot\frac{cL}{bL}=1,$$

nouvelle équation où tout est connu, sauf le rapport de cL à bL, qu'elle servira à déterminer ainsi que le point L dont dépend finalement r'.

146. Veut-on supposer maintenant que les points r et q, par exemple, au lieu d'être distincts, soient confondus en un seul, ou que Krq soit une tangente de la courbe en ce point? on le pourra, car il n'y aura rien à changer dans l'égalité obtenue en dernier lieu.

Cette relation, jointe aux précédentes, sera donc très propre à déterminer la tangente au point dont il s'agit, à l'aide des quatre autres points quelconques p, p', q' et r' de la courbe.

Pareillement encore, les points r, q, q', p' étant donnés, on pourrait supposer que p' et r' vinssent, à leur tour, se confondre en un seul, sans que les relations dont il s'agit éprouvassent aucun changement, de sorte qu'elles ne cesseraient pas de donner la direction de $Lr'p'$ devenue une tangente de la courbe.

Enfin, pour rendre ces mêmes relations indépendantes de la position respective des points p et q', on tracera la droite pq', rencontrant en I le côté opposé ac du triangle abc; et, la considérant comme une nouvelle transversale de ce triangle, on aura

$$\frac{bp}{ap}\cdot\frac{cq'}{bq'}\cdot\frac{aI}{cI}=1;$$

équation qui, multipliée par la dernière des précédentes, conduit à cette autre

$$\frac{bK}{aK}\cdot\frac{cL}{bL}\cdot\frac{aI}{cI}=1,$$

laquelle, ne renfermant aucun des segmens relatifs aux intersections de la courbe et du triangle abc, subsiste évidemment quelle que soit la position respective de l'un et de l'autre, pourvu seulement que leurs intersections ne soient point imaginaires, et qu'aucun des côtés de celui-ci ne passe à l'infini.

147. Mais, quoi qu'il arrive, on pourra toujours débarrasser la relation dont il s'agit des segmens qui la rendent illusoire, en imaginant, par les intersections correspondantes, soit une nouvelle section conique quelconque ou même une simple circonférence de cercle, si ces intersections sont entièrement impossibles, soit de nouvelles droites quelconques si ces intersections sont seulement éloignées à l'infini sur le plan de la figure; après quoi on se servira des relations qui appartiennent à ces différentes lignes pour éliminer, de la proposée, tous les segmens qui proviennent des intersections impossibles.

Je reviendrai bientôt sur la combinaison des lignes du second ordre que suppose la première hypothèse; quant à la seconde, j'admettrai, pour offrir un exemple, que ce soit le côté bc qui s'éloigne à l'infini sur le plan du triangle, et je me proposerai d'éliminer, de la dernière des relations ci-dessus, les segmens bL et eL qui appartiennent à ce côté et donc le rapport devient seul indéterminé, puisque celui des segmens infinis bK et cI, qui ne différent entre eux que d'une quantité donnée, doit être censé égal à l'unité.

Traçant donc une droite quelconque, telle que $K'I'$, qui contienne le point L censé à l'infini sur $p'r'$, ou, ce qui revient au même, qui soit parallèle à la droite $p'r'$, on aura, en nommant K' et I' ses intersections avec les côtés ab et ac du triangle, la nouvelle équation

$$\frac{bK'}{aK'}\cdot\frac{cL}{bL}\cdot\frac{aI}{cI}=1,$$

qui, étant divisée par la proposée, membre à membre donnera

$$\frac{bK'}{bK}\cdot\frac{cI}{cI'}\cdot\frac{aK}{aK'}\cdot\frac{cI'}{aI}=1, \text{ ou } \frac{aK}{aK'}=\frac{aI}{aI'},$$

attendu que les rapports de bK' à bK, de cI à cI' sont égaux à l'unité. Or cette dernière relation, qui est indépendante du point à l'infini, n'exprime évidemment autre chose que le parallelisme de la droite $K'I'$ avec celle qui joindrait les points K et I obtenus comme il a été dit ci-dessus.

148. On peut arriver tout d'un coup à l'équation

$$\frac{bK.cL.aI}{aK.bL.cI}=1,$$

relative au cas général. Car, en tant que la courbe est considerée comme transversale du triangle abc, on a

$$\frac{ap.ap'\times bq.bq'\times cr.cr'}{bp.bp'\times cq.cp'\times ar.ar'}=1;$$

et, en tant que le même triangle est censé coupé par le système des trois droites qrK, $p'r'L$, $q'pI$, on a aussi

$$\frac{bp.bp'\times bK\times cq.cq'\times cL\times ar.ar'\times aI}{ap.ap'\times bK\times bq.bq'\times bL\times cr.cr'\times cI}=1,$$

équation qui, multipliée par la précédente, redonne celle dont il s'agit.

On remarquera d'ailleurs que les six points p, p', q, q', r, r' peuvent être censés pris, d'une manière entièrement arbitraire, sur le périmètre de la courbe proposée, et ne sont autre chose que les sommets de l'hexa-

gone quelconque $pq'qrr'p'p$ inscrit à cette courbe. Or je dis que la relation qui vient de nous occuper et qui concerne les points de concours I, K, L, des côtés respectivement opposés de cet hexagone, exprime que ces *trois points sont toujours situés en ligne droite.*

En effet, il suffit évidemment de prouver qu'ils sont en nombre pair sur le périmètre même du triangle abc, ou en nombre impair sur les prolongemens de ses côtés; ce qui est incontestable puisque les six intersections de ce triangle avec la courbe, et ses neuf intersections avec le système des trois transversales qrK, $p'r'L$, $q'pI$, parmi lesquelles se trouvent les I, K, L, sont elles mêmes en nombre pair sur le contour de ce périmètre, ou en nombre impair sur ses prolongemens, de sorte qu'en retranchant, des neuf dernières intersections, les six premières, les intersections, restantes doivent nécessairement se trouver aussi dans les mêmes circonstances.

149. Pour bien saisir l'esprit de ce raisonnement, il est essentiel de remarquer que les relations du genre de celles qui nous occupent, peuvent fort bien subsister entre les segmens de points situés sur les côtés d'un triangle ou leurs prolongemens, sans que, pour cela, ces relations expriment nécessairement une propriété relative à une certaine ligne géométrique ou à une combinaison de droites ou de lignes de cette espèce. Le théorème général de *Carnot* suppose en effet implicitement que les intersections considérées se trouvent en nombre égal sur chaque côté; que l'on ne néglige aucune de celles qui peuvent être confondues avec d'autres, imaginaires ou situées à l'infini; que les produits des segmens soient pris dans l'ordre qu'assigne l'énoncé du théorème; qu'enfin et notamment les intersections réelles soient en nombre pair sur le périmètre même du triangle ou du polygone transversal, en regardant *zéro* comme un nombre pair.

Les premières conditions sont évidentes par elles mêmes; quant à la dernière, elle est une conséquence inévitable du principe de continuité appliqué aux intersections des courbes décrites en vertu des lois géométriques quelconques. En effet, quelle que soit une telle courbe, on pourra toujours construire, d'une infinité de manières différentes, un triangle ou un polygone qui, étant considéré comme transversal de cette courbe, ne contienne aucun des points de celle-ci sur le contour même de son périmètre. Supposant donc que ce polygone change de position

et de grandeur, par degrés insensibles et continus, de manière à venir coïncider finalement avec le polygone considéré, il parait évident qu'attendu la continuité de la courbe, une branche quelconque de cette courbe ne pourra pénétrer dans l'intérieur du polygone variable que de deux manières différentes: 1°. en passant par l'un de ses sommets, 2°. en devenant tangente à l'un de ses côtés. Dans l'un et l'autre de ces cas, le nombre des intersections de la courbe, qui sont venues se placer sur le périmètre même du polygone, sera de 2, d'abord confondus en un seul sur le même côté ou sur deux côtés différens, mais bientôt distincts. La même chose ayant lieu pour de nouveaux points d'intersection qui passeraient du dehors au dedans du périmètre du polygone et réciproquement, on voit que le nombre effectif des points réels qui se trouvent situés sur le contour de ce périmètre est nécessairement pair ainsi que nous l'avons avancé.

La même conséquence peut se déduire aussi de la considération des changemens de position et de signe que doivent subir, dans la relation proposée ou sur la figure, les différents segmens qui appartiennent aux intersections des côtés du polygone et de la courbe; car, d'après la forme même de cette relation, il est clair qu'aucun des segmens dont il s'agit ne peut devenir nul ou négatif sans qu'aussitôt un segment, appartenant à un point différent, ne devienne nul ou négatif en même tems, et sans que par conséquent deux points distincts ne quittent simultanément le périmètre du polygone transversal, ou ne viennent s'y placer à la fois.

Ces remarques nous seront principalement utiles pour la partie de ces recherches, qui concernent les applications de la théorie des transversales aux lignes géométriques d'un ordre quelconque.

Des systèmes de lignes et de surfaces du second ordre.

150. On vient de voir avec quelle singulière facilité la théorie des transversales conduit aux propriétés les plus générales et les plus fécondes des lignes du second ordre, car nos lecteurs auront reconnu, dans celle qui a été démontrée en dernier lieu, sur l'hexagone inscrit à ces courbes, le théorème de *Pascal* qui est fondamental, et qu'on retrouve dans presque toutes les recherches relatives aux propriétés de situation des figures. Il nous reste maintenant à prouver que la même méthode s'applique, avec une égale facilité, aux systèmes de courbes du deuxième degré.

Considérons, par exemple, l'ensemble de deux lignes du second ordre quelconques situées dans un même plan, ainsi que l'un des trois couples formés respectivement par celles, de leurs cordes ou sécantes communes, qui sont conjuguées *) ou se rencontrent au dehors du périmètre des deux courbes; je dis que, si on vient à couper ces courbes et l'un quelconque des couples dont il s'agit, par une droite ou transversale arbitraire, les six intersections ainsi obtenues, seront en *involution* entre elles (144. et 145.).

En effet, cette transversale et les deux sécantes conjuguées déterminent, par leurs rencontres mutuelles, un triangle qui, étant considéré successivement comme transversale des lignes proposées, donnera lieu à deux relations qui ne différeront entre elles que par les produits des couples de segmens appartenans aux intersections de la droite arbitraire, puisque les intersections relatives aux deux sécantes communes sont censées les mêmes pour les deux courbes. Divisant donc ou multipliant ces relations de manière à en éliminer les segmens de ces dernières intersections, on en obtiendra une nouvelle qui, ne contenant plus que les produits dont il s'agit, se confondra avec l'une des six équations établies au No. 143. ci-dessus, dont nous avons vu qu'une seule entraîne avec elle les cinq autres et suffit pour établir qu'il y a *involution* entre les six points correspondans.

Substituons maintenant, à l'une de nos deux courbes, une troisième section conique qui ait les mêmes intersections qu'elles ou les mêmes sécantes conjuguées communes, il est clair qu'elle donnera lieu à une nouvelle équation analogue à la précédente. Enfin si l'on élimine, à leur tour, de ces dernières équations, les produits de segmens relatifs aux sécantes communes, ou en obtiendra une troisième, toujours de la même forme et qui donnera lieu à ce théorème fondamental:

Les intersections d'une droite ou transversale arbitraire avec trois lignes du second ordre quelconques, ayant les mêmes intersections ou les mêmes sécantes communes, forment entre elles une involution de six points **).

---

*) *Traité des propriétés projectives des figures,* Sect. III.

**) Ce théorème qui, ainsi que ses inverses (voyez plus loin No. 153.), renferme une des premières applications que nous ayons faites du principe des transversales,

Cet énoncé s'étend évidemment au système de trois surfaces du second ordre quelconques, coupées par une transversale arbitraire et qui ont la même courbe d'intersection commune.

151. Plus généralement, soit le système de deux sections coniques quelconques situées sur un même plan; soit abc un triangle formé par les intersections de trois transversales arbitraires ab, bc, et cd dont la première rencontre nos deux courbes aux points p et p', P et P' respectivement, la seconde aux points q et q', Q et Q', la troisième enfin aux points r et r', R et R'; on aura, en vertu du principe de *Carnot*,

$$\frac{ap\,.\,ap'\times bq\,.\,bq'\times cr\,.\,cr'}{bp\,.\,bp'\times cq\,.\,cq'\times ar\,.\,ar'}=1,$$

$$\frac{aP\,.\,aP'\times bQ\,.\,bQ'\times cR\,.\,cR'}{bP\,.\,bP'\times cQ\,.\,cQ'\times aR\,.\,aR'}=1,$$

et parconséquent

$$\frac{ap\,.\,ap'\times bq\,.\,bq'\times cr\,.\,cr'}{bp\,.\,bp'\times cq\,.\,cq'\times ar\,.\,ar'}\times\frac{bP\,.\,bP'\times cQ\,.\,cQ'\times aR\,.\,aR'}{aP\,.\,aP'\times bQ\,.\,bQ'\times cR\,.\,cR'}=1.$$

Supposons en particulier que les six points p, q, r, P, Q, R soient pris sur une troisième ligne du second ordre quelconque, il est clair qu'en vertu même du principe cité, tous les segmens relatifs à ces points, disparaîtront de la relation ci-dessus, et que la nouvelle équation n'exprimera autre chose si ce n'est que les six derniers points p, q, r, P, Q, R se trouveront, de leur côté, sur une troisième section conique conjuguée à la précédente.

Supposons encore qu'un ou plusieurs des points, appartenans aux mêmes transversales ou aux mêmes côtés du triangle abc, soient communs aux deux lignes du second ordre proposées, ou se confondent deux à deux; les segmens relatifs à ces points disparaîtront de la relation dont il s'agit, qui demeurera toujours propre à faire trouver l'une des intersections restantes au moyen de toutes les autres.

---

sera étendu, dans la *seconde partie* de ces recherches, aux lignes et surfaces géométriques de tous les ordres, et nous conduira à un grand nombre de conséquences curieuses. Mr. *Sturm* qui, le premier, en a donné une démonstration analytique pour les lignes du second ordre, s'est attaché à en montrer la fécondité dans un excellent *Mémoire* inséré à la page 173. du tome 17. des *Annales mathématiques* et dont la suite, qui devait contenir les applications du théorème inverse, n'a point été publiée, au grand regret de ceux qui cultivent la géométrie. Parmi les choses remarquables que contient la partie de ce Mémoire qui a reçu le jour, se trouve, entre autres, une démonstration de la propriété de l'hexagone inscrit de *Pascal*, fondée absolument sur les mêmes principes que celle que nous en avons donnée ci-dessus No. 148., et à laquelle nous étions parvenus il y a près de 14 années.

Par exemple, si les points r et R, r' et R' se réunissent respectivement en un seul ou deviennent communs aux deux courbes, auquel cas la transversale ac se changera en une sécante ou corde indéfinie commune à ces courbes, on aura, entre toutes les intersections restantes, la relation

$$\frac{ap \cdot ap' \times bq \cdot bq'}{bp \cdot bp' \times cq \cdot cq'} \times \frac{bP \cdot bP' \times cQ \cdot cQ'}{aP \cdot aP' \times bQ \cdot bQ'} = 1,$$

qui pourra servir à construire l'une des deux courbes aux moyen de l'autre et de certains points donnés, sans qu'il soit nécessaire, pour cela, de recourir aux intersections communes de ces courbes, lesquelles pourront ainsi devenir imaginaires ou se confondre par couples sans que les constructions cessent d'être applicables.

Si les points q' et Q' se réunissaient, à leur tour, en un seul commun à la fois aux deux courbes, la relation ci-dessus se simplifierait encore; et elle exprimerait, conformément à ce qui a déjà été démontré précédemment, que les six intersections appartenantes à la transversale ab, sont en involution; si, de plus, il arrivait que les points q et Q se confondissent également en un seul commun à la fois aux deux courbes, etc. etc.

152. Enfin on pourrait encore faire intervenir de nouvelles transversales rectilignes contenant, deux par deux, les intersections des proposées, et éliminer, de la relation primitive, tout ce qui leur appartient en commun. Ces intersections pourraient donc devenir imaginaires, ou se confondre par couples, sans que la relation transformée cessât, pour cela, de conserver une signification réelle, et de fournir des moyens de construire l'une des deux courbes à l'aide de l'autre, censée décrite, et de certaines données. En particulier, il en résulterait des méthodes pour le tracé des osculatrices des lignes du second ordre assujetties en outre à remplir certaines conditions; mais, comme ces méthodes se trouvent indiquées, pour la plupart, dans la section III. du *Traité des propriétés projectives*, et qu'elles sont susceptibles de s'étendre, d'une manière analogue, aux osculatrices des lignes géométriques de tous les degrés, nous n'en dirons pas davantage pour le moment, et renverrons le lecteur soit au *Traité* dont il s'agit, soit au §. II. de la seconde partie de ce mémoire.

Notre objet étant ici uniquement de faire pressentir la fécondité du principe des transversales, il conviendrait peu de nous étendre sur les nombreux corollaires qui peuvent découler de son application particulière

aux lignes du second ordre, corollaires qui se trouvent également exposés dans le *Traité des propriétés projectives*, et qui sont trop connus des géomètres pour exciter désormais l'intérêt. Seulement nous ferons remarquer que beaucoup de ces corollaires seraient difficiles à établir si l'on voulait y appliquer directement le principe de *Carnot*, tandis qu'on les obtiendra, sans aucune hésitation, en combinant les conséquences immédiates de ce principe avec les considérations qui résultent de la *Théorie des polaires réciproques*, considérations qui permettent de traduire, sur le champ, chaque théorème sur les intersections des lignes courbes, en un autre sur leurs tangences.

153. C'est ainsi, par exemple, que le théorème de *Pascal*, sur l'hexagone inscrit aux lignes du second ordre qui a été démontré au No. 146. ci-dessus, conduit immédiatement à celui de *Brianchon*, sur l'hexagone circonscrit à ces mêmes lignes, et que, des théorèmes établis aux No. 143., 144. et 149. on conclut également ceux qui suivent:

1°. „Si, d'un point, choisi à volonté, sur le plan d'un quadrila-„tère complet formé par la rencontre mutuelle de quatre droites quel-„conques, on mène d'autres lignes droites aux six sommets de ce qua-„drilatère, ces six lignes droites seront en *involution;* c'est-à-dire telles „qu'en les coupant par une transversale arbitraire, les intersections qui „en résulteront formeront elles-mêmes entre elles une involution (144.)."

2°. „Un quadrilatère simple quelconque étant circonscrit à une ligne „du second ordre, si, d'un point choisi à volonté sur son plan, on mène „des droites vers ses quatre sommets et de plus deux tangentes à la „courbe, ces six lignes droites seront en *involution.*"

3°. „Trois lignes du second ordre quelconques étant inscriptibles „à la fois dans le même quadrilatère, ou ayant les mêmes centres *d'ho-„mologie,* c'est-à-dire les mêmes points de concours des tangentes com-„munes, les six tangentes menées, d'un point arbitraire à ces sections „coniques, sont en *involution.*"

Ces mêmes théorèmes et tous leurs analogues, pourraient, au surplus, être déduits directement de la proposition générale qui a été démontrée aux No. 129. et 130. du précédent *Mémoire.* Mais, sans plus m'arrêter sur ces corollaires, je me hâte de dire quelques mots touchant les applications de la théorie des transversales aux lignes du 3e ordre.

Propriétés fondamentales des lignes du 3e ordre.

154. Soit une courbe plane du 3e degré considérée comme transversale d'un triangle quelconque $a\,b\,c$, tracé sur son plan et dont le côté $a\,b$ la rencontre aux trois points p, p', p''; le côté $b\,c$ aux trois points q, q', q''; le côté $c\,a$ aux trois derniers points r, r', r''; on aura, en vertu du principe des transversales dû à *Carnot*,

$$\frac{ap\,.\,ap'\,.\,ap''\times bq\,.\,bq'\,.\,bq''\times cr\,.\,cr'\,.\,cr''}{bp\,.\,bp'\,.\,bp''\times cq\,.\,cq'\,.\,cq''\times ar\,.\,ar'\,.\,ar''}=1.$$

Supposons, en particulier, que le système des trois couples de points p et p', q et q', r et r' soient à une ligne quelconque du second ordre, on aura aussi l'équation

$$\frac{ap\,.\,ap'\times bq\,.\,bq\times cr\,.\,cr'}{bq\,.\,bq'\times cq\,.\,cq'\times ar\,.\,ar'}=1,$$

qui réduit la précédente à cette autre

$$\frac{ap''\times bq''\times cr''}{bq''\times cq''\times ar''}=1,$$

exprimant évidemment (148. et 149.) que les trois dernières intersections p'', q'', r'', appartenantes à des côtés différens du triangle $a\,b\,c$, sont situées sur une même ligne droite.

Réciproquement si ces intersections sont supposées en ligne droite, l'équation qui leur est relative réduira la proposée à celle qui exprime que les six intersections p, p', q, q', r, r' appartiennent à une simple ligne du second ordre.

Ce théorème qui s'applique immédiatement au système de trois droites quelconques d'un même plan, considéré comme une ligne du 3e ordre, et que nous verrons, dans le IIIe §., s'étendre aux courbes géométriques de tous les ordres, coupées par des transversales rectilignes quelconques et en nombre arbitraire, ce théorème, dis-je, peut s'énoncer très simplement en cette manière:

Si, parmi les neuf intersections d'une ligne plane du 3e *ordre avec trois transversales arbitraires, six quelconques appartiennent à une même ligne du* 2d *ordre, les trois intersections restantes seront à une simple ligne droite; et réciproquement, si trois quelconques de ces neuf intersections, appartenantes à des transversales distinctes, sont situées sur une même droite, les six intersections restantes seront à une simple ligne du second ordre.*

155. Cet énoncé général conduit à une foule de conséquences particulières relatives aux courbes du 3e degré, dont il nous suffira ici d'indiquer rapidement les principales et les plus dignes d'intérêt.

Supposons, par exemple, qu'on remplace, dans ce même énoncé, la ligne du second ordre dont il y est fait mention, par le système de deux nouvelles droites arbitraires, le théorème subsistera toujours à l'égard des trois dernières intersections qui demeureront en ligne droite; et si, plus particulièrement encore, on suppose que les droites composant ce système viennent à se réunir en une seule, on sera conduit à ce corollaire.

Lorsque les points de contact de trois tangentes d'une ligne quelconque du 3e ordre sont situés sur une même droite, les trois intersections nouvelles de la courbe et ces tangentes sont elles-mêmes en ligne droite.

Donc aussi

Les trois asymptotes d'une ligne du 3e ordre rencontrant la courbe en trois nouveaux points qui sont situés sur une même droite.

156. On sait que la tangente au point d'inflexion d'une ligne du 3e ordre, contient trois points consécutifs de la courbe; donc, en vertu de notre premier théorème,

Si, par l'un des points d'inflexion d'une courbe du 3e degré, on mène trois transversales arbitraires, les six intersections nouvelles de ces transversales et de la courbe seront à une simple ligne du second ordre, de sorte que trois quelconques d'entre elles, appartenantes à des transversales distinctes, ayant été prises sur une même droite, les trois intersections restantes seront également à une autre droite.

Donc encore

Tout point d'inflexion d'une ligne du 3e ordre jouit, par rapport à cette courbe, de propriétés métriques ou descriptions analogues à celles du pôle d'une section considéré par rapport à sa polaire.

Et en particulier,

Si d'un tel point, on mène les trois tangentes correspondantes de la courbe, leurs points de contact se trouveront sur une même droite qui peut être appelée la polaire de ce point.

Concevons enfin que, par deux quelconques de points d'inflexion d'une courbe du 3e degré, on mène une ligne droite, il en résultera que la dernière intersection de cette droite, sera naturellement un 3ème point

d'inflexion de la courbe qui ne pourra évidemment en avoir aucun autre de cette sorte. Donc

Les trois points d'inflexion d'une courbe du 3e degré sont toujours en ligne droite.

157. Ces corollaires ne sont point tous nouveaux; plusieurs ont été donnés, par *Maclaurin*, dans son *Traité des lignes géométriques* de 1748, et ont été même exposés tout récemment par M. *Chasles*, dans la *Correspondance physique et mathématique des Pays-Bas*, tome V. p. 235. et tome VI. page 11. (année 1829 et 1830), mais par une marche qui ne permet pas de supposer que ce dernier géomètre ait eu connaissance des recherches spéciales entreprises par *Maclaurin*, sur les lignes du 3e ordre; recherches qui embrassent beaucoup d'autres théorèmes sur ces lignes, et dont les plus généraux et les plus remarquables, par l'analogie qu'ils présentent avec les propriétés connues des quadrilatères inscrits aux sections coniques, peuvent être traduits et résumés en ce peu de mots:

Un quadrilatère complet et à trois diagonales étant inscrit à une ligne plane du 3e ordre, 1°. *les trois points de concours des couples de tangentes issues des sommets respectivement opposés de ce quadrilatère, sont situés en ligne droite et sur la courbe;* 2°. *chacun de ces couples de tangentes forme, par ses intersections avec l'un quelconque des deux autres couples, un nouveau quadrilatère circonscrit à la courbe proposée, et dont les trois diagonales contiennent respectivement, soit l'un des points de contact du dernier couple de tangentes; soit leur point de concours situé sur la courbe.*

158. Ces propositions trouvent leur démonstration naturelle et en quelque sorte évidente, dans le principe général du No. 154., restreint au cas particulier où la ligne du second ordre qu'il concerne se réduit au système simple de deux droites. Ce même théorème conduit encore aux énoncés suivans qui renferment implicitement les précédens, et prouvent qu'il existe la plus grande similitude entre les propriétés de situation d'une branche quelconque d'une ligne du troisième ordre, considérée par rapport aux deux autres branches, et les propriétés pareilles d'une ligne droite quelconque, considérée par rapport à une section conique dans le plan duquel elle se trouve située:

1°. *Dans tout quadrilatère inscrit au système formé par deux quelconques des branches d'une ligne plane du 3e ordre, les droites qui joignent les couples de points de rencontre des côtés opposés et de la troisième branche vont naturellement se couper en un nouveau point de la courbe.*

2°. *Si l'on inscrit, au même couple de branches, une suite de quadrilatères dont les trois premiers côtés pivotent constamment autour de trois quelconques des points de la troisième branche, considérés comme pôles invariables, le dernier côté pivotera, lui-même, sur un quatrième point fixe de cette branche, ayant, par rapport aux trois autres, la corrélation de situation qui vient d'être indiquée.*

159. Ces énoncés, qui s'étendent sur le champ, aux polygones inscrits d'un nombre quelconque, pair, de côtés etc., forment, en effet, les pendans de ceux des N°s. 180. et 513. du *Traité des propriétés projectives*, qui sont, comme nous l'avons montré en ces endroits, des conséquences fort simples de la propriété qu'ont (144.) les quadrilatères inscrits aux sections coniques, d'être coupés, ainsi que la courbe, par une transversale arbitraire, en six points qui sont en involution.

Mais le principe du N°. 154. ci-dessus, spécialisé comme nous venons de le dire, conduit à des rapprochemens plus singuliers encore. En effet, ou en conclut, sans discussion, ce nouvel énoncé:

Ayant inscrit à volonté, à une courbe du 3e degré, un hexagone dont deux quelconques des trois points de concours des côtés respectivement opposés soient sur cette courbe, le dernier s'y trouvera naturellement aussi.

160. L'entière conformité de ce principe avec celui de *Pascal* (148.), relatif à l'hexagone inscrit aux lignes du second ordre, nous dispense d'insister sur les nombreux et intéressans corollaires auxquels il donne lieu, et parmi lesquels d'ailleurs, il faut bien le remarquer, ne se trouvent compris ni ceux qui pourraient avoir trait aux propriétés réciproques des pôles et polaires des sections coniques, ni celui qui se rapporterait au beau principe de M. *Brianchon* sur les hexagones circonscrits à ces mêmes lignes. Cette circonstance démontre bien clairement, ce me semble, combien il serait dangereux de se livrer, sans réserve, aux conséquences du principe de *dualité*, mis en avant, sans démonstration ou

même sans preuves suffisantes, par un savant géomètre analyste, qui en en proposant l'adoption, en 1826, était loin, sans doute, de soupçonner que les propriétés de situation des lignes du 3e ordre, par exemple, dussent se retrouver, non pas précisément dans les lignes mêmes de cet ordre, mais bien dans toutes celles qui n'ont, au plus, que quatre tangentes possibles issues des mêmes points, comme l'indique très explicitement la théorie des polaires réciproques, dont nous avons établi les principes dans nos divers *Mémoires* ou *Traités géométriques* publiés depuis 1818.

Laissant donc de côté tous les corollaires du théorème ci-dessus, nous nous contenterons d'observer qu'il fournit, sur le champ, un procédé facile et purement linéaire pour mener, aux courbes du 3e degré décrites sur un plan, une tangente en l'un quelconque de leurs points; procédé qui, d'ailleurs, est entierèment analogue à celui qu'a proposé M. *Brianchon*, pour mener la tangente en un point donné d'une ligne du second ordre dont quatre autres points quelconques sont assignés.

Mais on est conduit plus directement et plus généralement à la solution de ce même problème, en s'appuyant sur la proposition suivante, qui revient à celle que nous avons déjà plusieurs fois mentionnée.

Si par trois points en ligne droite d'une courbe du 3e degré, on conduit arbitrairement trois transversales rectilignes dans cette courbe, les six nouvelles intersections de ces transversales, seront à une simple ligne du second ordre.

Supposant, en effet, que deux quelconques de ces six intersections se confondent, en une seule, au point pour lequel on veut mener la tangente, il est clair que la section conique, appartenante aux cinq autres, touchera elle même la ligne du 3e ordre en ce point, dont la tangente sera ainsi donnée par le principe cité de *Pascal*.

Cette seconde manière de construire les tangentes, fait, de plus, apercevoir des méthodes générales pour tracer *linéairement* ou avec la *règle*, les sections coniques osculatrices du second et du troisième ordre en des points donnés des courbes du 3e degré.

Corollaires relatifs aux osculatrices des lignes du 3me ordre.

161. Supposez, par exemple, que l'une des intersections, relative à la 3e des transversales ci-dessus, vienne à se réunir aux deux premières

déjà confondues en une seule au point de tangence, la section conique acquerra évidemment, en ce point, un contact du second ordre avec la courbe proposée; ce qui conduit à cet élégant théorème:

Si, d'un point pris à volonté sur une courbe du 3e degré, on mène, à trois autres points quelconques de cette courbe, situés en ligne droite, trois transversales rectilignes, la section conique qui touche la courbe au premier point et contient, de plus, les trois dernières intersections des transversales, sera réellement l'une des osculatrices du second ordre relatives à ce même point.

Par trois points quelconques, on ne peut mener qu'une seule section conique tangente en un point donné d'une ligne droite; donc l'osculatrice ci-dessus est complétement déterminée, et, de plus, on a des procédés fort élégans (*Propriétés projectives*, sect. II. No. 206. et 207. sect. III. No. 318. et suivans) pour la décrire par points et linéairement, ou pour construire directement le cercle osculateur qui lui appartient en commun avec la courbe proposée.

Supposez, en particulier, que les trois points en ligne droite, par lesquels passent nos trois transversales, se réunissent en un seul, en l'un des points d'inflexion de la courbe, on sera immédiatement conduit à ce corollaire:

Si, par un point d'inflexion quelconque d'une ligne du 3e ordre, on mène, à cette courbe, une transversale arbitraire, elle la rencontrera en deux autres points appartenans à une section conique osculatrice du second ordre en chacun deux, et qui sera ainsi plus que déterminée.

162. Prenons encore que l'une quelconque de nos trois transversales devienne tangente à la courbe, au point qui est leur concours commun: la section conique ci-dessus deviendra, elle même, osculatrice du 3e ordre en ce point, et sera entièrement déterminée de position par la condition d'être osculatrice du second ordre avec celle qui a été considérée précédemment, et de passer, en outre, par les deux intersections restantes des transversales (ibid. No. 321. et 323.).

Enfin, si nous admettons qu'une seconde de nos trois transversales se réunisse à la première déjà devenue tangente à la courbe proposée, on en déduira ce nouveau corollaire propre à faire trouver la section conique unique qui est osculatrice, du 4e ordre, au point de concours commun de ces transversales.

Si, en un point donné et quelconque, d'une courbe du 3e degré, on mène la tangente relative à ce point, puis la tangente qui répond à la nouvelle intersection de la première, puis enfin la transversale qui joint le point donné avec la 3e intersection de cette seconde tangente, elle ira, à son tour, rencontrer la courbe en un nouveau et dernier point qui appartiendra à la section conique osculatrice du 4e ordre au point donné.

Et, comme cette section conique doit, elle même, avoir un contact du 3e ordre, avec l'infinité des osculatrices de cet ordre qui résultent des considérations précédentes, il parait clair, d'après les endroits déjà cités du *Traité des propriétés projectives*, qu'elle se trouve complétement déterminée au moyen de l'une quelconque d'entre elles, et sans qu'il soit même nécessaire de recourir directement au tracé effectif de cette osculatrice auxiliaire ni de celle du second ordre dont elle dépend immédiatement d'après ce qui précède. En effet, les méthodes indiquées aux endroits dont il s'agit, fournissent le moyen de déduire successivement et directement, les uns des autres, les différens points de ces osculatrices, qui appartiennent à un rayon vecteur ou à une transversale quelconque issue du point de contact donné.

Il y a plus même, comme on possède déjà un point et la tangente en un autre point donné de l'osculatrice du 4e ordre, on voit qu'il suffira de déterminer deux nouveaux points quelconques de cette courbe, pour être en état (145. et suivans) d'en construire directement et linéairement autant d'autres qu'on le voudra. Mais nous ne saurions insister davantage sur ces considérations faciles sans dépasser, de beaucoup, les bornes que nous nous sommes prescrites dans ces *préliminaires*, et sans anticiper par trop sur ce que nous aurons à dire, dans la seconde partie de ces recherches, touchant les osculatrices des courbes de degré quelconque, dont la construction par points peut également s'opérer à l'aide de procédés fort simples et qui n'exigent que la règle pour tout instrument. Néanmoins je ne puis résister à l'attrait d'indiquer encore quelques conséquences de nos théorèmes qui d'ailleurs sont susceptibles de s'étendre à l'espace, et nous conduiraient facilement à des procédés généraux pour décrire, par points, toute ligne du 3e ordre dont on connaît, soit un point d'inflexion, soit un point double, soit des points quel-

déjà confondues en une seule au point de tangence, la section conique acquerra évidemment, en ce point, un contact du second ordre avec la courbe proposée; ce qui conduit à cet élégant théorème:

Si, d'un point pris à volonté sur une courbe du 3e degré, on mène, à trois autres points quelconques de cette courbe, situés en ligne droite, trois transversales rectilignes, la section conique qui touche la courbe au premier point et contient, de plus, les trois dernières intersections des transversales, sera réellement l'une des osculatrices du second ordre relatives à ce même point.

Par trois points quelconques, on ne peut mener qu'une seule section conique tangente en un point donné d'une ligne droite; donc l'osculatrice ci-dessus est complétement déterminée, et, de plus, on a des procédés fort élégans (*Propriétés projectives*, sect. II. No. 206. et 207. sect. III. No. 318. et suivans) pour la décrire par points et linéairement, ou pour construire directement le cercle osculateur qui lui appartient en commun avec la courbe proposée.

Supposez, en particulier, que les trois points en ligne droite, par lesquels passent nos trois transversales, se réunissent en un seul, en l'un des points d'inflexion de la courbe, on sera immédiatement conduit à ce corollaire:

Si, par un point d'inflexion quelconque d'une ligne du 3e ordre, on mène, à cette courbe, une transversale arbitraire, elle la rencontrera en deux autres points appartenans à une section conique osculatrice du second ordre en chacun deux, et qui sera ainsi plus que déterminée.

162. Prenons encore que l'une quelconque de nos trois transversales devienne tangente à la courbe, au point qui est leur concours commun: la section conique ci-dessus deviendra, elle même, osculatrice du 3e ordre en ce point, et sera entièrement déterminée de position par la condition d'être osculatrice du second ordre avec celle qui a été considérée précédemment, et de passer, en outre, par les deux intersections restantes des transversales (ibid. No. 321. et 323.).

Enfin, si nous admettons qu'une seconde de nos trois transversales se réunisse à la première déjà devenue tangente à la courbe proposée, on en déduira ce nouveau corollaire propre à faire trouver la section conique unique qui est osculatrice, du 4e ordre, au point de concours commun de ces transversales.

Si, en un point donné et quelconque, d'une courbe du 3e degré, on mène la tangente relative à ce point, puis la tangente qui répond à la nouvelle intersection de la première, puis enfin la transversale qui joint le point donné avec la 3e intersection de cette seconde tangente, elle ira, à son tour, rencontrer la courbe en un nouveau et dernier point qui appartiendra à la section conique osculatrice du 4e ordre au point donné.

Et, comme cette section conique doit, elle même, avoir un contact du 3e ordre, avec l'infinité des osculatrices de cet ordre qui résultent des considérations précédentes, il parait clair, d'après les endroits déjà cités du *Traité des propriétés projectives*, qu'elle se trouve complétement déterminée au moyen de l'une quelconque d'entre elles, et sans qu'il soit même nécessaire de recourir directement au tracé effectif de cette osculatrice auxiliaire ni de celle du second ordre dont elle dépend immédiatement d'après ce qui précède. En effet, les méthodes indiquées aux endroits dont il s'agit, fournissent le moyen de déduire successivement et directement, les uns des autres, les différens points de ces osculatrices, qui appartiennent à un rayon vecteur ou à une transversale quelconque issue du point de contact donné.

Il y a plus même, comme on possède déjà un point et la tangente en un autre point donné de l'osculatrice du 4e ordre, on voit qu'il suffira de déterminer deux nouveaux points quelconques de cette courbe, pour être en état (145. et suivans) d'en construire directement et linéairement autant d'autres qu'on le voudra. Mais nous ne saurions insister davantage sur ces considérations faciles sans dépasser, de beaucoup, les bornes que nous nous sommes prescrites dans ces *préliminaires*, et sans anticiper par trop sur ce que nous aurons à dire, dans la seconde partie de ces recherches, touchant les osculatrices des courbes de degré quelconque, dont la construction par points peut également s'opérer à l'aide de procédés fort simples et qui n'exigent que la règle pour tout instrument. Néanmoins je ne puis résister à l'attrait d'indiquer encore quelques conséquences de nos théorèmes qui d'ailleurs sont susceptibles de s'étendre à l'espace, et nous conduiraient facilement à des procédés généraux pour décrire, par points, toute ligne du 3e ordre dont on connaît, soit un point d'inflexion, soit un point double, soit des points quel-

conques en nombres suffisans pour la déterminer complétement de forme et de position.

163. Ce qui précède fournit déjà plusieurs moyens, par exemple, de construire linéairement le 9e point d'intersection de trois droites arbitraires avec une courbe plane du 3e degré; or il en résulte des procédés en eux mêmes assez simples pour construire, par points, la courbe à double courbure, du même degré, qui contient huit points donnés à volonté dans l'espace.

Une semblable courbe peut toujours être censée évidemment résulter de l'intersection mutuelle de deux surfaces du second degré; ce qui ne peut avoir lieu d'ailleurs à moins qu'elles ne soient reglées et n'aient en commun l'une quelconque de leurs génératrices rectilignes; mais il nous suffit ici de considérer les courbes du 3e degré comme ayant pour caractère essentiel et général de pouvoir être coupées, par un plan arbitraire, suivant trois points au plus, ou de demeurer une courbe du 3e degré quand on la met en projection conique sur un pareil plan.

En effet, concevant, à volonté, un plan par deux quelconques des huit points donnés, il rencontrera la courbe qui les renferme, en un 9e point qu'on déterminera ainsi qu'il suit.

Par les six points donnés non compris dans le premier plan, conduisez deux nouveaux plans qui les contiennent trois par trois; du point de rencontre de ces plans avec le 1^r pris pour centre de projection, mettez le système de tous les autres points en perspective ou projection centrale sur un nouveau plan quelconque; il en résultera neuf points situés à l'intersection d'une courbe du 3e degré qui est à déterminer, avec les trois droites projections mêmes de nos trois premiers plans; or huit d'entre eux sont donnés, donc le 9e s'obtiendra par quelqu'un des procédés linéaires dont il vient d'être parlé, et, par suite, celui qu'on cherche dans l'espace se trouvera sur la projetante qui joint le précédent au centre de projection.

Opérant, de la même manière, sur une nouvelle combinaison du plan qui contient le point cherché, avec deux des autres plans joignant, trois par trois et dans un ordre différent, les six derniers points donnés, on aura ainsi obtenu deux droites ou projetantes qui, dans le premier plan,

se couperont au point demandé; mais, attendu qu'il existe dix manières distinctes de combiner, trois par trois, les six points dont il s'agit, on voit qu'on pourrait aussi construire dix lignes droites différentes s'entrecoupant toutes au point cherché et situées dans le plan qui lui correspond.

On remarquera d'ailleurs que les plans sur lesquels les projections s'opèrent peuvent être choisis de manière à simplifier notablement les constructions etc.; mais en voilà assez pour prouver que le problème où il s'agit de décrire la ligne à double courbure, du 3e degré, qui contient huit points donnés arbitrairement dans l'espace, est complétement déterminé, et peut se résoudre par des méthodes qui exigent seulement l'intersection de la ligne droite ou d'une simple règle.

(La suite dans le cahier prochain.)

8.

Auflösung einiger Aufgaben aus gegenwärtigem Journal.

(Vom Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Aufgabe No. 15. 6. Bd. 2. Heft S. 214. „Aus fünf von den sechs Winkeln zwischen den Seiten-Ebenen einer dreiseitigen Pyramide den sechsten Winkel zu finden."

Die Berührungspuncte der eingeschriebenen Kugel mit den Seiten-Ebenen seien $ABCD$. Durch Verbindung derselben zu zwei und zwei vermittelst gröfster Kreise AB, BC, CA, CD, AD, BD, die ich resp. α, α', α'', β, β', β'' nenne, entstehen vier sphärische Dreiecke, deren Seiten die Ergänzungen der obengenannten Winkel zu zwei Rechten sind. Es soll also von den sechs Seiten etwa β aus den fünf übrigen gefunden werden. Sind nun die sphärischen Winkel an D, die resp. α, α', α'' gegenüberstehen, θ, θ', θ'', so hat man nachstehende Gleichungen:

$$\cos\theta = \frac{\cos\alpha - \cos\beta'\cos\beta''}{\sin\beta'\sin\beta''};\quad \cos\theta' = \frac{\cos\alpha' - \cos\beta''\cos\beta}{\sin\beta''\sin\beta};\quad \cos\theta'' = \frac{\cos\alpha'' - \cos\beta\cos\beta'}{\sin\beta\sin\beta'}.$$

Da nun $\theta + \theta' + \theta'' =$ vier Rechten, so hat man die Bedingungsgleichung:

$$0 = 1 - \cos\theta^2 - \cos\theta'^2 - \cos\theta''^2 + 2\cos\theta\cos\theta'\cos\theta'',$$

die sich durch Substitution der eben gefundenen Ausdrücke in folgende verwandelt:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \sin\beta^2\sin\beta'^2\sin\beta''^2 - \sin\beta^2(\cos\alpha - \cos\beta'\cos\beta'')^2 \\ & - \sin\beta'^2(\cos\alpha' - \cos\beta''\cos\beta)^2 - \sin\beta''^2(\cos\alpha'' - \cos\beta\cos\beta')^2 \\ & + 2(\cos\alpha - \cos\beta'\cos\beta'')(\cos\alpha' - \cos\beta''\cos\beta)(\cos\alpha'' - \cos\beta\cos\beta'); \end{aligned}$$

oder nach einer leichten Reduction:

$$\begin{aligned} 0 = {} & 1 - \cos\alpha^2 - \cos\alpha'^2 - \cos\alpha''^2 \\ & + 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\alpha'' - \sin\alpha^2\cos\beta^2 - \sin\alpha'^2\cos\beta'^2 - \sin\alpha''^2\cos\beta''^2 \\ & + 2(\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\alpha'')\cos\beta'\cos\beta'' + 2(\cos\alpha' - \cos\alpha''\cos\alpha)\cos\beta''\cos\beta \\ & + 2(\cos\alpha'' - \cos\alpha\cos\alpha')\cos\beta\cos\beta', \end{aligned}$$

woraus man leicht $\cos\beta$ findet. Um die Formel einfacher zu machen, bemerke ich, dafs wenn λ, λ', λ'' die in dem Dreiecke ABC den Seiten α, α', α'' gegenüberstehenden Winkel sind, man hat:

$$\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\alpha'' = \cos\lambda \sin\alpha' \sin\alpha'',$$
$$\cos\alpha' - \cos\alpha''\cos\alpha = \cos\lambda' \sin\alpha'' \sin\alpha,$$
$$\cos\alpha'' - \cos\alpha \cos\alpha' = \cos\lambda'' \sin\alpha \sin\alpha',$$

und dafs, wenn man

$$\mu = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha'+\alpha'');$$
$$\mu' = \sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\alpha'+\alpha'');$$
$$\mu'' = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha'+\alpha'');$$
$$\mu''' = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha'-\alpha'')$$

setzt, die Winkel λ, λ', λ'' sich durch die Formeln

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda = \sqrt{\left(\frac{\mu''\mu'''}{\mu\mu'}\right)};\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda' = \sqrt{\left(\frac{\mu'''\mu'}{\mu\mu''}\right)};\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda'' = \sqrt{\left(\frac{\mu'\mu''}{\mu\mu'''}\right)}$$

ergeben, und dafs überdies

$$1 - \cos\alpha^2 - \cos\alpha'^2 - \cos\alpha''^2 + 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\alpha'' = 4\mu\mu'\mu''\mu'''.$$

Es verwandelt sich also die obenstehende Formel, wenn man noch

$$\sin\alpha\cos\beta = b;\quad \sin\alpha'\cos\beta' = b';\quad \sin\alpha''\cos\beta'' = b''$$

setzt, in

$$0 = b^2 + b'^2 + b''^2 - 2\cos\lambda\, b'b'' - 2\cos\lambda'\, b''b - 2\cos\lambda''\, bb' - 4\mu\mu'\mu''\mu'''.$$

Aufgabe No. 14. 2. Bd. S. 99. „Aus der Gleichung

$$\sqrt{(a^{(1)}+x)} + \sqrt{(a^{(2)}+x)} + \sqrt{(a^{(3)}+x)} + \sqrt{(a^{(4)}+x)} + \sqrt{(a^{(5)}+x)} + \sqrt{(a^{(6)}+x)} = 0,$$

wo $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ... $a^{(6)}$ beliebige, von einander verschiedene, gegebene Gröfsen sind, x zu finden.

Es kann sich, wie es mir scheint, hier nur darum handeln, eine rationale Gleichung für x zu finden; zu dem Ende und um nicht durch die Weitläufigkeit der Formeln gestört zu werden, sei, welches mit dem Obigen auf dasselbe hinauskömmt:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v}.$$

Erhebt man diese Gleichung ins Quadrat, und dieses Quadrat wieder in die zweite, dritte u. s. w. bis siebente Potenz, so ergiebt sich

$$A_1 + B_1\sqrt{(xy)} + C_1\sqrt{(yz)} + D_1\sqrt{(zx)} = A'_1 + B'_1\sqrt{(tu)} + C'_1\sqrt{(uv)} + D'_1\sqrt{(vt)},$$
$$A_2 + B_2\sqrt{(xy)} + C_2\sqrt{(yz)} + D_2\sqrt{(zx)} = A'_2 + B'_2\sqrt{(tu)} + C'_2\sqrt{(uv)} + D'_2\sqrt{(vt)},$$
$$A_3 + B_3\sqrt{(xy)} + C_3\sqrt{(yz)} + D_3\sqrt{(zx)} = A'_3 + B'_3\sqrt{(tu)} + C'_3\sqrt{(uv)} + D'_3\sqrt{(vt)},$$
$$A_4 + B_4\sqrt{(xy)} + C_4\sqrt{(yz)} + D_4\sqrt{(zx)} = A'_4 + B'_4\sqrt{(tu)} + C'_4\sqrt{(uv)} + D'_4\sqrt{(vt)},$$
$$A_5 + B_5\sqrt{(xy)} + C_5\sqrt{(yz)} + D_5\sqrt{(zx)} = A'_5 + B'_5\sqrt{(tu)} + C'_5\sqrt{(uv)} + D'_5\sqrt{(vt)},$$
$$B_6 + B_6\sqrt{(xy)} + C_6\sqrt{(yz)} + D_6\sqrt{(zx)} = A'_6 + A'_6\sqrt{(tu)} + C'_6\sqrt{(uv)} + D'_6\sqrt{(vt)},$$
$$A_7 + B_7\sqrt{(xy)} + C_7\sqrt{(yz)} + D_7\sqrt{(zx)} = A'_7 + A'_7\sqrt{(tu)} + C'_7\sqrt{(uv)} + D'_7\sqrt{(vt)},$$

wo die Gröfsen A_1, B_1 etc., A_2, B_2 etc. sämmtlich rational sind, und zwar A_1, A_2 etc. von demselben Grade in Beziehung auf x, y und z als die unten angesetzte Ziffer, die Gröfsen B, C, D aber von einem Grade weniger. Dasselbe gilt von den Gröfsen rechter Hand. Eliminirt man hieraus die irrationalen Gröfsen, so ergiebt sich die verlangte Gleichung, die, wie man sich leicht überzeugt, vom 22sten Grade sein wird.

Beweis der Theorems von Hrn. Dr. Stern No. 17. Bd. 7. Heft 1. p. 104.

Es sei p eine Primzahl von der Form $6n+1$, so hat man

$$2^n(1.2.3.\ldots\ldots n-1.n) \equiv 2.4.6.\ldots.2n-2.2n,$$

$$2^n(3n+1.3n+2.\ldots.4n-1.4n) \equiv 1.3.5.\ldots.2n-3.2n-1;$$

multiplicirt man diese beiden Congruenzen, und dividirt durch den gemeinschaftlichen Factor, so erhält man

$$2^{2n}(3n+1.3n+2.\ldots.4n-1.4n) \equiv n+1.n+2.\ldots.2n$$

und da $3n+1 \equiv -3n$; $3n+2 \equiv -(3n-1)$, ... $4n \equiv -(2n+1)$, so hat man ebenfalls

$$2^{2n}((2n+1)(2n+2)\ldots.3n) \equiv (-1)^n(n+1)(n+2)\ldots.2n.$$

Ist nun $p = a^2+27b^2$, so ist, wie Herr Stern im zweiten Hefte p. 157. des sechsten Bandes d. J. bewiesen hat, 2 ein cubischer Rest, und also $2^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$; folglich

$$(2n+1)(2n+2)\ldots.3n \equiv \pm (n+1)(n+2)\ldots.2n\ ^*),$$

wo das obere Zeichen für $p = 12m+1$, das untere für $p = 12m+7$ gilt.

Beiläufig bemerke ich, dafs für alle übrige Primzahlen von der Form $6n+1$ der Bruch

$$2^{2\nu} \equiv \pm \frac{(n+1)(n+2)\ldots.2n}{(2n+1)(2n+2)\ldots.3n}$$

die in der angeführten Abhandlung p. 157. durch f bezeichnete Gröfse $\equiv \sqrt[3]{1}$ ist, und dafs man daher, ebendaselbst, in dem Falle wenn 2 ein Nichtrest ist,

$$(1+2f)\,a \equiv 9b$$

direct finden könne, weil a auf ähnliche Weise wie f direct gefunden werden kann.

---

*) In dem Theorem ist am angef. Orte statt des doppelten Zeichens blos — abgedruckt.

Noch bemerke ich, dafs a immer ein cubischer Rest ist, denn es ist

$$a \equiv -\frac{4n(4n-1)\ldots(3n+1).3n(3n-1)\ldots(2n+1)}{1.2.3\ldots 2n};$$

da aber $4n \equiv -(2n+1)$; $4n-1 \equiv -(2n+2) \ldots 3n+1 \equiv -3n$: so erhält man, wenn man den Zähler und Nenner mit $(2n+1)(2n+2)\ldots 3n$ multiplicirt und bemerkt, dafs $(1.2.3\ldots 3n)^2 \equiv \mp 1$, je nachdem p von der Form $121n+1$ oder $121n+7$ ist. Im ersten Falle ist $1.2.3\ldots 3n \equiv e^{3m}$, im zweiten $\equiv e^{6m+3}$, wenn e eine Grundwurzel bedeutet. Es ist also

$$a \equiv \mp \frac{[(2n+1)(2n+2)\ldots 3n]^3}{1.2.3\ldots 3n},$$

oder in beiden Fällen ein cubischer Rest.

Schliefslich füge ich noch hinzu, dafs man in allen Fällen, wo 2 ein cubischer Nichtrest ist, die Quadratwurzel aus -3 (mod. $6n+1$) direct finden könne. Es ist nemlich, wenn u diese Quadratwurzel ist, $3n(1 \pm u) \equiv \sqrt[3]{1}$, folglich $u \equiv 1 + 2\sqrt[3]{1}$.

9.

Über die Zerlegung reeller gebrochener Functionen.

(Vom Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Die Zerlegung reeller gebrochener Functionen ist zwar allgemein und vollständig behandelt worden, jedoch glaube ich, dafs die nachstehende Art allgemeiner und noch nicht bekannt sein dürfte.

Es sei die gebrochene Function $\frac{M}{N}$, wo M und N reelle, ganze Functionen sind, die keinen gemeinschaftlichen Factor enthalten, und wo M von einem niedrigeren Grade als N ist. Ist nun $N = QQ_1$, wo Q und Q_1 ebenfalls reelle ganze Functionen sind, und Q nicht von einem niedrigeren Grade als Q_1, so kann man

$$\frac{M}{N} = \frac{P}{Q} + \frac{P_1}{Q_1}$$

setzen, oder

$$1. \qquad M = PQ_1 + P_1 Q,$$

wo P und P_1 gleichfalls ganze reelle Functionen sind, aber von einem niedrigeren Grade als resp. Q und Q_1. Man ersieht sogleich, dafs der Fall, wo Q und Q_1 einen gemeinschaftlichen Factor haben, ausgeschlossen werden mufs, da sonst M denselben Factor, den auch N (und zwar doppelt) enthielte, gegen die Voraussetzung enthalten müfste.

Es sei nun

$$2. \quad \begin{cases} Q = q_1 Q_1 + Q_2, \\ Q_1 = q_2 Q_2 + Q_3, \\ Q_2 = q_3 Q_3 + Q_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_{n-3} = q_{n-2} Q_{n-2} + Q_{n-1}, \\ Q_{n-2} = q_{n-1} Q_{n-1} + Q_n, \end{cases}$$

wo $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ von successiv niedrigeren Graden sind, bis Q_n, welche blos eine Constante sein wird; wäre nemlich $Q_n = 0$ und Q_{n-1} nicht eine Constante, so enthielte beides Q und Q_1 diesen Factor, gegen die Annahme. Eben so sind $q_2, q_3, \ldots q_{n-1}$ ganze Functionen vom ersten und höheren Graden; q_1 aber eine ganze Function oder eine Constante.

Es ist ersichtlich, dafs

$$Q \text{ und } q_1 Q_1,$$
$$Q_1 \text{ und } q_2 Q_2$$
etc.

von demselben Grade sind; also sind ebenfalls

$$Q \text{ und } q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_{n-1} Q_{n-1}$$

von demselben Grade.

Substituirt man nun die Gleichungen (2.) successive in (1.) und setzt

$$3. \quad \begin{cases} P_2 = q_1 P_1 + P, \\ P_3 = q_2 P_2 + P_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n-1} = q_{n-2} P_{n-2} + P_{n-3}, \\ P_n = q_{n-1} P_{n-1} + P_{n-2}, \end{cases}$$

wo also ebenfalls P_2, P_3 etc. reelle ganze Functionen, aber von successiv höhern Graden sind, so erhält man:

$$4. \quad \begin{cases} M = P Q_1 + P_1 Q \\ \quad = P_1 Q_2 + P_2 Q_1 \\ \quad = P_2 Q_3 + P_3 Q_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \quad = P_{n-1} Q_n + P_n Q_{n-1}. \end{cases}$$

Unter den Werthen, die der letzten Gleichung genügen, ist offenbar, da Q_n eine Constante ist,

$$P_{n-1} = \frac{M}{Q_n}; \quad P_n = 0;$$

man hat also den allgemeinen Ausdruck:

$$5. \quad P_{n-1} = \frac{M}{Q_n} - Q_{n-1} Z; \quad P_n = Q_n Z,$$

wo Z eine beliebige ganze Function ist.

Nachdem P_{n-1} und P_n bekannt sind, erhält man aus den Gleichungen (3.)

$$6. \quad \begin{cases} P_{n-2} = -q_{n-1} P_{n-1} + P_n, \\ P_{n-3} = -q_{n-2} P_{n-2} + P_{n-1}, \\ P_{n-4} = -q_{n-3} P_{n-3} + P_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1 = -q_2 P_2 + P_3, \\ P = -q_1 P_1 + P_2; \end{cases}$$

oder wenn man setzt:

$$7.\quad \begin{cases} r_{n-1} = 1, & s_{n-1} = 0, \\ r_{n-2} = -q_{n-1}, & s_{n-2} = 1, \\ r_{n-3} = -q_{n-1}r_{n-2} + r_{n-1}, & s_{n-3} = -q_{n-2}s_{n-2} + s_{n-1}, \\ r_{n-4} = -q_{n-3}r_{n-3} + r_{n-2}, & s_{n-4} = -q_{n-3}s_{n-3} + s_{n-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_1 = -q_2 r_2 + r_3, & s_1 = -q_2 s_2 + s_3, \\ r = -q_1 r_1 + r_2, & s = -q_1 s_1 + s_2, \end{cases}$$

so ergiebt sich

$$8.\quad \begin{cases} P_{n-2} = r_{n-2}P_{n-1} + s_{n-2}P_n, \\ P_{n-3} = r_{n-3}P_{n-1} + s_{n-3}P_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_1 = r_1 P_{n-1} + s_2 P_n, \\ P = r P_{n-1} + s P_n; \end{cases}$$

substituirt man nun hierin die Werthe von P_{n-1} und P_n aus (5.), so erhält man:

$$9.\quad \begin{cases} P_1 = \frac{r_1 M}{Q_n} + [s_1 Q_n - r_1 Q_{n-1}]Z, \\ P = \frac{r M}{Q_n} + [s Q_n - r Q_{n-1}]Z. \end{cases}$$

Durch Vergleichung der Gleichungen (6.) mit den Gleichungen (2.) sieht man leicht, dafs die Gröfsen Q_{n-2}, $-Q_{n-3}$, $+Q_{n-4}$, ... $\pm Q_1$, $\mp Q$ durch denselben Algorithmus aus Q_n und $-Q_{n-1}$ abgeleitet sind, als P_{n-2}, P_{n-3}, ... P_1 und P aus P_n und P_{n-1}. Es ist daher auch:

$$10.\quad \begin{cases} \pm Q_1 = -r_1 Q_{n-1} + s_1 Q_n, \\ \mp Q = -r Q_{n-1} + s Q_n; \end{cases}$$

folglich

$$11.\quad \begin{cases} P_1 = \frac{r_1 M}{Q_n} \pm Q_1 Z, \\ P = \frac{r M}{Q_n} \mp Q Z, \end{cases}$$

wo Z so bestimmt werden mufs, dafs P_1 von einem niedrigeren Grade ist als Q_1. Es wird dann von selbst P von einem niedrigeren Grade als Q, denn da $M = PQ_1 + P_1 Q$ und M von einem niedrigeren Grade als QQ', so mufs, wenn QP_1 von einem niedrigeren Grade als QQ_1 ist, ebenfalls PQ_1 von einem niedrigeren Grade sein, oder P von einem niedrigeren Grade als Q. Aus den Gleichungen (7.) ersieht man sogleich, dafs r von demselben Grade ist als $q_1 . q_2 .... q_{n-1}$, und dafs also $r Q_{n-1}$ von demselben Grade

ist als Q, folglich ist r von einem niedrigeren Grade als Q. $r_1 q_1$ ist von demselben Grade als r, folglich $r_1 q_2 Q_{n-1}$ von demselben Grade als Q oder als $q_1 Q_1$; demnach ist $r_1 Q_{n-1}$ von demselben Grade als Q_1, oder r_1 von einem niedrigeren Grade als Q_1.

Es sei nun

$$12. \quad \begin{cases} M = m\,Q + M_1, \\ M = m_1 Q_1 + M_2, \end{cases}$$

wo M_1 und M_2 von resp. niedrigeren Graden sind als Q und Q_1, m und m_1 aber ganze reelle Functionen sind, so wird

$$13. \quad \begin{cases} P_2 = \frac{r_1 M_2}{Q_n} + Q_1 \left(\frac{r_1 m_1}{Q_n} \pm Z\right), \\ P = \frac{r M_1}{Q_n} + Q \left(\frac{r m}{Q_n} \mp Z\right). \end{cases}$$

$\frac{r_1 m_1}{Q_n} \pm Z$ und $\frac{r m}{Q_n} \mp Z$ sind wiederum ganze reelle Functionen, und P_1 und P von einem niedrigeren Grade als Q_1 und Q resp.

Wenn Q von einem bedeutend höhern Grade ist als Q_1, so wird P leichter durch die Gleichung (1.), nachdem man P_1 schon gefunden hat, bestimmt:

$$P = \frac{M - P_1 Q}{Q_1} = m_1 - q_1 P_1 + \frac{M_2}{Q_1} - \frac{P_1 Q_2}{Q_1},$$

und wenn man $P_1 Q_2 = \nu Q_1 + Q_1'$ setzt, wo Q_1' von einem niedrigeren Grade ist als Q_1, so mufs $Q_1' = M_2$ sein, da P eine ganze Function ist, und

$$14. \quad P = m_1 - q_1 P_1 - \nu.$$

10.

Über die höheren Differentiale der Function $z = \frac{x}{x^2+y^2}$, und über die Entwickelung einiger bestimmten Integrale.

(Vom Herrn Professor Dr. *Grunert* zu Brandenburg.)

I.

Wir wollen, wie offenbar verstattet ist, annehmen, dafs x positiv sei, weil, für ein negatives x, die Differentiale von z sogleich aus den Differentialen von z, unter der ersten Voraussetzung, durch blofse Vertauschung der Vorzeichen folgen. Nach einfachen trigonometrischen Gründen ist:

$$\sin\left(\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right) = \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

$$\cos\left(\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

wobei wir bemerken, dafs, wenn $\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}$, wie in der Folge immer geschehen soll, zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird, die Quadratwurzel positiv genommen werden mufs, weil nach der Voraussetzung x positiv ist. Differentiirt man nun die gegebene Function zuerst nach x, dann nach y, so erhält man:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2+y^2}\left[\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{x^2+y^2}\left[\left(\cos\left(\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)\right)^2\right];$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2\,\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\,\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$$= -\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2\sin\left(\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)\cdot\cos\left(\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right);$$

d. i.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (-1).\frac{1.\cos\left(2\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = (-1).\frac{1.\sin\left(2\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}}.$$

Setzt man nun

$$p = \frac{\cos\left(n\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}n}}, \qquad q = \frac{\sin\left(n\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}n}},$$

so findet man:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (-1).\frac{n\cos\left((n+1)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = (-1).\frac{n\sin\left((n+1)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = (-1).\frac{n\sin\left((n+1)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = (+1).\frac{n\cos\left((n+1)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (-1).\frac{1.\cos\left(2\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-1)^2.\frac{1.2\cos\left(3\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(2+1)}},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = (-1)^3.\frac{1.2.3\cos\left(4\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(3+1)}},$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = (-1)^n.\frac{1.2.3....n\cos\left((n+1)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

Eben so findet man:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (-1).\frac{1.\sin\left(2\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-1).\frac{1.\cos\left(3\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(2+1)}},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = (-1)^2.\frac{1.2.3\sin\left(4\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(3+1)}},$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = (-1)^2 . \frac{1.2.3.4 \cos\left(5 \text{ Arc tang } \frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(4+1)}},$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^{2n-1} z}{\partial y^{2n-1}} = (-1)^n . \frac{1.2.3....(2n-1) \sin\left(2n \text{ Arc tang } \frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^n},$$

$$\frac{\partial^{2n} z}{\partial y^{2n}} = (-1)^n . \frac{1.2.3....2n \cos\left((2n+1) \text{ Arc tang } \frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(2n+1)}}.$$

II.

Unter der Voraussetzung, dafs a eine positive Gröfse ist, findet man durch theilweise Integration:

$$\int e^{-ax} \cos\alpha x \, \partial x = \cos\alpha x \int e^{-ax} \partial x + \alpha \int \sin\alpha x \, \partial x \int e^{-ax} \partial x$$
$$= -\frac{1}{a} e^{-ax} \cos\alpha x - \frac{\alpha}{a} \int e^{-ax} \sin\alpha x \, \partial x;$$

$$\int e^{-ax} \sin\alpha x \, \partial x = \sin\alpha x \int e^{-ax} \partial x - \alpha \int \cos\alpha x \, \partial x \int e^{-ax} \partial x$$
$$= -\frac{1}{a} e^{-ax} \sin\alpha x + \frac{\alpha}{a} \int e^{-ax} \cos\alpha x \, \partial x;$$

$$a \int e^{-ax} \cos\alpha x \, \partial x + \alpha \int e^{-ax} \sin\alpha x \, \partial x = -e^{-ax} \cos\alpha x;$$

$$\alpha \int e^{-ax} \cos\alpha x \, \partial x - a \int e^{-ax} \sin\alpha x \, \partial x = e^{-ax} \sin\alpha x.$$

Für $x = 0$ ist:

$$-e^{-ax} \cos\alpha x = -1, \quad e^{-ax} \sin\alpha x = 0;$$

und, weil a positiv ist, für $x = \infty$:

$$-e^{-ax} \cos\alpha x = 0, \quad e^{-ax} \sin\alpha x = 0.$$

Also

$$a \int_0^\infty e^{-ax} \cos\alpha x \, \partial x + \alpha \int_0^\infty e^{-ax} \sin\alpha x \, \partial x = 1,$$
$$a \int_0^\infty e^{-ax} \cos\alpha x \, \partial x - a \int_0^\infty e^{-ax} \sin\alpha x \, \partial x = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos\alpha x \, \partial x = \frac{a}{a^2+\alpha^2},$$
$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin\alpha x \, \partial x = \frac{\alpha}{a^2+\alpha^2},$$

wie sonst auf minder elementarem Wege bewiesen zu werden pflegt.

III.

Differentiirt man jetzt, nach einem in der Theorie der bestimmten Integrale häufig angewandten Princip, diese Formeln unter dem Integralzeichen in Bezug auf a, so ergiebt sich nach (I.):

$$\int_0^\infty x\, e^{-ax} \cos \alpha x\, \partial x = \frac{1 . \cos\left(2 \operatorname{Arc\ tang} \frac{\alpha}{a}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^2\, e^{-ax} \cos \alpha x\, \partial x = \frac{1 . 2 \cos\left(3 \operatorname{Arc\ tang} \frac{\alpha}{a}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(2+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^3\, e^{-ax} \cos \alpha x\, \partial x = \frac{1 . 2 . 3 \cos\left(4 \operatorname{Arc\ tang} \frac{\alpha}{a}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(3+1)}},$$

. . . . . .

$$\int_0^\infty x^n\, e^{-ax} \cos \alpha x\, \partial x = \frac{1 . 2 . 3 \ldots . n \cos\left((n+1) \operatorname{Arc\ tang} \frac{\alpha}{a}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}};$$

und auf ähnliche Art:

$$\int_0^\infty x\, e^{-ax} \sin \alpha x\, \partial x = \frac{1 . \sin\left(2 \operatorname{Arc\ tang} \frac{a}{\alpha}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^2\, e^{-ax} \sin \alpha x\, \partial x = \frac{1 . 2 \cos\left(3 \operatorname{Arc\ tang} \frac{a}{\alpha}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(2+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^3\, e^{-ax} \sin \alpha x\, \partial x = \frac{1 . 2 . 3 \sin\left(4 \operatorname{Arc\ tang} \frac{a}{\alpha}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(3+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^4\, e^{-ax} \sin \alpha x\, \partial x = \frac{1 . 2 . 3 . 4 \cos\left(5 \operatorname{Arc\ tang} \frac{a}{\alpha}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(4+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^5\, e^{-ax} \sin \alpha x\, \partial x = \frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 \sin\left(6 \operatorname{Arc\ tang} \frac{a}{\alpha}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(5+1)}},$$

u. s. f. u. s. f.

Es ist aber:

$$\operatorname{Arc\ tang} \frac{a}{\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{Arc\ tang} \frac{\alpha}{a}, \quad \sin\left(\operatorname{Arc\ tang} \frac{a}{\alpha}\right) = \cos\left(\operatorname{Arc\ tang} \frac{\alpha}{a}\right);$$

$$2 \operatorname{Arc\ tang} \frac{a}{\alpha} = \pi - 2 \operatorname{Arc\ tang} \frac{\alpha}{a}, \quad \sin\left(2 \operatorname{Arc\ tang} \frac{a}{\alpha}\right) = \sin\left(2 \operatorname{Arc\ tang} \frac{\alpha}{a}\right);$$

$$4\,\text{Arc tang}\frac{a}{\alpha} = 2\pi - 4\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a},\quad \sin\left(4\,\text{Arc tang}\frac{a}{\alpha}\right) = -\sin\left(4\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a}\right);$$

$$6\,\text{Arc tang}\frac{a}{\alpha} = 3\pi - 6\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a},\quad \sin\left(6\,\text{Arc tang}\frac{a}{\alpha}\right) = \sin\left(6\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a}\right);$$

u. s. f. u. s. f. u. s. f. u. s. f.

$$3\,\text{Arc tang}\frac{a}{\alpha} = \pi + \tfrac{1}{2}\pi - 3\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a},$$

$$5\,\text{Arc tang}\frac{a}{\alpha} = 2\pi + \tfrac{1}{2}\pi - 5\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a},$$

$$7\,\text{Arc tang}\frac{a}{\alpha} = 3\pi + \tfrac{1}{2}\pi - 7\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a},$$

$$9\,\text{Arc tang}\frac{a}{\alpha} = 4\pi + \tfrac{1}{2}\pi - 9\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a},$$

u. s. f. u. s. f.

$$\cos\left(3\,\text{Arc tang}\frac{a}{\alpha}\right) = -\sin\left(3\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a}\right),$$

$$\cos\left(5\,\text{Arc tang}\frac{a}{\alpha}\right) = \sin\left(5\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a}\right),$$

$$\cos\left(7\,\text{Arc tang}\frac{a}{\alpha}\right) = -\sin\left(7\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a}\right),$$

$$\cos\left(9\,\text{Arc tang}\frac{a}{\alpha}\right) = \sin\left(9\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a}\right),$$

u. s. f. u. s. f.

Also nach dem Obigen:

$$\int_0^\infty x\,e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x = \frac{1.\sin\left(2\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^2\,e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x = \frac{1.2\sin\left(3\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(2+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^3\,e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x = \frac{1.2.3\sin\left(4\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(3+1)}},$$

. . . . . .

$$\int_0^\infty x^n\,e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x = \frac{1.2.3....n\sin\left((n+1)\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}.$$

Die beiden äufserst merkwürdigen und wichtigen Formeln:

$$\int_0^\infty x^n\,e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial x = \frac{1.2.3....n\cos\left((n+1)\,\text{Arc tang}\frac{\alpha}{a}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \sin \alpha x \, \partial x = \frac{1.2.3....n \sin\left((n+1) \text{ Arc tang } \frac{\alpha}{a}\right)}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}$$

sind zuerst von Euler gefunden worden. Euler's Beweis genügte aber, wegen Einmischung der imaginären Gröfsen, nicht völlig. Deshalb gab Poisson einen andern Beweis (Lacroix *Traité du calc. diff. et int. T. III. p.* 490.). Vielleicht verdient die hier von mir gegebene Entwickelung, neben Poisson's Beweise, auch eine Stelle.

IV.

Das in mehrerer Beziehung wichtige bestimmte Integral

$$\int_0^\pi \frac{\partial \varphi}{a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2}$$

kann auf folgende Art durch eine leichte geometrische Betrachtung gefunden werden.

Man denke sich eine Ellipse, deren grofse und kleine Halbaxe a, b sind, so ist deren Flächen-Inhalt bekanntlich $= a b \pi$. Nimmt man den Scheitel der Ellipse als Anfang der Abscissen an, so ist die Gleichung der Ellipse:

$$a^2 y^2 + b^2 (a-x)^2 = a^2 b^2.$$

Bezeichnet man die Winkel, welche die Halbmesser der Ellipse mit der Hauptaxe einschliefsen, durch φ, so ist

$$y = (a-x) \text{ tang } \varphi = (a-x) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi};$$

$$(a-x)^2 = \frac{a^2 b^2 \cos \varphi^2}{a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2}, \quad y^2 = \frac{a^2 b^2 \sin \varphi^2}{a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2};$$

$$y \, \partial x = \frac{a^4 b^2 \sin \varphi^2}{(a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2)^2} \partial \varphi.$$

Das zwischen den Gränzen $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ genommene Integral dieses Differentials ist der Flächen-Inhalt der halben Ellipse. Also

$$\int_0^\pi \frac{\sin \varphi^2 \, \partial \varphi}{(a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2)^2} = \frac{\pi}{2 a^3 b}.$$

Nimmt man das Integral zwischen den Gränzen $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so erhält man den elliptischen Quadranten. Also

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin \varphi^2 \, \partial \varphi}{(a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2)^2} = \frac{\pi}{4 a^3 b}.$$

Folglich offenbar auch:

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \frac{\sin\varphi^2\,\partial\varphi}{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3b},$$

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi^2\,\partial\varphi}{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3b}.$$

Ferner ist

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial\varphi}{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}$$

$$= a^2\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi^2\,\partial\varphi}{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)^2} + b^2\int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi^2\,\partial\varphi}{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)^2}$$

$$= a^2\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi^2\,\partial\varphi}{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)^2} + b^2\int_0^{\pi} \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi-\varphi)^2\,\partial\varphi}{[b^2\sin(\frac{1}{2}\pi-\varphi)^2+a^2\cos(\frac{1}{2}\pi-\varphi)^2]^2}$$

$$= a^2\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi^2\,\partial\varphi}{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)^2} - b^2\int_{+\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\psi^2\,\partial\psi}{(b^2\sin\psi^2+a^2\cos\psi^2)^2}$$

$$= a^2\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi^2\,\partial\varphi}{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)^2} + b^2\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\psi^2\,\partial\psi}{(b^2\sin\psi^2+a^2\cos\psi^2)^2},$$

wenn wir $\frac{1}{2}\pi-\varphi=\psi$, $\partial\varphi=-\partial\psi$ setzen. Hieraus ergiebt sich nun nach dem Obigen sogleich:

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial\varphi}{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2} = a^2.\frac{\pi}{2a^3b} + b^2.\frac{\pi}{2ab^3},$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial\varphi}{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2} = \frac{\pi}{ab}.$$

11.

Über die Verwandlung der Coordinaten im Raume.

(Vom Herrn Professor Dr. *Grunert* zu Brandenburg.)

1.

Herr Professor Jacobi hat im 2ten Bande dieses Journals S. 188. einige sehr merkwürdige von Euler gefundene Formeln ohne Beweis mitgetheilt, und Herr Professor Ritter Encke hat im Astronomischen Jahrbuche für 1832 S. 305. einige nicht minder merkwürdige Ausdrücke, deren Erfindung gewöhnlich Monge zugeschrieben wird, durch einen sehr eleganten trigonometrischen Calcul bewiesen. Vorliegender Aufsatz stellt sich die Aufgabe, die ersten Formeln zu beweisen, und zu zeigen, dafs aus denselben die letztern als unmittelbare Folgerungen fliefsen, die Priorität der Erfindung also eigentlich Euler gebührt, da die Abhandlung desselben, aus welcher Herr Professor Jacobi die Formeln entlehnt hat, schon vom Jahre 1775 ist.

2.

Wir denken uns zwei rechtwinklige Coordinaten-Systeme mit einerlei Anfang, und versuchen zu zeigen, dafs in diesem Falle immer eine, durch den gemeinschaftlichen Anfangspunct gehende Axe von solcher Beschaffenheit gefunden werden kann, dafs das eine der beiden Systeme, um diese Axe gedreht, mit dem andern zusammenfällt. Man übersieht augenblicklich, dafs diese Axe eine solche Lage haben mufs, dafs die drei Winkel, welche die durch sie und die Axen der x und x', der y und y', der z und z' gelegten Ebenen mit einander einschliefsen, einander gleich sind, und dafs die Drehungsaxe selbst gegen die positiven Theile der Axen der x und x', der y und y', der z und z', unter gleichen Winkeln geneigt sein mufs, wobei wir uns immer die Drehungsaxe vom Anfange der Coordinaten, als ihrem Anfangspuncte, ausgehend denken, und also gewissermafsen nur den einen der beiden Theile betrachten, in welche sie durch den Anfang der Coordinaten getheilt wird.

3.

Die von den genannten Ebenen eingeschlossenen Winkel seien $= \varphi$, und die vor der Drehungsaxe mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z oder x', y', z' eingeschlossenen Winkel bezeichne man respective durch α, β, γ, so folgt aus Principien der sphärischen Trigonometrie augenblicklich:

$$\cos\varphi = \frac{\cos(xx') - \cos\alpha^2}{\sin\alpha^2} = \frac{\cos(yy') - \cos\beta^2}{\sin\beta^2} = \frac{\cos(zz') - \cos\gamma^2}{\sin\gamma^2},$$

$$\begin{aligned}
\cos(xx') &= \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos\varphi,\\
\cos(yy') &= \cos\beta^2 + \sin\beta^2\cos\varphi,\\
\cos(zz') &= \cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos\varphi,\\
1 - \cos(xx') &= \sin\alpha^2 - \sin\alpha^2\cos\varphi = \sin\alpha^2(1-\cos\varphi),\\
1 - \cos(yy') &= \sin\beta^2 - \sin\beta^2\cos\varphi = \sin\beta^2(1-\cos\varphi),\\
1 - \cos(zz') &= \sin\gamma^2 - \sin\gamma^2\cos\varphi = \sin\gamma^2(1-\cos\varphi).
\end{aligned}$$

Beziehen sich nun alle Coordinaten auf einen und denselben Punct, so ist bekanntlich:

$$\begin{aligned}
x &= x'\cos(xx') + y'\cos(xy') + z'\cos(xz'),\\
y &= x'\cos(yx') + y'\cos(yy') + z'\cos(yz'),\\
z &= x'\cos(zx') + y'\cos(zy') + z'\cos(zz'),\\
x' &= x\cos(xx') + y\cos(yx') + z\cos(zx'),\\
y' &= x\cos(xy') + y\cos(yy') + z\cos(zy'),\\
z' &= x\cos(xz') + y\cos(yz') + z\cos(zz'),
\end{aligned}$$

oder der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
x &= Ax' + By' + Cz', \qquad x' = Ax + A'y + A''z;\\
y &= A'x' + B'y' + C'z', \qquad y' = Bx + B'y + B''z;\\
z &= A''x' + B''y' + C''z', \qquad z' = Cx + C'y + C''z.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Drehungsaxe als den positiven Theil einer neuen Axe der x'', und nehmen an, dafs der Punct, auf welchen sich jetzt alle Coordinaten beziehen, in dieser Axe liege, so dafs also für diesen Punct $y'' = z'' = 0$ ist, so ist nach den obigen allgemeinen Formeln:

$$\begin{aligned}
x &= x''\cos(xx'') = x''\cos\alpha,\\
y &= x''\cos(yx'') = x''\cos\beta,\\
z &= x''\cos(zx'') = x''\cos\gamma;\\
x' &= x''\cos(x'x'') = x''\cos\alpha,\\
y' &= x''\cos(y'x'') = x''\cos\beta,\\
z' &= x''\cos(z'x'') = x''\cos\gamma.
\end{aligned}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die obigen Gleichungen, so erhalten wir, nachdem auf beiden Seiten durch x'' dividirt worden:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma,\\
\cos\beta &= A'\cos\alpha + B'\cos\beta + C'\cos\gamma,\\
\cos\gamma &= A''\cos\alpha + B''\cos\beta + C''\cos\gamma;\\
\cos\alpha &= A\cos\alpha + A'\cos\beta + A''\cos\gamma,\\
\cos\beta &= B\cos\alpha + B'\cos\beta + B''\cos\gamma,\\
\cos\gamma &= C\cos\alpha + C'\cos\beta + C''\cos\gamma.
\end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
0 &= (A'-B)\cos\beta + (A''-C)\cos\gamma,\\
0 &= (A'-B)\cos\alpha - (B''-C')\cos\gamma,\\
0 &= (A''-C)\cos\alpha + (B''-C')\cos\beta,\\
2(1-A)\cos\alpha &= (A'+B)\cos\beta + (A''+C)\cos\gamma,\\
2(1-B')\cos\beta &= (A'+B)\cos\alpha + (B''+C')\cos\gamma,\\
2(1-C'')\cos\gamma &= (A''+C)\cos\alpha + (B''+C')\cos\beta;
\end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$\begin{aligned}
A'-B &= p, \quad A''-C = q, \quad B''-C' = r;\\
A'+B &= p', \quad A''+C = q', \quad B''+C' = r'
\end{aligned}$$

setzen:

$$\begin{aligned}
0 &= p\cos\beta + q\cos\gamma,\\
0 &= p\cos\alpha + r\cos\gamma,\\
0 &= q\cos\alpha + r\cos\beta,\\
2(1-A)\cos\alpha &= p'\cos\beta + q'\cos\gamma,\\
2(1-B')\cos\beta &= p'\cos\alpha + r'\cos\gamma,\\
2(1-C'')\cos\gamma &= q'\cos\alpha + r'\cos\beta.
\end{aligned}$$

Durch Auflösung der drei ersten Gleichungen findet man:

$$q = -p\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}, \qquad r = p\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}.$$

Zur Bestimmung der drei Gröfsen p, q, r reichen also diese Gleichungen nicht hin.

Da

$$A = \cos(xx'), \qquad B' = \cos(yy'), \qquad C'' = \cos(zz')$$

ist, so nehmen die drei andern Gleichungen folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
2\sin\alpha^2\cos\alpha(1-\cos\varphi) &= p'\cos\beta + q'\cos\gamma,\\
2\sin\beta^2\cos\beta(1-\cos\varphi) &= p'\cos\alpha + r'\cos\gamma,\\
2\sin\gamma^2\cos\gamma(1-\cos\varphi) &= q'\cos\alpha + r'\cos\beta,
\end{aligned}$$

und man erhält durch Auflösung dieser Gleichungen:

$$p' = \frac{(\sin\alpha^2\cos\alpha^2 + \sin\beta^2\cos\beta^2 - \sin\gamma^2\cos\gamma^2)(1-\cos\varphi)}{\cos\alpha\cos\beta},$$
$$q' = \frac{(\sin\alpha^2\cos\alpha^2 + \sin\gamma^2\cos\gamma^2 - \sin\beta^2\cos\beta^2)(1-\cos\varphi)}{\cos\alpha\cos\gamma},$$
$$r' = \frac{(\sin\beta^2\cos\beta^2 + \sin\gamma^2\cos\gamma^2 - \sin\alpha^2\cos\alpha^2)(1-\cos\varphi)}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

Weil aber bekanntlich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$
$$\cos\gamma^2 = 1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2, \quad \sin\gamma^2 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2$$

ist, so ist

$$\begin{aligned}\sin\gamma^2\cos\gamma^2 &= \cos\alpha^2(1-\cos\alpha^2) + \cos\beta^2(1-\cos\beta^2) - 2\cos\alpha^2\cos\beta^2\\ &= \sin\alpha^2\cos\alpha^2 + \sin\beta^2\cos\beta^2 - 2\cos\alpha^2\cos\beta^2.\end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned}p' &= 2\cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi),\\ q' &= 2\cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi),\\ r' &= 2\cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi),\end{aligned}$$

wodurch also die drei Gröfsen p', q', r' bestimmt sind. Es bleibt demnach blofs noch eine der Gröfsen p, q, r, z. B. p, zu bestimmen übrig. Man kann sich übrigens auch folgende Relationen merken:

$$\begin{aligned}p\cos\alpha &= r\cos\gamma, & p^2\cos\alpha^2 &= r^2\cos\gamma^2,\\ p\cos\beta &= -q\cos\gamma, & p^2\cos\beta^2 &= q^2\cos\gamma^2,\\ p\cos\gamma &= p\cos\gamma, & p^2\cos\gamma^2 &= p^2\cos\gamma^2.\end{aligned}$$

Folglich durch Addition, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$\begin{aligned}p &= \cos\gamma\cdot\sqrt{(p^2+q^2+r^2)},\\ q &= \cos\beta\cdot\sqrt{(p^2+q^2+r^2)},\\ r &= \cos\alpha\cdot\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}.\end{aligned}$$

4.

Zur Bestimmung der Gröfse p müssen wir einen andern Weg einschlagen. Entwickeln wir nemlich x', y', z', durch Elimination aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}x &= A\,x' + B\,y' + C\,z',\\ y &= A'\,x' + B'\,y' + C'\,z',\\ z &= A''\,x' + B''\,y' + C''\,z',\end{aligned}$$

so erhalten wir:

$$x' = \frac{(B'C''-C'B'')x + (B''C-C''B)y + (BC'-CB')z}{L},$$
$$y' = \frac{(A''C'-C''A')x + (AC''-CA'')y + (A'C-C'A)z}{L},$$
$$z' = \frac{(A'B''-B'A'')x + (A''B-B''A)y + (AB'-BA')z}{L},$$

wenn wir

$$L = AB'C'' - A'BC'' + A''BC' - AB''C' + A'B''C - A''B'C$$

setzen. Vergleichen wir diese Gleichungen mit den Gleichungen

$$x' = Ax + A'y + A''z,$$
$$y' = Bx + B'y + B''z,$$
$$z' = Cx + C'y + C''z,$$

so ergeben sich die bekannten merkwürdigen Relationen:

$$B'C'' - C'B'' = LA, \quad B''C - C''B = LA', \quad BC' - CB' = LA'',$$
$$A''C' - C''A' = LB, \quad AC'' - CA'' = LB', \quad A'C - C'A = LB'',$$
$$A'B'' - B'A'' = LC, \quad A''B - B''A = LC', \quad AB' - BA' = LC''.$$

Aber bekanntlich

$$A^2 + A'^2 + A''^2 = 1,$$
$$B^2 + B'^2 + B''^2 = 1,$$
$$A''^2 + B''^2 + C''^2 = 1,$$

woraus durch Addition der beiden ersten, und durch Subtraction der dritten Gleichung sogleich folgt:

$$A'^2 + B^2 = 1 - A^2 - B'^2 + C''^2.$$

Hieraus, verbunden mit der Relation

$$A'B = AB' - LC'',$$

folgt:

$$(A' - B)^2 = 1 + C''^2 - (A + B')^2 + 2LC'',$$
$$(A' + B)^2 = 1 + C''^2 - (A - B')^2 + 2LC'',$$

d. i. nach (3.)

$$p^2 = (1 + C'')^2 - (A + B')^2 - 2(1 - L)C'',$$
$$p'^2 = (1 - C'')^2 - (A - B')^2 + 2(1 - L)C''.$$

Aber nach (3.)

$$1 - C'' = 1 - \cos(zz') = \sin\gamma^2(1 - \cos\varphi),$$
$$A - B' = \cos(xx') - \cos(yy') = -(\sin\alpha^2 - \sin\beta^2)(1 - \cos\varphi).$$

Also

$$(1 - C'')^2 - (A - B')^2 = [\sin\gamma^4 - (\sin\alpha^2 - \sin\beta^2)^2 [(1 - \cos\varphi)^2$$
$$= (\sin\gamma^2 + \sin\alpha^2 - \sin\beta^2)(\sin\gamma^2 - \sin\alpha + \sin\beta^2)(1 - \cos\varphi)^2$$
$$= (1 - \cos\alpha^2 - \cos\gamma^2 + \cos\beta^2)(1 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + \cos\alpha^2)(1 - \cos\varphi)^2$$
$$= 4\cos\alpha^2\cos\beta^2(1 - \cos\varphi)^2,$$
$$p'^2 = 4\cos\alpha^2\cos\beta^2(1 - \cos\varphi)^2 + 2(1 - L)C''.$$

Nach (3.) ist aber

$$p'^2 = 4\cos\alpha^2\cos\beta^2(1 - \cos\varphi)^2.$$

Folglich $2(1 - L)C'' = 0$, $1 - L = 0$, $L = 1$. Also

$$p^2 = (1 + C'')^2 - (A + B')^2.$$

Wie vorher ist

$$1 + C'' = 1 + \cos(zz') = 1 + \cos\gamma^2 + \sin\gamma^2 \cos\varphi,$$

$$A + B' = \cos(xx') + \cos(yy') = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2)\cos\varphi,$$

$$1 + C'' + A + B' = 1 + \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 + (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2)\cos\varphi$$
$$= 2(1 + \cos\varphi),$$

$$1 + C'' - A - B' = 1 + \cos\gamma^2 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 + (\sin\gamma^2 - \sin\alpha^2 - \sin\beta^2)\cos\varphi$$
$$= 2\cos\gamma^2 + 2(\sin\gamma^2 - 1)\cos\varphi = 2\cos\gamma^2(1 - \cos\varphi).$$

Folglich

$$p^2 = (1 + C'' + A + B')(1 + C'' - A - B')$$
$$= 4\cos\gamma^2(1 + \cos\varphi)(1 - \cos\varphi) = 4\cos\gamma^2 \sin\varphi^2,$$
$$p = \pm 2\cos\gamma \sin\varphi.$$

Also, mittelst der Gleichungen

$$q = -p\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}, \quad r = p\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \text{ (3.):}$$

$$p = \pm 2\cos\gamma \sin\varphi,$$
$$q = \mp 2\cos\beta \sin\varphi,$$
$$r = \pm 2\cos\alpha \sin\varphi.$$

Ferner erhält man aus (3.) leicht:

$$A' = \tfrac{1}{2}(p + p'), \quad A'' = \tfrac{1}{2}(q + q'), \quad B'' = \tfrac{1}{2}(r + r');$$
$$B = \tfrac{1}{2}(-p + p'), \quad C = \tfrac{1}{2}(-q + q'), \quad C' = \tfrac{1}{2}(-r + r').$$

Folglich

$$A = \cos(xx') = \sin\alpha^2 \cos\varphi + \cos\alpha^2,$$
$$A' = \cos(yx') = \pm\cos\gamma \sin\varphi + \cos\alpha\cos\beta(1 - \cos\varphi),$$
$$A'' = \cos(zx') = \mp\cos\beta \sin\varphi + \cos\alpha\cos\gamma(1 - \cos\varphi),$$
$$B' = \cos(yy') = \sin\beta^2 \cos\varphi + \cos\beta^2,$$
$$B'' = \cos(zy') = \pm\cos\alpha \sin\varphi + \cos\beta\cos\gamma(1 - \cos\varphi),$$
$$B = \cos(xy') = \mp\cos\gamma \sin\varphi + \cos\alpha\cos\beta(1 - \cos\varphi),$$
$$C'' = \cos(zz') = \sin\gamma^2 \cos\varphi + \cos\gamma^2,$$
$$C = \cos(xz') = \pm\cos\beta \sin\varphi + \cos\alpha\cos\gamma(1 - \cos\varphi),$$
$$C' = \cos(yz') = \mp\cos\alpha \sin\varphi + \cos\beta\cos\gamma(1 - \cos\varphi).$$

Dies sind die von Euler gefundenen a. a. O. mitgetheilten Formeln. Die Drehungsaxe besteht eigentlich aus zwei Theilen, in welche sie durch den Anfang der Coordinaten geschieden wird. Dies ist der Grund der doppelten Zeichen.

5.

Diese Formeln sind eine Quelle mehrerer merkwürdigen Relationen, unter denen wir nur folgende bemerken. Bekanntlich ist

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$
$$\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 = 3 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 = 2.$$

Hieraus folgt mittelst des Vorhergehenden:

$$1+A+B'+C'' = 1+\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2+(\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2)\cos\varphi$$
$$= 2(1+\cos\varphi),$$
$$1+A-B'-C'' = 1+\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2+(\sin\alpha^2-\sin\beta^2-\sin\gamma^2)\cos\varphi$$
$$= 2\cos\alpha^2(1-\cos\varphi).$$

Also

$$1+A+B'+C'' = M = 2(1+\cos\varphi),$$
$$1+A-B'-C'' = N = 2\cos\alpha^2(1-\cos\varphi),$$
$$1-A+B'-C'' = P = 2\cos\beta^2(1-\cos\varphi),$$
$$1-A-B'+C'' = Q = 2\cos\gamma^2(1-\cos\varphi).$$

Bedenkt man nun, dafs

$$(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi) = \sin\varphi^2$$

ist, so lassen sich die Gleichungen in (4.) auch so schreiben:

$$2A' = \sqrt{(QM)}+\sqrt{(PN)}, \qquad 2A'' = \sqrt{(QN)}-\sqrt{(PM)},$$
$$2B'' = \sqrt{(MN)}+\sqrt{(PQ)}, \qquad 2B = \sqrt{(PN)}-\sqrt{(QM)},$$
$$2C = \sqrt{(PM)}+\sqrt{(QN)}; \qquad 2C' = \sqrt{(PQ)}-\sqrt{(MN)}.$$

Sind also neun Gröfsen durch die folgenden sechs Gleichungen verbunden:

$$A^2+B^2+C^2 = 1, \qquad AA'+BB'+CC' = 0,$$
$$A'^2+B'^2+C'^2 = 1, \qquad AA''+BB''+CC'' = 0,$$
$$A''^2+B''^2+C''^2 = 1, \qquad A'A''+B'B''+C'C'' = 0,$$

welche Gleichungen wir aus der Theorie der Verwandlung der Coordinaten im Raume als bekannt voraussetzen, und sind drei dieser neun Gröfsen, z. B. A, B', C'', gegeben, so können die übrigen sechs immer mittelst der obigen Formeln gefunden werden. Man sieht hieraus, dafs diese Formeln, deren Erfindung von Herrn Professor Ritter Encke, Lacroix und Andern, Monge zugeschrieben wird, mit den in (4.) bewiesenen Euler'schen Gleichungen eigentlich identisch sind, und Euler daher als der erste Erfinder derselben genannt werden mufs. Wie Monge auf die Formeln gekommen ist, scheint nicht bekannt geworden zu sein.

Als eine bemerkenswerthe Relation kann man sich noch folgende merken:

$$A'A'-BB = B''B''-C'C' = CC-A''A''$$
$$= (A'+B)(A'-B) = (B''+C')(B''-C') = (C+A'')(C-A'')$$
$$= \pm 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\varphi(1-\cos\varphi).$$

12.

Beweis des im zweiten Bande dieses Journals Seite 190. von Herrn Steiner aufgestellten Lehrsatzes No. 27. und Ableitung anderer ebenso einfacher Relationen.

(Von Herrn Professor *C. Gudermann* in Cleve.)

No. 1.

Wenn zwei feste Kreise, deren Mittelpuncte m und M und deren Radien r und R sein mögen, von einem dritten, der Lage und Gröfse nach veränderlichen Kreise, dessen Mittelpunct μ und dessen Radius ϱ sein mag, (auf der Oberfläche einer Kugel) berührt werden, und man die drei Mittelpuncte durch Bogen von Hauptkreisen verbindet, so ist offenbar

$$m\mu = r \pm \varrho \quad \text{und} \quad M\mu = R \pm \varrho,$$

und das Zeichen + zeigt dann äufserliche, das Zeichen — innerliche Berührung an.

Werden die beiden Kreise um m und M vom Kreise um μ gleichartig berührt, so ist demnach

$$M\mu - m\mu = R - r,$$

und ist die Berührung ungleichartig, so ist $M\mu + m\mu = R + r$; daher ist der Ort des Mittelpunctes μ in beiden Fällen ein sphärischer Kegelschnitt, der die festen Mittelpuncte M und m zu Brennpuncten hat; die Excentricität ist also $= \frac{Mm}{2}$; die eine Axe des Kegelschnitts ist aber $\frac{R \pm r}{2}$, und aus diesen beiden Bestimmungen können bekanntlich die zweite Axe und die beiden Parameter hergeleitet werden. Man kann daher einen sphärischen Kegelschnitt erklären als eine Linie auf der Kugel, in der jeder Punct von zwei festen Kreislinien gleichweit entfernt ist. Das vorhin Gesagte gilt mit geringer Abänderung auch dann noch, wenn einer der beiden festen Kreise sich auf einen Punct reducirt, und sein Radius also $= 0$ ist.

Wir nehmen jetzt mit Hrn. Steiner an, dafs sich die beiden festen Kreise selbst berühren, und zwar um einen bestimmten Fall zum Grunde zu legen, innerlich; der Berührungspunct heifse A; er liegt mit m und M

in einem Hauptkreise und es ist nun die Excentricität des Kegelschnitts offenbar

$$\frac{Mm}{2} = \frac{R-r}{2} = e.$$

Der eben erwähnte Hauptkreis werde vom Kreise um m in B und vom Kreise um M in C geschnitten und es ist $BC = 2(R-r)$. Die Ellipse oder die Ortscurve des Mittelpunctes μ geht nun durch den Punct A und durch die Mitte von BC, welche D heifsen mag, und ihre grofse Halbaxe ist

$$a = \frac{AD}{2} = \frac{R+r}{2}.$$

Wird die kleine Halbaxe mit b bezeichnet und der Parameter der grofsen Axe mit p, so ist bekanntlich $\cos b = \frac{\cos a}{\cos e}$ und also $\cos b = \frac{\cos\frac{R+r}{2}}{\cos\frac{R-r}{2}}$.

Diese Formel läfst sich umformen in:

$$\operatorname{tang}\frac{b}{2} = \sqrt{\left(\operatorname{tang}\frac{R}{2}.\operatorname{tang}\frac{r}{2}\right)}.$$

Für den Parameter p findet man die Formel $\operatorname{tang} p = \frac{2\sin R \sin r}{\sin(R+r)}$, woraus man zieht

$$\cot p = \frac{\cot r + \cot R}{2}.$$

Wenn man also zu den drei Puncten A, m, M den vierten harmonischen Theilpunct zwischen m und M bestimmt, so ist er der Mittelpunct des Krümmungskreises der Ellipse für den Scheitel A ihrer grofsen Axe und sein sphärischer Abstand von A ist also $= p$.

No. 2.

Da m und M die Brennpuncte der Ellipse und μ ein Punct derselben ist, so sind $m\mu$ und $M\mu$ die Leitstrahlen, und indem wir $m\mu = V$, $M\mu = W$, ferner den Winkel $\mu mC = v$ und $\mu MC = w$ setzen, haben wir die Formeln:

$$\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang} p}{1 - \frac{\sin 2e}{\sin 2a}\cos v} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} W = \frac{\operatorname{tang} p}{1 + \frac{\sin 2e}{\sin 2a}\cos w}$$

(nach §. 73. meines Grundrisses der analyt. Sphärik), welche sich, wenn $\operatorname{tang} p = \frac{\cos e^2 - \cos a^2}{\sin a \cos a}$ substituirt wird, umformen lassen in:

$$\cot V = \cot(a-e)\sin\frac{v^2}{2} + \cot(a+e)\cos\frac{v^2}{2}, \text{ und}$$

$$\cot W = \cot(a-e)\cos\frac{w^2}{2} + \cot(a+e)\sin\frac{w^2}{2}.$$

Im vorliegenden Falle haben wir also:

$$\cot(r+\varrho) = \cot r \sin\frac{v^2}{2} + \cot R \cos\frac{v^2}{2}, \text{ und}$$

$$\cot(R-\varrho) = \cot r \cos\frac{w^2}{2} + \cot R \sin\frac{w^2}{2},$$

da der Kreis um μ den Kreis um m äufserlich, und den Kreis um M innerlich berühren soll. Aus diesen Gleichungen zieht man

$$\operatorname{tang}\frac{v^2}{2} = \frac{\cot(r+\varrho)-\cot R}{\cot r - \cot(r+\varrho)} = \frac{\sin(R-r-\varrho)}{\sin\varrho}\cdot\frac{\sin r}{\sin R}, \text{ und}$$

$$\operatorname{tang}\frac{w^2}{2} = \frac{\cot r - \cot(R-\varrho)}{\cot(R-\varrho)-\cot R} = \frac{\sin(R-r-\varrho)}{\sin\varrho}\cdot\frac{\sin R}{\sin r}.$$

Also ist

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{w}{2} = \frac{\sin(R-r-\varrho)}{\sin\varrho}, \text{ und } \frac{\operatorname{tang}\frac{v}{2}}{\operatorname{tang}\frac{w}{2}} = \frac{\sin r}{\sin R}.$$

No. 3.

Die vorhergehenden Entwickelungen haben kaum Bezug auf den Beweis des Lehrsatzes, wozu wir jetzt übergehen; aber sie dienen später bei der Herleitung anderer Gesetze. Fällen wir vom Centrum μ auf den Hauptkreis AC ein Perpendikel oder eine Ordinate $=\beta$, und setzen wir die vom Anfangspuncte A an gerechnete zugehörige Abscisse $=\alpha$, so ist offenbar:

$$\cos(r+\varrho) = \cos\beta\cos(r-\alpha) \quad \text{und} \quad \cos(R-\varrho) = \cos\beta\cos(R-\alpha),$$

und aus diesen beiden Gleichungen zieht man leicht die Ausdrücke:

$$\sin\varrho = \frac{\cos r\cos(R-\alpha)-\cos R\cos(r-\alpha)}{\sin(R+r)}\cdot\cos\beta,$$

$$\cos\varrho = \frac{\sin r\cos(R-\alpha)+\sin R\cos(r-\alpha)}{\sin(R+r)}\cdot\cos\beta,$$

welche sich durch Entwickelung reduciren auf

$$\sin\varrho = \frac{\sin(R-r)}{\sin(R+r)}\sin\alpha\cos\beta, \text{ und}$$

$$\cos\varrho - \cos\alpha\cos\beta = \frac{2\sin R\sin r}{\sin(R+r)}\sin\alpha\cos\beta.$$

Nehmen wir jetzt noch einen zweiten Kreis an, welcher die beiden Kreise um m und M berührt, so liegt sein Mittelpunct μ' ebenfalls

im Umfange der Ellipse $A\mu D$; die Coordinaten des Punctes μ' seien α' und β' und der Radius dieses Kreises sei ϱ'; dann ist auch

$$\sin\varrho' = \frac{\sin(R-r)}{\sin(R+r)}\sin\alpha'\cos\beta', \text{ und}$$

$$\cos\varrho' - \cos\alpha'\cos\beta' = \frac{2\sin R\sin r}{\sin(R+r)}\sin\alpha'\cos\beta';$$

und werden diese Gleichungen mit den vorigen zur Elimination von R und r verbunden, so hat man

$$\frac{\sin\varrho}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\sin\varrho'}{\sin\alpha'\cos\beta'}, \text{ und } \frac{\cos\varrho - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\varrho' - \cos\alpha'\cos\beta'}{\sin\alpha'\cos\beta'}.$$

Wird die zweite Gleichung durch die erste dividirt, so erhält man nach einer leichten Umformung:

$$\sin(\varrho-\varrho') = \sin\varrho\cos\alpha'\cos\beta' - \sin\varrho'\cos\alpha\cos\beta,$$

und wird diese weiter mit der ersten combinirt, so erhält man die beiden Formeln:

$$\sin\alpha\sin(\varrho-\varrho') = \sin\varrho\cos\beta\sin(\alpha-\alpha'),$$
$$\cos\alpha\sin(\varrho-\varrho') = \sin\varrho\cos\beta'\cos(\alpha-\alpha') - \sin\varrho'\cos\beta.$$

Werden sie quadrirt und dann addirt, so erhält man:

$$\sin(\varrho-\varrho')^2 = \sin\varrho^2\cos\beta'^2 - 2\sin\varrho\sin\varrho'\cos\beta\cos\beta'\cos(\alpha-\alpha') + \sin\varrho'^2\cos\beta^2.$$

Sollen nun die beiden Kreise (μ) und (μ') nicht nur die Kreise (m) und (M') berühren, sondern sich aufserdem selbst berühren (äufserlich), so mufs die Entfernung ihrer Mittelpuncte von einander $\mu\mu' = \varrho+\varrho'$ sein, oder also:

$$\cos(\varrho+\varrho') = \sin\beta\sin\beta' + \cos\beta\cos\beta'\cos(\alpha-\alpha').$$

Wird aber in der vorigen Gleichung der Werth $\cos\beta\cos\beta'\cos(\alpha-\alpha') = \cos(\varrho+\varrho') - \sin\beta\sin\beta'$ substituirt, so erhält man nach einiger Reduction die Gleichung:

$$(\sin\varrho\sin\beta' - \sin\varrho'\sin\beta)^2 = 4\sin\varrho^2\sin\varrho'^2,$$

und also, wenn die Quadratwurzel ausgezogen wird,

$$\frac{\sin\beta'}{\sin\varrho'} = \frac{\sin\beta}{\sin\varrho} \pm 2,$$

welches die Formel des Hrn. Steiner ist. Über die vorkommende Zweideutigkeit kann leicht entschieden werden. Wenn der Kreis (μ') dem Puncte A näher als der Kreis (μ') ist, so ist die Formel:

$$\frac{\sin\beta'}{\sin\varrho'} = \frac{\sin\beta}{\sin\varrho} + 2.$$

No. 4.

Wir leiten aber noch eine Gleichung her, welche das Gesetz der Succession der Kreise (μ) und (μ') auf eine fast noch einfachere Weise ausdrückt. Ziehen wir den Leitstrahl $m\mu = r + \varrho$ und setzen wir wieder den Winkel $\mu m C = v$, so ist offenbar

$$\sin(r+\varrho)\sin v = \sin\beta,$$

und wird diese Gleichung mit der Gleichung

$$\cot(r+\varrho) = \cot r \sin\frac{v^2}{2} + \cot R \cos\frac{v^2}{2}$$

multiplicirt, so erhalten wir die zweite Formel

$$\cos(r+\varrho)\sin v = \left(\cot r \sin\frac{v^2}{2} + \cot R\cos\frac{v^2}{2}\right)\sin\beta,$$

und aus ihnen zieht man nun leicht den folgenden Ausdruck:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\varrho} = \frac{2\sin R}{\sin(R-r)}\operatorname{tang}\frac{v}{2}.$$

Ziehen wir nun auch noch den Leitstrahl $m\mu'$ und setzen wir den Winkel $\mu m C = v'$, so ist ebenso

$$\frac{\sin\beta'}{\sin\varrho'} = \frac{2\sin R}{\sin(R-r)}\operatorname{tang}\frac{v'}{2};$$

und werden diese Ausdrücke in der Gleichung $\frac{\sin\beta'}{\sin\varrho'} = \frac{\sin\beta}{\sin\varrho} + 2$ substituirt, so verwandelt sie sich in die folgende:

$$\operatorname{tang}\frac{v'}{2} = \operatorname{tang}\frac{v}{2} + \frac{\sin(R-r)}{\sin R}.$$

[Die analoge Formel der Planimetrie ist $\operatorname{tang}\frac{v'}{2} = \operatorname{tang}\frac{v}{2} + \frac{R-r}{R}$ und scheint ebenfalls neu zu sein.] Wir hätten diese Formel auch auf eine ursprüngliche Weise, und aus ihr dann die Formel des Hrn. Steiner herleiten können.

Nehmen wir nun eine Reihe von Kreisen, deren Mittelpuncte μ, $\overset{1}{\mu}$, $\overset{2}{\mu}$, ... $\overset{x}{\mu}$ sein mögen, an, wovon jeder den auf ihn folgenden und zugleich die beiden Kreise (m) und (M) berührt, so liegen ihre Mittelpuncte der Reihe nach im Umfange der Ellipse, von D nach A hin gerechnet, vertheilt, und der elliptische Bogen $\mu\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}\ldots\overset{x}{\mu}$ wird dadurch in x Theile getheilt, dergestalt, dafs die Winkel $\mu m C = v$, $\overset{1}{\mu} m C = \overset{1}{v}$, $\overset{2}{\mu} m C = \overset{2}{v}$, $\overset{3}{\mu} m C = \overset{3}{v}$, ... $\overset{x}{\mu} m C = \overset{x}{v}$ das durch die folgenden Formeln ausgedrückte Gesetz befolgen:

$$\text{tang}\,\frac{\overset{1}{v}}{2} = \text{tang}\,\frac{v}{2} + \frac{\sin(R-r)}{\sin R},$$

$$\text{tang}\,\frac{\overset{2}{v}}{2} = \text{tang}\,\frac{\overset{1}{v}}{2} + \frac{\sin(R-r)}{\sin R},$$

$$\text{tang}\,\frac{\overset{3}{v}}{2} = \text{tang}\,\frac{\overset{2}{v}}{2} + \frac{\sin(R-r)}{\sin R},$$

. . . . . .

$$\text{tang}\,\frac{\overset{x}{v}}{2} = \text{tang}\,\frac{\overset{x-1}{v}}{2} + \frac{\sin(R-r)}{\sin R}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man also:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\overset{x}{v} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v + x\,.\,\frac{\sin(R-r)}{\sin R},$$

Die Gröfsen $\text{tang}\,\frac{v}{2}$, $\text{tang}\,\frac{\overset{1}{v}}{2}$, $\text{tang}\,\frac{\overset{2}{v}}{2}$, u. s. w. bilden also eine arithmetische Progression, welche ins Unendliche fortgesetzt werden kann; dabei werden aber die Winkel $\overset{1}{v}-v$, $\overset{2}{v}-\overset{1}{v}$, $\overset{3}{v}-\overset{2}{v}$, $\overset{4}{v}-\overset{3}{v}$, u. s. w. immer kleiner und kleiner, je weiter man auf dem Umfange der Ellipse fortrückt, und also dem Scheitel A nahe kommt; gleichzeitig werden auch die elliptischen Bogen $\overset{1}{\mu}\mu$, $\overset{2}{\mu}\overset{1}{\mu}$, $\overset{3}{\mu}\overset{2}{\mu}$, $\overset{4}{\mu}\overset{3}{\mu}$, u. s. w. und auch die Radien ϱ, $\overset{1}{\varrho}$, $\overset{2}{\varrho}$, $\overset{3}{\varrho}$, $\overset{4}{\varrho}$, ... $\overset{x}{\varrho}$ immer kleiner und kleiner bis ins Unendliche.

Zieht man aus dem anderen Brennpuncte M die Leitstrahlen $M\mu$, $M\overset{1}{\mu}$, $M\overset{2}{\mu}$, ... $M\overset{x}{\mu}$, und setzt man die Winkel $\mu MC = w$, $\overset{1}{\mu}MC = \overset{1}{w}$, $\overset{2}{\mu}MC = \overset{2}{w}$, ... $\overset{x}{\mu}MC = \overset{x}{w}$, so hat man nach No. 2.

$$\text{tang}\,\frac{v}{2} = \frac{\sin r}{\sin R}\text{tang}\,\frac{w}{2},\quad \text{tang}\,\frac{\overset{1}{v}}{2} = \frac{\sin r}{\sin R}\text{tang}\,\frac{\overset{1}{w}}{2},\quad \ldots.\quad \text{tang}\,\frac{\overset{x}{v}}{2} = \frac{\sin r}{\sin R}\text{tang}\,\frac{\overset{x}{w}}{2},$$

und werden diese Werthe substituirt, so erhält man auf der Stelle die Formeln

$$\text{tang}\,\frac{\overset{1}{w}}{2} = \text{tang}\,\frac{w}{2} + \frac{\sin(R-r)}{\sin r} \quad \text{und} \quad \text{tang}\,\frac{\overset{x}{w}}{2} = \text{tang}\,\frac{w}{2} + x\,.\,\frac{\sin(R-r)}{\sin r}.$$

No. 5.

Wir können jetzt noch weiter gehen und eine Formel herleiten zum Ausdrucke des Gesetzes, nach welchem die Radien ϱ, $\overset{1}{\varrho}$, $\overset{2}{\varrho}$, $\overset{3}{\varrho}$, ... $\overset{x}{\varrho}$

der Kreise um μ, $\overset{1}{\mu}$, $\overset{2}{\mu}$, u. s. w. fortgehen. Da nemlich nach No. 2.

$$\text{tang}\,\frac{v}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sin(R-r-\varrho)}{\sin\varrho}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sin R}{\sin r}\right)},$$

$$\text{tang}\,\frac{\overset{1}{v}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sin(R-r-\overset{1}{\varrho})}{\sin\overset{1}{\varrho}}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sin R}{\sin r}\right)}, \text{ und}$$

$$\text{tang}\,\frac{\overset{x}{v}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sin(R-r-\overset{x}{\varrho})}{\sin\overset{x}{\varrho}}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sin R}{\sin r}\right)}$$

ist, so erhält man durch Substitution dieser Werthe die Gleichung

$$\sqrt{\left(\frac{\sin(R-r-\overset{1}{\varrho})}{\sin\overset{1}{\varrho}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\sin(R-r-\varrho)}{\sin\varrho}\right)} + \frac{\sin(R-r)}{\sqrt{(\sin R.\sin r)}},$$

und diese Gleichung läfst sich umformen in die folgende

$$\sqrt{[\cot\overset{1}{\varrho} - \cot(R-r)]} = \sqrt{[\cot\varrho - \cot(R-r)]} + \sqrt{[\cot r - \cot R]};$$

ganz eben so erhält man auch noch die Gleichung

$$\sqrt{[\cot\overset{x}{\varrho} - \cot(R-r)]} = \sqrt{[\cot\varrho - \cot(R-r)]} + x\sqrt{[\cot r - \cot R]}.$$

Diese Formel läfst sich unter folgende Form bringen:

$$\cot\overset{x}{\varrho} = \cot\varrho + 2x\sqrt{[(\cot r - \cot R)\cot\varrho - \cot R\cot r - 1]} + x^2(\cot r - \cot R).$$

Ein besonderer Fall darf hier nicht übergangen werden. Wenn nemlich der Mittelpunct μ in AC und also in D angenommen wird, so ist $v = w = 0$ und $\varrho = R - r$; also hat man in diesem Falle

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\overset{x}{v} = x.\frac{\sin(R-r)}{\sin R},$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\overset{x}{w} = x.\frac{\sin(R-r)}{\sin r}, \text{ und}$$

$$\cot\overset{x}{\varrho} = \cot(R-r) + x^2.(\cot r - \cot R).$$

Die Formel $\frac{\sin\overset{1}{\beta}}{\sin\overset{1}{\varrho}} = \frac{\sin\beta}{\sin\varrho} + 2$ und die allgemeinere $\frac{\sin\overset{x}{\beta}}{\sin\overset{x}{\varrho}} = \frac{\sin\beta}{\sin\varrho} + 2x$ reduciren sich auf $\sin\overset{1}{\beta} = 2\sin\overset{1}{\varrho}$ und $\sin\overset{x}{\beta} = x.\sin\overset{x}{\varrho}$, weil nun $\beta = 0$ ist.

Ein bemerkenswerther anderer Fall ist der, wenn $\beta = \varrho$ ist und also der Kreis um μ den Hauptkreis $ABDC$ ebenfalls berührt. Es ist nun $\text{tang}\,\frac{v}{2} = \frac{\sin(R-r)}{2\sin R}$ und also

$$\sin\overset{x}{\beta} = (2x+1)\sin\overset{x}{\varrho},$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\overset{x}{v} = (x+\tfrac{1}{2}).\frac{\sin(R-r)}{\sin R} = (2x+1).\text{tang}\frac{v}{2},$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\overset{x}{w} = (x+\tfrac{1}{2}).\frac{\sin(R-r)}{\sin r} = (2x+1).\text{tang}\frac{w}{2}.$$

Der Werth von ϱ findet sich nun aus der Gleichung

$$\text{tang}\frac{v}{2} = \frac{\sin(R-r)}{2\sin R} = \sqrt{\left(\frac{\sin(R-r-\varrho)}{\sin\varrho}\right)}\sqrt{\left(\frac{\sin R}{\sin r}\right)},$$

woraus man zieht

$$\frac{\sqrt{(\cot r-\cot R)}}{2} = \sqrt{(\cot\varrho-\cot(R-r))}.\frac{\sin R}{\sin r},$$

und es ist also

$$\cot\overset{x}{\varrho} = \cot(R-\varrho)+\left(\frac{\sin r+2x\sin R}{2\sin R}\right)^2.(\cot r-\cot R).$$

No. 6.

Die Formel

$$\sqrt{[\cot\overset{1}{\varrho}-\cot(R-r)]} = \sqrt{[\cot\varrho-\cot(R-r)]}+\sqrt{[\cot r-\cot R]}$$

drückt einen Zusammenhang unter den Radien ϱ, ϱ', r, R von vier Kreisen aus, wovon die drei ersten Kreise einander äufserlich berühren, und im Inneren des letzten Kreises, der einen jeden von ihnen berührt, enthalten sind. Man kann nun die drei ersten Kreise oder vielmehr ihre Radien als gegeben betrachten und daraus den Radius R des sie einschliefsenden Berührungskreises herleiten. Setzen wir zur Abkürzung

$$\cot\varrho=\alpha,\quad \cot\overset{1}{\varrho}=\beta,\quad \cot r=\gamma \text{ und } \cot R=x,$$

so ist

$$\cot(R-r) = \frac{\gamma x+1}{\gamma-x},$$

und

$$\cot\varrho-\cot(R-r) = \frac{\alpha\gamma-\alpha x-\gamma x-1}{\gamma-x}.$$

Erhebt man aber die oben stehende Gleichung zum Quadrate, so findet man

$$\cot\overset{1}{\varrho}-\cot\varrho-\cot r+\cot R = 2\sqrt{[\cot\varrho-\cot(R-r)]}.\sqrt{(\cot r-\cot R)},$$

oder einfacher

$$\beta-\alpha-\gamma+x = 2\sqrt{(\alpha\gamma-\alpha x-\gamma x-1)}.$$

Wird diese Gleichung in Hinsicht auf x aufgelöset, so erhält man

$$x = -(\alpha+\beta+\gamma)\pm 2\sqrt{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-1)}.$$

Die eine Wurzel ist $\cot R$ selbst, die andere aber ist die negative Cotangente des Radius R' eines Kreises, welcher kleiner als der vorige Kreis ist, und die drei gegebenen Kreise äufserlich berührt; also ist

$$\cot R = -(\alpha+\beta+\gamma)+2\sqrt{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-1)} \text{ und}$$
$$\cot R' = \alpha+\beta+\gamma+2\sqrt{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-1)}.$$

Setzt man im analogen Falle der Planimetrie $\alpha = \frac{1}{\varrho'}$, $\beta = \frac{1}{\varrho}$, $\gamma = \frac{1}{r}$, so findet man:

$$\frac{1}{R} = -(\alpha+\beta+\gamma)+2\sqrt{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)} \text{ und}$$
$$\frac{1}{R'} = \alpha+\beta+\gamma+2\sqrt{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)},$$

welche Formeln nicht viel einfacher sind als die vorigen, und mit den von Herrn Steiner im ersten Bande (Seite 274.) dieses Journals für die Planimetrie hergeleiteten Formeln übereinstimmen.

Wenn wir nun die frühere Annahme, dafs sich die beiden Kreise um m und M innerlich berühren, aufheben, und dagegen annehmen, dafs sie sich auf ihrer convexen Seite berühren, so lassen sich ähnliche Entwickelungen machen, worauf wir hier aber der Kürze wegen nicht weiter eingehen.

Im März 1831.

13.
Zur Theorie der Fuhrwerke.

(Von Herrn Dr. *Dietlein* zu Berlin.)

Die Meinung, dafs hohe Wagenräder gegen niedrige an Zugkraft ersparen, ist zwar ziemlich allgemein; aber die Frage, wie viel durch Vergröfserung des Halbmessers der Räder eines Wagens, auf einer Strafse, deren Abhang und Unebenheiten als gegeben angenommen werden, an Kraft erspart wird, scheint noch einer genaueren Untersuchung zu bedürfen. Das Folgende ist ein Versuch der Erörterung dieser Frage.

Um die Rechnung zu vereinfachen, soll nur ein zweirädriger Frachtkarren betrachtet werden, dessen Ladung zusammen genommen mit dem Gewicht der Karrenbäume, der Achse u. s. w. so vertheilt ist, dafs der Schwerpunct der ganzen Masse in das Loth durch die Mittellinie der cylindrischen Achsenschenkel fällt; die beiden Räder sollen ferner als eine volle Scheibe, deren ganze Masse gleichförmig auf ihren ganzen Inhalt vertheilt ist, angesehen werden.

Der Halbmesser des Rades sei $= r$;

der der Achsenschenkel und der Büchsen $= \varrho$;

die Entfernung der Kanten zweier Strafsensteine, zwischen denen das Rad die Oberfläche der Strafse nicht berührt, $= 2e$;

$\frac{e}{r} = \sin\varepsilon$;

das Gewicht des Wagens, mit Ausschlufs der Räder und mit Einschlufs der Wagenlast, $= L$;

die auf die Mittellinie der Achsenschenkel reducirte träge Masse dieses Gewichts $= W$;

das Gewicht des Rades $= G$;

die auf die Entfernung r vom Stützpuncte, also ebenfalls auf die Mittellinie der Achsenschenkel reducirte träge Masse der Räder $= R$;

die Geschwindigkeit der Mittellinie der Achsenschenkel am Ende und Anfange des Bogens $r\varphi$ (Taf. II. Fig. 1.) resp. $= C$ und u;

im Anfange und Ende des Bogens $r\psi$ resp. $= v$ und C;

die Kraft welche unveränderlich wirkt, während die Mittellinie der Achsenschenkel den Bogen $r\varphi$ durchläuft, $= p$;
für den Bogen $r\psi = P$;
der Neigungswinkel der Strafse $= K$.

Die beiden zuletzt erwähnten Kräfte bleiben zwar nicht immer mit der Oberfläche der Strafse parallel, indem ihr Angriffspunct nicht in unveränderlicher Entfernung von derselben bleibt; allein die Veränderungen dieser Entfernung sind so unbedeutend, dafs sie aufser Acht gelassen werden können.

Befindet sich nun die Mittellinie der Achsenschenkel im Endpuncte des Bogens $r\varphi$, so wird sie nach der Richtung der Tangente dieses Bogens von einer Kraft

$$p\cos(\varphi + k) + (L+G)\sin\varphi$$

fortgetrieben. Davon wird aber ein Theil durch die Reibung im Umfange des Achsenschenkels aufgehoben, und dieser Theil ist (wenn μ den Frictions-Coefficienten bedeutet)

$$\frac{\mu\varrho}{r}(L\cos\varphi - p\sin(\varphi + k)),$$

weil die Seitenkraft $G\cos\varphi$ das Rad nur gegen den Stützpunct A treibt.

Die ganze bewegende Kraft ist daher

$$p\cos(\varphi + k) + \frac{\mu\varrho}{r}p\sin(\varphi + k) + (L+G)\sin\varphi - \frac{\mu\varrho}{r}L\cos\varphi.$$

Diese mufs die Geschwindigkeit u der trägen Masse $W + R$, während dieselbe den Bogen $r\,\partial\varphi$ durchläuft, um ∂u verändern, wozu eine bewegende Kraft

$$\frac{2u\partial u}{4gr\,\partial\varphi}(W+R)$$

gehört. Daraus erhält man die Gleichung

1. $$p\cos(\varphi+k)+\frac{\mu\varrho}{r}p\sin(\varphi+k)+(L+G)\sin\varphi-\frac{\mu\varrho}{r}L\cos\varphi=\frac{2u\partial u}{4gr\partial\varphi}(W+R),$$

und, wenn man integrirt,

$$p\sin(\varphi+k)-\frac{\mu\varrho}{r}p\cos(\varphi+k)-(L+G)\cos\varphi-\frac{\mu\varrho}{r}L\sin\varphi=\frac{u^2}{4gr}(W+R)+\text{Const.}$$

Für $\varphi = -k$ ist $u = C$, also

$$-\frac{\mu\varrho}{r}p-(L+G)\cos k+\frac{\mu\varrho}{r}L\sin k-\frac{C^2}{4gr}(W+R)=\text{Const.}$$

und vollständig

$$p\sin(\varphi+k)+\frac{\mu\varrho}{r}p[1-\cos(\varphi+k)]+(L+G)[\cos k-\cos\varphi]-\frac{\mu\varrho}{r}L[\sin k+\sin\varphi]$$
$$+\frac{C^2}{4gr}(W+R)=\frac{u^2}{4gr}(W+R).$$

Für $\varphi=\varepsilon-k$ sei $u=U$, so ist

$$\frac{U^2}{4gr}(W+R)=p\sin\varepsilon+\frac{\mu\varrho}{r}p\,(1-\cos\varepsilon)+(L+G)[\cos k-\cos(\varepsilon-k)]$$
$$-\frac{\mu\varrho}{r}L[\sin k+\sin(\varepsilon-k)]+\frac{C^2}{4gr}(W+R).$$

Aber p ist die Kraft, welche mit dem Widerstande des Wagens auf der schiefen, vollkommen ebenen Fläche in Gleichgewicht ist; also ist

$$p=\frac{\mu\varrho L}{r}+(L+G)\sin k \text{ und}$$

$$\frac{U^2}{4gr}(W+R)=\frac{\mu\varrho}{r}L\sin\varepsilon+(L+G)\sin k\sin\varepsilon+\frac{\mu^2\varrho^2}{r^2}L\,(1-\cos\varepsilon)$$
$$+\frac{\mu\varrho}{r}(L+G)\sin k(1-\cos\varepsilon)+(L+G)[\cos k-\cos(\varepsilon-k)]$$
$$-\frac{\mu\varrho}{r}L[\sin k+\sin(\varepsilon-k)]+\frac{C^2}{4gr}(W+R),$$

oder

$$2.\quad \frac{U^2}{4gr}(W+R)=L.2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\left[\frac{2\mu\varrho}{r}\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}k^2+\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\cos k+\frac{\mu^2\varrho^2}{r^2}\right)\right]$$
$$+G.2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left[\cos k+\frac{\mu\varrho}{r}\sin k\right]+\frac{C^2}{4gr}(W+R).$$

Verfährt man in Bezug auf den Bogen $r\psi$ eben wie bei dem Bogen $r\varphi$, und berücksichtigt, dafs $\partial\varphi$ negativ genommen werden mufs, weil ψ der Richtung der Kraft P entgegenläuft, so erhält man, statt der Gleichung (1.)

$$3.\quad P\cos(\psi-k)-\frac{\mu\varrho}{r}P\sin(\psi-k)-(L+G)\sin\psi-\frac{\mu\varrho}{r}L\cos\psi$$
$$=-\frac{2v\,\partial v}{4gr\,\partial\psi}(W+R);$$

und wenn man integrirt

$$P\sin(\psi-k)+\frac{\mu\varrho}{r}P\cos(\psi-k)+(L+G)\cos\psi-\frac{\mu\varrho}{r}L\sin\psi$$
$$=-\frac{v^2}{4gr}(W+R)+\text{Const.}$$

Für $\psi=k$ ist $v=C$, also

$$\frac{\mu\varrho}{r}P+(L+G)\cos k-\frac{\mu\varrho}{r}L\sin k+\frac{C^2}{4gr}(W+R)=\text{Const.},$$

und vollständig

$$P\sin(\psi-k)-\frac{\mu\varrho}{r}P[1-\cos(\psi-k)]-(L+G)[\cos k-\cos\psi]$$
$$+\frac{\mu\varrho}{r}L[\sin k-\sin\psi]-\frac{C^2}{4gr}(W+R)=-\frac{v^2}{4gr}(W+R).$$

In dem Augenblicke, wo die Mittellinie der Achsenschenkel in C (Fig. 1.) ankommt, hat sie die Geschwindigkeit U, nach einer auf AC normalen Richtung. Da zugleich das Rad gegen B fällt, so wird die Bewegung der Mittellinie nach der Richtung BC aufgehalten, und kann nur in einer durch C auf BC normalen Richtung fortgehen. Die Seiten-Geschwindigkeit aber, welche nicht aufgehoben wird, ist

$$U\cos ACB = U\cos 2\varepsilon = U(1-2\sin\varepsilon^2),$$

und daraus folgt

$$v = U(1-2\sin\varepsilon^2) \text{ für } \psi = \varepsilon + k, \text{ und}$$

$$4.\quad P\sin\varepsilon-\frac{\mu\varrho}{r}P[1-\cos\varepsilon]-(L+G)[\cos k-\cos(\varepsilon+k)]$$
$$+\frac{\mu\varrho}{r}L[\sin k-\sin(\varepsilon+k)]-\frac{C^2}{4gr}(W+R)=-\frac{U^2}{4gr}(W+R)(1-2\sin\varepsilon^2)^2.$$

Setzt man in (4.) den Werth von $\frac{U^2}{4gr}(W+R)$ aus (2.) so erhält man

$$P.2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\left[\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon-\frac{\mu\varrho}{r}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\right]-L.2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\left[\sin(k+\tfrac{1}{2}\varepsilon)+\frac{\mu\varrho}{r}\cos(k+\tfrac{1}{2}\varepsilon)\right]$$
$$-G.2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin(k+\tfrac{1}{2}\varepsilon)-\frac{C^2}{4gr}(W+R)$$
$$=-(\cos 2\varepsilon)^2\left\{L.\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\left[\frac{2\mu\varrho}{r}\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}k^2+\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\cos k+\frac{\mu^2\varrho^2}{r^2}\right)\right]\right.$$
$$\left.+G.2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left[\cos k+\frac{\mu\varrho}{r}\sin k\right]\right\}+\frac{C^2}{4gr}(W+R),$$

und hieraus

$$P=\frac{L.2\sin\frac{1}{2}\varepsilon\left[\sin(k+\frac{1}{2}\varepsilon)+\frac{\mu\varrho}{r}\cos(k+\frac{1}{2}\varepsilon)-(\cos2\varepsilon)^2\left(\frac{2\mu\varrho}{r}\cos\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}k^2+\sin\frac{1}{2}\varepsilon\left(\cos k+\frac{\mu^2\varrho^2}{r^2}\right)\right)\right]}{+G.2\sin\frac{1}{2}\varepsilon\left[\sin(k+\frac{1}{2}\varepsilon)-(\cos2\varepsilon)^2\sin\frac{1}{2}\varepsilon\left(\cos k+\frac{\mu\varrho}{r}\sin k\right)\right]+(1-\cos2\varepsilon^2)\frac{C^2}{4gr}(W+R)}{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon\left[\cos\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{\mu\varrho}{r}\sin\frac{1}{2}\varepsilon\right]},$$

oder

$$5.\quad P=\frac{L\left[\sin(k+\frac{1}{2}\varepsilon)+\frac{\mu\varrho}{r}\cos(k+\frac{1}{2}\varepsilon)-(\cos2\varepsilon)^2\left(\frac{2\mu\varrho}{r}\cos\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}k^2+\sin\frac{1}{2}\varepsilon\left(\cos k+\frac{\mu^2\varrho^2}{r^2}\right)\right)\right]}{+G\left[\sin(k+\frac{1}{2}\varepsilon)-(\cos2\varepsilon)^2\sin\frac{1}{2}\varepsilon\left(\cos k+\frac{\mu\varrho}{r}\sin k\right)\right]+8\sin\frac{1}{2}\varepsilon\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{C^2}{4gr}(W+R)\cos\varepsilon^2}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{\mu\varrho}{r}\sin\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Aber C ist nicht die Geschwindigkeit, mit der sich die Mittellinie der Achsenschenkel, gleichlaufend mit der Oberfläche der Strafse bis zu dem Augenblicke bewegt, in welcher das Rad um A sich zu drehen anfängt und welche c heifsen mag. — Unabhängig von der drehenden Bewegung des Rades bewegt sich die Masse $L+G$ mit der Geschwindigkeit c, und dazu würde eine bewegende Kraft $=\frac{c^2}{4gS}(L+G)$ gehören, wenn die Geschwindigkeit c am Ende des von der Masse $L+G$ durchlaufenen Raumes S erlangt sein soll. Aufserdem aber wird auch noch das Rad umgedreht, und dies könnte geschehen, indem man die Mittellinie der Achsenschenkel gleichlaufend mit der Strafse fortbewegte (was ohne Reibung durch die Kraft $\frac{c^2}{4gS}(L+G)$ geschehen würde, wenn man zugleich ein um den Umfang des Rades gewickeltes, vollkommen biegsames Seil ohne Schwere, an der Oberfläche der Strafse befestigte und mit der erforderlichen Kraft spannte). Die letztere müfste, da die auf den Umfang reducirte träge Masse des Rades $=\frac{1}{2}G$ ist, $=\frac{c^2}{4gS}\cdot\frac{G}{2}$ sein, und der in der Mittellinie der Achsenschenkel wirkenden hinzugefügt werden. Die ganze bewegende Kraft, welche in dem Augenblicke wirkt, wo sich das Rad sich um A zu drehen anfängt, ist daher $=\frac{c^2}{4gS}(L+\frac{3}{2}G)$ *), und diese

*) Dies läfst sich auch so erklären. Offenbar beschreibt jedes Element des Rades, bei der Umdrehung eine gestreckte Cykloide (*épicycloïde raccourcie*). Der Anfangspunct der Abscissen der letzten gestreckten Cykloide, welche das Element e des Rades (Taf. II. Fig. 2.) unmittelbar vor seiner Ankunft an dieser Stelle beschrieben hat, sei a; die Abscisse x; die Ordinate y; $\partial v=\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}$ der Weg, den e in einem Zeit-Elemente ∂t mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\frac{\partial v}{\partial t}$ durchläuft. Setzt man den Wälzungswinkel $=\varphi$; den Abstand des Elements e vom Mittelpuncte des erzeugenden Kreises (oder den Halbmesser des beschreibenden Kreises für das Element) $=r'$; die Dicke des Rades $=D$, und das Gewicht einer Einheit des Körpermaafses von der Materie desselben $=\gamma$: so wird die Masse des Elements e durch $r'.\partial\varphi.\partial r'.D\gamma$ ausgedrückt. Da $\partial x=r'\sin\varphi\,\partial\varphi$ und $\partial y=r\,\partial\varphi-r'\cos\varphi\,\partial\varphi$, so ist

$$\partial v^2=(r'^2\sin\varphi^2+r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2\cos\varphi^2)\,\partial\varphi^2=(r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi)\,\partial\varphi^2.$$

Daher ist das Moment der Trägheit des Elements $e=\frac{e.\partial v^2}{\partial t^2}=\partial M.c^2$, wenn M die auf die mit der Geschwindigkeit c sich bewegende Drehachse des Rades reducirte träge Masse des letztern ist, also

$$\partial M=\frac{r'.\partial\varphi.\partial r'.D\gamma(r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi)\partial\varphi^2}{c^2.\partial t^2}.$$

Aber $c.\partial t=r.\partial\varphi$ also

$$\partial M=\frac{r'.\partial\varphi.\partial r'.D\gamma(r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi)}{r^2}.$$

geht auf die Masse über, die aber nun nicht mehr $L+\frac{3}{2}G$ ist, sondern $W+R$. Hat diese Masse die Anfangs-Geschwindigkeit C, so ist die bewegende Kraft $=\frac{C^2}{4gS}(W+R)$, und da diese keine andere als die vorhandene ist, so erhält man:

$$\frac{c^2}{4gS}(L+\tfrac{3}{2}G)=\frac{C^2}{4gS}(W+R)\ ^*)$$

und das dritte Glied im Zähler des Werthes von P in (5.) ist

$$=\frac{c^2}{4gr}(L+\tfrac{3}{2}G)\,[1-(1-2\sin\varepsilon^2)],$$

also endlich

$$6.\quad P=\frac{L\left[\sin(k+\frac{1}{2}\varepsilon)+\frac{\mu\varrho}{r}\cos(k+\frac{1}{2}\varepsilon)-(\cos 2\varepsilon)^2\left(\frac{2\mu\varrho}{r}\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}k^2+\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\cos k+\frac{\mu^2\varrho^2}{r^2}\right)\right)\right]}{+G\left[\sin(k+\frac{1}{2}\varepsilon)-(\cos 2\varepsilon)^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\cos k+\frac{\mu\varrho}{r}\sin k\right)\right]+2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\frac{c^2}{gr}(L+\frac{3}{2}G)\cos\varepsilon^2}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon-\frac{\mu\varrho}{r}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Integrirt man in Bezug auf φ und $\partial\varphi$, so erhält man

$$\partial M=\frac{r'.\partial r'.D\gamma}{r^2}[(r^2+r'^2)\varphi-2rr'\sin\varphi];$$

und zwar vollständig, weil Const. $=0$, indem die rechte Seite der Gleichung $=0$ ist für $\varphi=0$. Der Ausdruck mufs genommen werden bis $\varphi=2\pi$, und es ist

$$\partial M=\frac{D\gamma}{r^2}r'.\partial r'(r^2+r'^2)2\pi.$$

Integrirt man nun nochmals für ein veränderliches r', so erhält man

$$M=\frac{D\gamma}{r^2}2\pi\left(\frac{r^2r'^2}{2}+\frac{r'^4}{4}\right);$$

und zwar vollständig, weil $M=0$ für $r'=0$, also Const. $=0$. Dieser Ausdruck von M mufs genommen werden bis $r'=r$, und dann ist

$$M=D\gamma\pi.\frac{2}{\gamma^2}\left(\frac{r^4}{2}+\frac{r^4}{4}\right)=D\gamma\pi.2r^2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4})=\tfrac{3}{2}r^2\pi D\gamma=\tfrac{3}{2}G.$$

*) Dies kann man sich auch so vorstellen. Die Masse $L+\frac{3}{2}G$ hat die Geschwindigkeit c. Daher ist für dieselbe die lebendige Kraft $=\frac{(L+\frac{3}{2}G)c^2}{2g}$, wo g die Beschleunigung der Schwere bezeichnet.

In dem Augenblicke, wo die Umdrehung in A (Fig. 1.) anfängt, verwandelt sich die auf die Drehachse reducirte träge Masse in $W+R$, und auf diese wirkt nur die Kraft, zu welcher die vorhandene lebendige Kraft gehört. Wirkte $W+R$ der $L+\frac{3}{2}G$ entgegen mit der Geschwindigkeit C, so müfste für das Gleichgewicht die lebendige Kraft von $W+R$ der von $L+\frac{3}{2}G$ gleich sein, also

$$\frac{(L+\frac{3}{2}G)c^2}{2g}=\frac{(W+R)C^2}{2g}.$$

Hierbei ist zu bemerken, dafs $\frac{3}{2}G = R$ ist. Wird nemlich, wie im Eingange erwähnt, das Rad als eine Scheibe angesehen, deren Halbmesser $= r$ und deren Dicke $= D$ ist, so ist (Taf. II. Fig. 3.) der Inhalt des Ausschnitts $ABC = A = z^2\varphi$.

Aber $z = 2r\cos\varphi$, also

$$A = 4r^2\cos\varphi^2.\varphi; \quad \partial A = 4r^2(\cos\varphi^2 - 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi)\,\partial\varphi;$$

und das Moment der Trägheit des Elements

$$z^2\,\partial A.D\gamma = 16r^4 D\gamma\,(\cos\varphi^4 - 2\varphi\cos\varphi^3\sin\varphi)\,\partial\varphi,$$

wo γ das Gewicht einer Einheit des Körpermaafses von der Materie des Rades ist.

Die Integration giebt das Moment der Trägheit für ein Prisma, dessen Grundfläche der Ausschnitt A, dessen Höhe D, und dessen Gewicht $ADG =$

$$16r^4 D\gamma\,(\tfrac{1}{2}\cos\varphi^4\varphi + \tfrac{1}{64}\sin 4\varphi + \tfrac{1}{8}\sin 2\varphi + \tfrac{3}{16}\varphi) + \text{Const. ist.}$$

Es ist $= 0$ für $\varphi = 0$, also Const. $= 0$, und wird genommen bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$; daher ist das Moment der Trägheit des ganzen Rades, oder

$$r^2R = 16r^4 D\gamma\frac{3\pi}{32} = \tfrac{3}{2}r^4\pi D\gamma = \tfrac{3}{2}r^2G, \quad \text{also} \quad R = \tfrac{3}{2}G.$$

Für $\varepsilon = 0$ wird $P = \frac{0}{0}$. Man könnte zwar das Differential des Zählers und des Nenners für ein veränderliches ε suchen, und in dem neuen Bruch $\varepsilon = 0$ setzen. Dies ist aber weitläufig, und mag unterbleiben, weil sich leicht übersehen läfst, dafs für $\varepsilon = 0$, $P = \frac{\mu\varrho L}{r} + (L+G)\sin k$ wird.

Für $r = \infty$ ist $\varepsilon = 0$, aber $G = \infty$, und daher $P = \frac{\infty.0}{0}$. Hieraus folgt zwar noch nicht mit Bestimmtheit, dafs $P = \infty$ ist, aber es läfst sich leicht übersehen, dafs für $r = \infty$ sein mufs

$$P = \frac{\mu\varrho L}{\infty} + (L + \infty^2\pi D\gamma)\sin k = \infty,$$

so lange k nicht $= 0$, oder der Weg nicht wagerecht ist.

Da $\sin\varepsilon = \frac{e}{r}$, und $\sin\varepsilon \leqq 1$, so mufs auch P für $\frac{e}{r} > 1$ oder $r < e$ unmöglich werden.

Für $r = e$, also $\sin\varepsilon = 1$, $\cos\varepsilon = 0$, wird zwar, wenn man (6.) unverändert beibehält,

$$P = \frac{L\left[\sin k\left(1-\frac{\mu\varrho}{r}\right) - \frac{\mu\varrho}{r}(1-\cos k) + \frac{\mu\varrho}{r}\left(\cos k - \frac{\mu\varrho}{r}\right) - G\left[\sin k\left(1+\frac{\mu\varrho}{r}\right)\right]\right.}{1-\frac{\mu\varrho}{r}},$$

und für $k=0$

$$P=\frac{\mu r L}{r};$$

aber man mufs bedenken, dafs von $\varepsilon=\frac{\pi}{4}$ an die Mittellinie der Achsenschenkel ein Bestreben hat, den Halbmesser BC nach unten zu drehen, so dafs von hier an U^2 in (2.) negativ gesetzt werden mufs, und die Gleichung (6.) für $\varepsilon>\frac{\pi}{4}$ nicht mehr anwendbar ist. Da solche Fälle nicht vorkommen, so scheint es nicht nöthig die Untersuchung darauf auszudehnen.

Da für $r=\infty$ nur $k>0$, $P=\infty$ ist, so ist abzusehen, dafs für irgend einen Werth von r, P ein Kleinstes werden müsse. Wollte man aus (6.), nachdem man darin statt G seinen Werth $r^2\pi D\gamma$ gesetzt hätte, $\frac{\partial P}{\partial r}$ suchen, und $=0$ setzen, um eine Gleichung für r zu erhalten, so würde dieselbe von einem sehr hohen Grade sein, da $\sin\varepsilon=\frac{e}{r}$ und $\cos\varepsilon=\sqrt{\left(1-\frac{e^2}{r^2}\right)}$ gesetzt werden müfste, und wenigstens wird nicht allgemein sich finden lassen, für welchen Werth, oder für welche Werthe von r, $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\gtrless 0$ wäre.

Es scheinen daher nur Versuchsrechnungen übrig zu bleiben, von welchen hernach ein Beispiel vorkommen soll.

Vorher mag noch bemerkt werden, dafs für $k=0$, also für eine wagerechte Strafse, die Gleichung (6.) sich in

$$L\left[\sin\tfrac{2}{2}\varepsilon+\frac{\mu\varrho}{r}\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon-(\cos 2\varepsilon)^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\left(1+\frac{\mu^2\varrho^2}{r^2}\right)\right]$$

$$7.\quad P=\frac{+G\left[\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon-(\cos 2\varepsilon)^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\right]+2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\cos\varepsilon^2\frac{c^2}{gr}(L+\tfrac{3}{2}G)}{\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon-\frac{\mu\varrho}{r}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^2}$$

verwandelt.

Um die folgende Zahlenrechnung, wo P aus (6.) für $r=2'$, $e=0{,}1'$, $\sin\varepsilon=\frac{0{,}1}{2}=0{,}05$ und $\sin k=0{,}05$ gesucht werden soll (was einem starken Abhange des Weges und einer sehr rauhen Bahn entspricht), zu erleichtern, setze man in (6.) $\varepsilon=k$, so erhält man

$$L\left[\sin\tfrac{3}{2}k+\frac{\mu\varrho}{r}\cos\tfrac{3}{2}k-(\cos 2k)^2\left(\frac{2\mu\varrho}{r}\cos\tfrac{1}{2}k\sin\tfrac{1}{2}k^2+\sin\tfrac{1}{2}k\left(\cos k+\frac{\mu^2\varrho^2}{r^2}\right)\right)\right]$$

$$8.\quad P=\frac{+G\left[\sin\tfrac{3}{2}k-(\cos 2k)\sin\tfrac{1}{2}k\left(\cos k+\frac{\mu\varrho}{r}\sin k\right)\right]+2\sin\tfrac{1}{2}k\cos\tfrac{1}{2}k^2\frac{c^2}{gr}(L+\tfrac{3}{2}G)\cos k^2}{\cos\tfrac{1}{2}k-\frac{\mu\varrho}{r}\sin\tfrac{1}{2}k^2}.$$

Setzt man hierin $L = 12000$ Pfund (was etwa für einen schwer beladenen sechsspännigen Frachtkarren gilt), $G = r^2\pi D\gamma = 4.\frac{22}{7}.\frac{1}{2}.100$ Pf. $= 628{,}6$ Pf., $\mu = 0{,}1$, $\varrho = 0{,}1'$, $c = 3$ Fufs und $g = 15{,}625$ Fufs, so erhält man

$$P = \frac{662{,}66892 + 31{,}57288 + 185{,}85360}{0{,}99968747} = \frac{880{,}09540}{0{,}99968747} = 880{,}3736 \text{ Pf.},$$

also auf jedes Pferd 146,7289 Pfund.

Wird aber $r = 3$ gesetzt, also in (6.) $G = 9.\frac{22}{7}.\frac{3}{4}.100 = 2121{,}4$, $\sin\varepsilon = \frac{1}{30}$, und läfst man alles Übrige unverändert, so erhält man

$$P = \frac{640{,}662552 + 106{,}206171 + 97{,}043844}{0{,}99980543682} = \frac{843{,}912567}{0{,}99980543682} = 844{,}0766 \text{ Pf.}$$

Es wird also durch Vergröfserung des Halbmessers von 2 Fufs auf 3 Fufs $880{,}3736 - 844{,}0766 = 36{,}297$ Pfund, also beinahe $\frac{1}{24}$ der bei 4 Fufs hohen Rädern erforderlichen Kraft erspart.

Daraus sieht man, wie vortheilhaft hohe Räder gegen niedrigere sind. Viel über 6 Fufs im Durchmesser werden die Räder nicht sein können, weil für solche Räder schon

$$\frac{\mu\varrho L}{r} + (L + G)\sin k = 746{,}07 \text{ Pfund}$$

Kraft nöthig sind, und, für ein gröfseres r, P wieder zunehmen müfste, wenn so hohe Räder auch nicht, wie es der Fall ist, andere Nachtheile hätten.

Der Vortheil, welchen die Vergröfserung des Halbmessers des Rades, in Bezug auf die Unebenheiten der Strafsen gewährt, fällt noch mehr in die Augen, wenn man den Theil der Kraft besonders berechnet, der darauf verwandt wird. Für die 4 Fufs hohen Räder ist

$$\frac{\mu\varrho}{r} L + (L + G)\sin k = 691{,}430 \text{ Pfund},$$

also die Kraft zur Überwindung der Unebenheiten der Oberfläche der Strafse $= 880{,}373 - 691{,}430 = 188{,}943$ Pfund. Für die 6 Fufs hohen Räder aber nur $844{,}07 - 746{,}07 = 98$ Pfund, also nur die Hälfte von der vorigen.

Übrigens wird die Dicke der Räder kaum, wie oben angenommen, im Verhältnifs der Höhe derselben, zunehmen müssen.

14.

Einige Sätze aus der Geometrie der geraden Linien.

(Von Herrn Prof. *M. L. Frankenheim* zu Breslau.)

1. Über Coordinaten-Veränderung.

Man ist in der Krystallographie oft genöthigt Coordinaten-Veränderungen vorzunehmen. Da die bisher bekannten Formeln nicht überall, besonders bei schiefwinkligen Axen, genügen, so theile ich die folgenden mit, die für alle vorkommenden Fälle ausreichen.

1. Die Coordinaten eines Punctes (A) nach den Axen S, T, R zu bestimmen, wenn seine Lage nach den Axen X, Y, Z bekannt ist. Beide Axensysteme durchkreuzen sich in demselben Puncte (C).

Die Aufgabe kann gelöset werden, sobald von drei Puncten die Lage nach beiden Axensystemen bekannt ist. Die Fälle, wo diese Bedingung nicht hinlänglich ist, ergeben sich aus den Gleichungen selbst.

2. Die Coordinaten der drei Puncte

nach der Axe X sind a, a', a'',
- - - Y - b, b', b'',
- - - Z - c, c', c'',
nach der Axe S sind d, d', d'',
- - - T - e, e', e'',
- - - U - f, f', f''.

Die Entfernung der drei Puncte von $C = g$, g', g'' sind Functionen von a, a' u. s. w. und der Winkel zwischen den Axen X, Y, Z.

Die Coordinaten des Punctes A für

das erste Axensystem x, y, z,
das zweite - - s, t, u,
und v die Linie von C nach A.

Von allen diesen Gröfsen ist nur s, t, u unbekannt, und es soll eine Gleichung gefunden werden zwischen ihnen und x, y, z.

3. Man kann sich die Linie v als die Diagonale eines Parallelepipeds denken, dessen Seiten $= mg$, $m'g'$ und $m''g''$ sind und in den Linien g, g', g'' liegen.

So ist für das erste Axensystem

$$\begin{aligned} m\,a + m'\,a' + m''\,a'' &= x, \\ m\,b + m'\,b' + m''\,b'' &= y, \\ m\,c + m'\,c' + m''\,c'' &= z; \end{aligned}$$

für das zweite Axensystem

$$\begin{aligned} m\,d + m'\,d' + m''\,d'' &= s, \\ m\,e + m'\,e' + m''\,e'' &= t, \\ m\,f + m'\,f' + m''\,f'' &= u. \end{aligned}$$

4. Man setze der Kürze wegen

$$\begin{aligned} p = &+ a\,b'\,c'' + b\,c'\,a'' + c\,a'\,b'' \\ &- a\,c'\,b'' - c\,b'\,a'' - b\,a'\,c'', \end{aligned}$$

so folgt aus den ersten drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} p\,m &= (b'\,c'' - c'\,b'')\,x + (c'\,a'' - a'\,c'')\,y + (a'\,b'' - b'\,a'')\,z, \\ p\,m' &= (b''\,c - c''\,b)\,x + (c''\,a - a''\,c)\,y + (a''\,b - b''\,a)\,z, \\ p\,m'' &= (b\,c' - c\,b')\,x + (c\,a' - a\,c')\,y + (a\,b' - b\,a')\,z, \end{aligned}$$

woraus m, m', m'' und dadurch s, t, u gefunden werden.

Wenn eine durch zwei dieser Puncte gelegte Linie, oder die durch die drei Puncte gehende Ebene in den Anfang der Coordinaten fällt, so wird $p = 0$ und s, t, u nicht völlig bestimmt.

6. Diese Formeln finden bei rechtwinkligen wie bei schiefwinkligen Coordinaten ihre Anwendung, selbst da, wo die Coordinaten auf eine von der gewöhnlichen abweichende Art bestimmt werden. Diese, die parallele, besteht nemlich darin, dafs man von dem zu bestimmenden Puncte aus eine der Axe X parallele Linie zieht, bis sie die Ebene XY trift, und eben so mit den Axen Y und Z verfährt. Man kann aber auch von dem Puncte A aus, unter einem Winkel, der nicht einmal für alle Axen derselbe zu sein braucht, Linien auf die Axe ziehen und in den dadurch gebildeten Dreiecken entweder die von A oder die von C ausgehenden Linien zu Coordinaten wählen. Sind in dem letzten Falle die Winkel rechte, so hat diese Art von Coordinatenbestimmung, welche man die perpendiculaire nennen könnte, zuweilen einige Vorzüge vor der gewöhnlichen, parallelen. Wir bedienen uns jedoch im Folgenden nur der parallelen Coordinaten.

7. Gewöhnlich ist die Lage der Linien S, T, U zu dem ersten Axensysteme bekannt, die drei Puncte liegen also auf den Axen S, T, U selbst; es werden

$$e,\ f,\ d'\ f',\ d',\ e'' = o,$$
$$d = g, \quad e' = g', \quad f'' = g'', \text{ und}$$
$$s = mg, \quad t = m'g', \quad u = m''g'',$$

wo m durch die Gleichungen des §. 4. gefunden wird.

II. Das Gesetz der Rationalität *).

Die vornehmste Aufgabe der Krystallographie ist die Beobachtung und Berechnung der Neigungen der Krystallflächen gegen einander. Ihre Gröfse oder ihre Entfernung vom Mittelpuncte ist von untergeordneter Bedeutung. Aus der Neigung wird die Lage der Flächen zu gewissen Hauptaxen abgeleitet. In der Art und Weise, diese Lage zu bestimmen, oder auch blofs in der Terminologie, unterscheiden sich die verschiedenen krystallographischen Methoden. Die anschaulichste von allen bisher vorgeschlagenen ist die von Weiss, der die Puncte angiebt, wo drei sich kreuzende Linien von den Flächen erreicht werden. Für physicalische Untersuchungen ist's jedoch vortheilhafter, statt der Flächen die Linien zu wählen, die auf ihnen senkrecht stehen, die Normalen, wie sie Naumann nennt. Diese Linien sind die Richtungen der Kräfte, welche die Flächen selbst der Krystalle in Beziehung auf Kohäsion, Elasticität, Licht, Wärme, Electricität hervorbringen. Durch ihre Gröfse kann man nach Belieben die Entfernung der Flächen von einem Mittelpuncte oder die Intensitäten jener Kräfte bezeichnen. Wir werden im Folgenden nun diese Normalen berücksichtigen und annehmen, dafs sie sämmtlich von dem Punct ausgehen, in welchem sich die Axen kreuzen.

Die Gleichung einer Normale ist daher $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$. Verschiedene Normalen haben für α, β, γ, verschiedene Werthe, allein die Mannichfaltigkeit ist durch folgendes Erfahrungsgesetz beschränkt:

Man kann die Axen stets so wählen, dafs wenn α, β, γ, α', β', γ' die Coordinaten zweier bei einem Krystall vorkommenden Normalen sind, $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\beta}$, $\frac{\gamma'}{\gamma}$ ein rationales Verhältnifs gegen einander haben; oder wenn man $\alpha' = \alpha$ setzt, was immer erlaubt ist, so sind $\frac{\beta'}{\gamma}$ und $\frac{\gamma'}{\gamma}$ rationale Gröfsen.

---

*) Vgl. zu diesem Abschnitte Naumanns „Beiträge zur Krystallonamie" und Kupffer, Poggend. Annalen VIII, 61.

Dieses ist das Gesetz der Rationalität, das einzige, welches man bis jetzt als allgemein gültig erkannt hat. Fast alles, was man bisher in der allgemeinen Krystallographie gethan hat, ist Folge dieses Gesetzes, oder dieses Gesetz auf eine andere Weise ausgedrückt. Beschränkungen in der Lage oder den Verhältnissen der Axen, die man hin und wieder aufgefunden zu haben glaubte, sind sämmtlich als ungegründet erwiesen.

2. Die Gröfsen α, β, γ bestehen daher gewissermafsen aus zwei Factoren, einem irrationalen und einem rationalen. Jener ist für alle Normalen eines Krystalls derselbe; dieser nach den Normalen verschieden. Setzt man $\alpha = aA$, $\beta = bB$, $\gamma = cC$, so wird für eine andere Normale $\alpha' = a'A$, $\beta' = b'B$, $\gamma' = c'C$ sein.

Die absoluten Werthe von A, B, C sind gleichgültig, wenn nur ihr Verhältnifs dasselbe bleibt. Auch dieses kann auf sehr mannichfaltige Weise bestimmt werden; man kann aber immer eine solche Wahl treffen, dafs die Coefficienten a, b, c den einfachsten Gliedern der Zahlenreihe gleich werden. 0, ∓ 1 sind die gewöhnlichsten Werthe, seltener schon ± 2, und noch gröfsere Zahlen werden bei einer schicklichen Wahl der Axen nur in verhältnifsmäfsig wenigen Fällen beobachtet.

Das nach diesen Angaben festgesetzte Verhältnifs A, B, C wird das Grundverhältnifs genannt, und sämmtliche Flächen, deren Coordinaten aA, bB, cC und a, b, c rationale Zahlen sind, bilden die Krystallreihe.

3. Es fragt sich nun, welche Normalen einer Krystallreihe die Eigenschaft haben, dafs Axen ihnen parallel gezogen, dem Gesetze der Rationalität entsprechen?

Man verändere die Axen und nehme statt derjenigen, bei denen sich das Gesetz aussprach, drei andere Linien, deren Coordinaten α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' sind; setze als Coordinaten einer Normale die Reihe xA, yB, zC für das erste Axensystem und sD, tE, uF für das zweite, indem $A : B : C$ das Grundverhältnifs dort, und $D : E : F$ dasselbe hier ausdrückt, so ist nach den Gleichungen I. 4. und I. 7.

$$psD = (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')\,x\,g\,A + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')\,y\,g\,B + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')\,z\,g\,C,$$
$$ptE = (\beta''\gamma - \gamma''\beta)\,x\,g\,A + (\gamma''\alpha - \alpha''\gamma)\,y\,g\,B + (\alpha''\beta - \beta''\alpha)\,z\,g\,C,$$
$$puF = (\beta\gamma' - \gamma\beta')\,x\,g\,A + (\gamma\alpha' - \alpha'\gamma')\,y\,g\,B + (\alpha\beta' - \beta\alpha')\,z\,g\,C.$$

Sollen hierin die irrationalen Gröfsen D, E, F von x, y, z unabhängig sein, so müssen α, β, γ, α' .... sich durch aA, bB, cC, $a'A$,

$b'B$ u. s. w. ausdrücken lassen, in denen a, b, c, a', b' .... rational, A, B, C irrational sind, also der Krystallreihe angehören. In diesem Falle werden die Verhältnisse $\frac{D}{g} : \frac{E}{g'} : \frac{F}{g''}$ rational und unabhängig von x, y und z. Die Verschiedenheit der Normalen spricht sich nun in den Grösen s, t, u aus, die rational und eine Function von x, y, z sind.

4. Dem Gesetze wird daher durch jede Axe Genüge geleistet, die einem Gliede der Krystallreihe parallel läuft. Aber welches Glied man wählen soll, hängt von der Lage der beobachteten Flächen und ihren physischen Eigenschaften ab. Wo sich drei Flächen von den übrigen durch ihre Theilbarkeit auszeichnen, erlangt man allezeit die einfachsten Coefficienten, wenn man die Axen senkrecht auf ihnen annimmt. Wo dieses nicht der Fall ist, wird die Wahl schwankender, und es kann geschehen, dafs Axen, die für die bis dahin beobachteten Flächen allen Anforderungen genügten, geändert werden müssen, wenn man neue Flächen beobachtet.

5. Kürze ist in jeder Terminologie ein Haupterfordernifs. Man bezeichne daher eine Linie, deren vollständige Gleichung

$$\frac{x}{aA} = \frac{y}{bB} = \frac{z}{cC} \text{ ist, durch } (a\,b\,c).$$

Um die $\mp$ Zeichen auszudrücken, schreibe man z. B. für $+aA$, a' und für $-aA$, a'', behalte a ohne Strich bei, wo es auf den Unterschied der $\mp$ Zeichen nicht ankommt.

$(1\ 2'\ 3'')$ bedeutet daher eine Normale, deren Coordinaten sich wie $\mp A$, $+2B$, $-3C$ verhalten.

6. Eine durch zwei Linien $(a\,b\,c)$ $(\alpha\beta\gamma)$ gehende Ebene hat die Gleichung

$$BC(b\gamma - c\beta)x + CA(c\alpha - a\gamma)y + AB(a\beta - b\alpha)z = 0.$$

Die Coefficienten verhalten sich also wie

$$\frac{b\gamma - c\beta}{A} : \frac{c\alpha - a\gamma}{B} : \frac{a\beta - b\alpha}{C}.$$

Sämmtliche Flächen bilden daher eine ähnliche Reihe wie die Normalen, von der man als Grundverhältnifs $\frac{1}{A} : \frac{1}{B} : \frac{1}{C}$ annehmen kann. Dieser Reihe gehören im Allgemeinen die auf den Normalen senkrecht stehenden Flächen nicht an.

III. Linien und Winkel.

Um eine Krystallreihe vollständig zu characterisiren, sind fünf Gröfsen nöthig, die drei Winkel und die Gröfsenverhältnisse zwischen den Axen. Jene können unmittelbar an drei Normalen beobachtet werden, die man den Axen parallel nehmen und durch (100), (010) und (001) bezeichnen kann. Um aber die Verhältnisse zu bestimmen, mufs man noch eine vierte Normale beobachten können. Setzt man diese etwa (111), so darf man nur aus den Winkeln zwischen dieser Linie und den drei ersten die Gleichung derselben aufsuchen, und hat man gefunden, dafs diese $Ax = By = Cz$ ist, so ist $A : B : C$ das verlangte Grundverhältnifs.

Die vierte Linie darf jedoch nicht in der Ebene zweier Axen liegen; ist dieses der Fall, und das Zeichen etwa (110), so kann zwar das Verhältnifs $A : B$ gefunden werden, aber $A : C$ oder $B : C$ bleibt unbekannt, wenn nicht überdies noch eine Normale in den Ebenen XY oder ZX beobachtet wird.

1. Um eine Krystallreihe zu bestimmen, sind also vier Linien nöthig, von denen nie mehr als zwei in einer Ebene sein dürfen. Zwischen ihnen sind sechs Winkel. Die Gröfse der Linien ist zwar willkürlich; indem aber die vierte Linie die Diagonale eines Parallelepipeds ist, dessen Seiten in die drei ersten Linien fallen, so sind drei Verhältnisse zwischen Linien zu berücksichtigen. Also im Ganzen neun Gröfsen. Es reichen aber die drei Winkel und die zwei Linienverhältnisse zwischen den Axen hin, die Lage der vierten Linie vollkommen zu bestimmen; es werden deshalb vier von jenen neun Gröfsen Functionen der übrigen fünf sein. Diese wollen wir aufsuchen. Man könnte diese Aufgabe behandeln wie die ähnlichen in der Trigonometrie, nur mit dem Unterschiede, dafs man in der ebenen Trigonometrie mit fünf oder eigentlich nur vier Gröfsen operirt, in der sphärischen mit sechs, hier aber mit neun; und die Wichtigkeit fast aller einzelnen Fälle für die Krystallographie würde die Ausführlichkeit rechtfertigen. Wir wollen uns jedoch hier auf wenige Sätze beschränken. Folgende Methode führt schnell zum Ziele.

2. Es seien x, y, z, u vier von einem Puncte ausgehende Linien und u der Diagonale des aus x, y, z gebildeten Parallelepipeds gleich, aber an Richtung entgegengesetzt.

Die sechs Winkel zwischen den Linien werden bezeichnet durch

$$(y\,z)\ (z\,u)\ (u\,x)\ (x\,y)\ (z\,x)\ (y\,u),$$

so ist es leicht, folgenden Satz zu beweisen:

Wenn man eine Linie t durch den Kreuzpunct der Linien zieht, und die Winkel, welche t mit x, y .... macht, durch $(t\,x)\,(t\,y)$.... bezeichnet, so ist

$$x\cos(t\,x)+y\cos(t\,y)+z\cos(t\,z)+u\cos(t\,u)=0.$$

3. Hieraus folgen unmittelbar folgende vier Gleichungen

$$\text{(I.)}\quad x+y\cos(x\,y)+z\cos(x\,z)+u\cos(x\,u)=0,$$
$$\text{(II.)}\quad x\cos(y\,z)+y+z\cos(y\,z)+u\cos(y\,u)=0,$$
$$\text{(III.)}\quad x\cos(z\,x)+y\cos(z\,y)+z+u\cos(z\,u)=0,$$
$$\text{(IV.)}\quad x\cos(u\,x)+y\cos(u\,y)+z\cos(u\,z)+u=0.$$

Aus diesen von einander unabhängigen Gleichungen können durch Elimination die Data gefunden werden, die zur Auflösung sämmtlicher Aufgaben hinreichen. Sie zeigen auch, dafs die vier Linien und die sechs Winkel einander vollkommen symmetrisch sind. In der That, wenn u die Diagonale zu x, y, z ist, so ist's x zu y, z, u, u. s. w. Wir werden daher im Folgenden von den symmetrischen Gleichungen immer nur eine aufführen.

4. Multiplicirt man die Reihe (IV.) mit u, und substituirt aus den übrigen Gleichungen die Werthe von $u\cos(u\,x)$, $u\cos(u\,y)$, $u\cos(u\,z)$, so findet man

$$u^2=x^2+y^2+z^2+2yz\cos(y\,z)+2zx\cos(z\,x)+2xy\cos(x\,y),$$

und ähnliches für x^2, y^2, z^2.

5. Man berechne aus (I.) $u^2\cos^2(x\,u)$ und vergleiche das Resultat mit §. 4., so findet sich

$$u^2\sin^2(u\,x)=y^2\sin^2(y\,x)+z^2\sin^2(z\,x)+2yz[\cos(y\,z)-\cos(y\,x)\cos(z\,x)].$$

Ähnliche Gleichungen für $u\sin(u\,y)$, $u\sin(u\,z)$, $u\sin(x\,y)$ u. s. f.

6. Merkwürdig ist die Gleichung

$$x^2+u^2+2xu\cos(x\,u)=y^2+z^2+2yz\cos(y\,z)$$

blofs zwischen fünf Gröfsen, indem schon vier Gröfsen eine fünfte kennen lehren. Diese fünf reichen aber nicht hin, noch eine sechste zu bestimmen.

7. Ich übergehe mehrere andere Gleichungen zwischen den Linien und Winkeln, und theile nur noch folgende mit, in denen wenigstens fünf Winkel vorkommen, und die wie ich glaube noch nicht bekannt sind, obgleich sie in der Krystallographie sehr oft angewendet werden können.

Da die Lage des Systems schon durch fünf Winkel vollständig bestimmt wird, so mufs es eine Gleichung geben, in welcher blofs die sechs Winkel vorkommen, aber keine Linie. Diese ist

$$\begin{aligned}2 = &+\sin^2(yz)\sin^2(ux)+2\cos(yz)\cos(zu)\cos(uy)-2\cos(zu)\cos(xy)\cos(uy)\cos(zx)\\&+\sin^2(zu)\sin^2(xy)+2\cos(zu)\cos(ux)\cos(xz)-2\cos(uy)\cos(zx)\cos(yz)\cos(ux)\\&+\sin^2(uy)\sin^2(zx)+2\cos(ux)\cos(xy)\cos(yu)-2\cos(yz)\cos(ux)\cos(zu)\cos(xy)\\&+2\cos(xy)\cos(yz)\cos(zx).\end{aligned}$$

Völlig symmetrisch zwischen den sechs Winkeln, aber zu complicirt, um zur Berechnung des sechsten Winkels aus den übrigen dienen zu können.

8. Minder symmetrisch, aber zur Berechnung geeignet ist die Gleichung

$$\begin{aligned}0 = &\cos(ux)\sin^2(yz)+\alpha\beta+\cos(zx)[\cos(ux)-\cos(yz)\cos(uy)]\\&+\cos(yx)[\cos(uy)-\cos(yz)\cos(uz)].\end{aligned}$$

Ähnliche Gleichungen für die übrigen Winkel, wenn man setzt:

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= 1-\cos^2(yz)-\cos^2(zx)-\cos^2(xy)+2\cos(yz)\cos(zx)\cos(xy),\\ \beta^2 &= 1-\cos^2(zu)-\cos^2(uy)-\cos^2(yz)+2\cos(zu)\cos(uy)\cos(yz),\\ \gamma^2 &= 1-\cos^2(ux)-\cos^2(xz)-\cos^2(zu)+2\cos(ux)\cos(xz)\cos(zu),\\ \delta^2 &= 1-\cos^2(xy)-\cos^2(yu)-\cos^2(ux)+2\cos(yx)\cos(yu)\cos(ux).\end{aligned}$$

Die Gröfsen α, β, γ, δ kommen bei der Entwickelung der einzelnen Aufgaben sehr häufig vor. Sie sind leicht zu berechnen, indem z. B.

$$\alpha^2 = 4\sin\frac{(yz)+(zx)+(xy)}{2}\sin\frac{(yz)+(zx)-(xy)}{2}\sin\frac{(yz)-(zx)+(xy)}{2}\sin\frac{-(yz)+(zx)+(xy)}{2}.$$

Auch die Gleichung für $\cos(ux)$ in diesem §. kann etwas geschmeidiger gemacht werden.

9. Sind die sechs Winkel durch Beobachtung oder Rechnung gefunden, so ergiebt sich für die Seiten

$$u:x:y:z = \alpha:\beta:\gamma:\delta.$$

Die Aufgaben der letzten beiden §§. kommen am häufigsten vor, denn selten sind die Seiten anderweitig bekannt, fast immer mufs die Lage der Linien aus den Winkeln berechnet werden.

10. Zum Schlusse will ich noch einen neuen Beweis einer in der Krystallographie sehr häufig vorkommenden Gleichung mittheilen.

u habe die in §. 2. angegebene Lage zu x, y, z; eine ähnliche Lage zu x', y', z' habe t, so ist

$$x'\cos(ux)+y'\cos(uy)+z'\cos(uz)+t\cos(ut) = 0;$$

multiplicirt man diese Gleichung mit u, und substituirt aus §. 3. die Werthe $u\cos(ux)$, $u\cos(uy)$, $u\cos(uz)$, so findet man

$$ut\cos(ut) = xx' + yy' + zz' + (yz' + zy')\cos(yz) + (zx' + xz')\cos(zx) + (xy' + yx')\cos(xy).$$

Für rechtwinklige Coordinaten ist bekanntlich

$$ut\cos(ut) = xx' + yy' + zz'.$$

Wir berücksichtigen die Anwendung auf Krystallographie nicht näher. Sie ist leicht, und kann mit geringen Modificationen auf Flächen ausgedehnt werden, die nach Weiss's Methode oder der ihr sehr ähnlichen Naumann's durch die Puncte bezeichnet werden, in denen sie die Axen treffen. Noch weniger können wir uns auf die einzelnen sogenannten Krystallsysteme einlassen. Die Formeln werden in der Regel viel einfacher, und wenn man die bekannten Kunstgriffe der Trigonometrie anwendet, oft sehr geschmeidig.

15.

Ableitung des Fermatschen und Wilsonschen Satzes aus einer gemeinschaftlichen Quelle.

(Von Herrn Prof. Dr. *Grunert* zu Brandenburg.)

1.

Seien im Folgenden a und p stets relative Primzahlen. Alle Zahlen, welche zu p relative Primzahlen und kleiner als p sind, sollen durch

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ \ldots\ (q),$$

ihre Anzahl durch q bezeichnet werden. Unter diesen Voraussetzungen lassen sich folgende Sätze beweisen, wobei ich Begriff und Zeichen der Zahlen-Congruenz als bekannt voraussetze.

2.

In Bezug auf p als Modulus können nie zwei Glieder der Reihe

$$(1)a,\ (2)a,\ (3)a,\ (4)a,\ \ldots\ (q)a$$

einander congruent sein.

Wären $(k)a$, $(k')a$ irgend zwei Glieder dieser Reihe, so wäre, für $(k)a \equiv (k')a$, auch $[(k)-(k')]a \equiv 0$, d. i. $[(k)-(k')]a$ durch p theilbar. Da nun a und p relative Primzahlen sind, so müfste $(k)-(k')$ durch p theilbar sein, welches ungereimt ist, da $(k)-(k')$, seiner absoluten Gröfse nach, wegen der Voraussetzung (1.), offenbar $< p$ ist.

3.

Jeder bei der Division eines Gliedes obiger Reihe durch p bleibende Rest ist mit p relative Primzahl.

Sei $(k)a = pp' + r$. Wären nun p und r nicht relative Primzahlen, also beide durch die Primzahl $\theta > 1$ theilbar, so würde θ auch in $(k)a$ aufgehen, und folglich, gegen die Voraussetzung, entweder (k) oder a mit p nicht relative Primzahl sein, weil nach einem sehr bekannten Satze θ entweder in (k), oder in a aufgehen müfste.

4.

Da nun nie zwei Glieder der obigen Reihe einander congruent sind, so bleiben bei der Division derselben durch p lauter ungleiche Reste, welche natürlich sämmtlich kleiner als p, und nach (3.) mit p relative

Primzahlen sind. Diese Reste sind also keine andern als die Zahlen

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ \ldots\ (q),$$

ohne Rücksicht auf ihre Ordnung in Bezug auf die Glieder der in Rede stehenden Reihe.

5.

Die Einheit ist immer mit p relative Primzahl und $< p$. Also mufs unter diesen Resten immer einer vorkommen, welcher $= 1$ ist, und folglich unter den Gliedern der in Rede stehenden Reihe immer eines, welches $\equiv 1$ ist, aber auch nur eines, da nie zwei Glieder einander congruent sind (2.).

6.

Weil a, p und (k), p, also auch bekanntlich $(k)a^2$, p relative Primzahlen sind, so gilt für jedes (k) alles Obige auch von der Reihe

$$(1)a^2(k),\ (2)a^2(k),\ (3)a^2(k),\ \ldots\ (q)a^2(k),$$

immer in Bezug auf p als Modulus.

7.

Wäre das der Einheit congruente Glied vorstehender Reihe (5.), $= (k)a^2(k) \equiv 1$, so wäre, wegen $p\,a^2(k) \equiv 0$, nach einem bekannten Satze $[p-(k)]\,a^2(k) \equiv 0-1 \equiv -1$. In diesem Gliede ist nicht $p-(k) = (k)$, weil sonst zugleich

$$(k)a^2(k) \equiv +1, \quad (k)a^2(k) \equiv -1,$$

folglich

$$(k)a^2(k) - (k)a^2(k) \equiv +1-(-1) \equiv 2,$$

d. i. $2 \equiv 0$, 2 durch p theilbar, p selbst $= 2$ wäre, welchen Fall wir fürs Erste ausschliefsen, indem wir nachher wieder auf denselben zurückkommen wollen.

8.

Für verschiedene (k) und (k') kann nie

$$(n)a^2(k) \equiv \pm 1, \quad (n)a^2(k') \equiv \pm 1$$

sein, so dafs nemlich die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen, weil sonst $(k)a^2(n) \equiv (k')a^2(n)$ wäre, gegen (2.), verbunden mit (6.).

9.

Man betrachte jetzt die Reihen

$$\begin{array}{llll}
(1)a^2(1), & (2)a^2(1), & (3)a^2(1), & \ldots\ (q)a^2(1),\\
(1)a^2(2), & (2)a^2(2), & (3)a^2(2), & \ldots\ (q)a^2(2),\\
(1)a^2(3), & (2)a^2(3), & (3)a^2(3), & \ldots\ (q)a^2(3),\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
(1)a^2(q), & (2)a^2(q), & (3)a^2(q), & \ldots\ (q)a^2(q).
\end{array}$$

In jeder dieser Reihen giebt es nach dem Vorhergehenden ein Glied, welches $\equiv 1$ ist, aber auch nur eines. Wäre in einer dieser Reihen dieses Glied von der Form $(k)a^2(k)$, so könnte man statt dessen in dieser Reihe das Glied $[p-(k)]a^2(k) \equiv -1$ setzen, welches nicht von der in Rede stehenden Form ist. Also giebt es in jeder der obigen Reihen ein Glied, welches $\equiv \pm 1$, und nicht von der Form $(k)a^2(k)$ ist.

Auch können in irgend zwei dieser Reihen nach (8.) nicht zwei gleichstellige Glieder

$$(n)a^2(k) \equiv \pm 1, \quad (n)a^2(k') \equiv \pm 1$$

vorkommen, so dafs nemlich die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen. Kämen aber in zwei Reihen zwei gleichstellige Glieder

$$(n)a^2(k) \equiv \pm 1, \quad (n)a^2(k') \equiv \mp 1$$

vor, wo wir sich wieder die obern und untern Zeichen auf einander beziehen lassen, so wäre

$$(n)a^2[(k)+(k')] \equiv \pm 1 \mp 1 \equiv 0.$$

Also müfste p in dieser Gröfse, folglich, weil p mit (n) und a oder a^2 relative Primzahl ist, in $(k)+(k')$ aufgehen. Da aber $(k)<p$, $(k')<p$, $(k)+(k')<2p$, $[(k)+(k')]:p<2$ ist, so kann dieser Quotient nur $=1$ sein. Demnach ist $(k)+(k')=p$.

Statt der beiden obigen Glieder könnte man entweder

$$(n)a^2(k) \equiv \pm 1, \quad [p-(n)]a^2(k') \equiv 0-(\mp 1) \equiv \pm 1, \text{ oder}$$
$$[p-(n)]a^2(k) \equiv 0-(\pm 1) \equiv \mp 1, \quad (n)a^2(k') \equiv \mp 1$$

setzen, wo nun nach (8.) nicht $p-(n)=(n)$ ist. Wäre, indem man z. B. das Erste thäte, etwa $p-(n)=(k')$, so würde man das Zweite thun, wo nun nicht $p-(n)=(k)$ sein wird, und umgekehrt. Keines der neu eingeführten Glieder kann nun noch mit einem gleichstelligen Gliede einer der übrigen Reihen auf die Weise übereinstimmen, dafs das eine $\equiv \pm 1$, das andere $\equiv \mp 1$ ist, weil ja immer für jede zwei solche Reihen $(k)+(k')=p$ ist, und eine Übereinstimmung dieser Art also immer nur in zwei bestimmten zusammengehörenden Reihen statt finden kann.

10.

Betrachten wir nun wieder die Reihe

$$(1)a,\ (2)a,\ (3)a,\ (4)a,\ \ldots\ (q)a,$$

so erhellet aus dem Obigen (9.) deutlich, dafs sich die Glieder derselben immer so zu zweien ohne Wiederholung eines Gliedes mit einander verbinden lassen, dafs jedes der diesen Verbindungen, deren Anzahl offenbar $=\frac{1}{2}q$

ist, entsprechenden Producte $\equiv \pm 1$ ist. Das Product aller dieser Producte ist

$$= (1).(2).(3).(4) \ldots . (q).(a^2)^{\frac{1}{2}q}.$$

Folglich nach einem bekannten Satze von der Congruenz der Zahlen:

$$(1).(2).(3).(4) \ldots . (q) a^q \equiv \pm 1.$$

Dafs q, die Anzahl aller der Zahlen, welche kleiner als p und zu p relative Primzahlen sind, stets eine gerade Zahl ist, kann leicht gezeigt werden. Ist nemlich überhaupt (k) mit p relative Primzahl und $< p$, so ist auch $p-(k)$ mit p relative Primzahl und $< p$. Wären nemlich $p-(k)$ und p durch θ theilbar, so müfste θ offenbar auch in (k) aufgehen, und p und (k) wären also, gegen die Voraussetzung, nicht relative Primzahlen. Die Zahlen, welche mit p relative Primzahlen und $< p$ sind, sind demnach immer paarweise verbunden, woraus das zu Beweisende folgt.

11.

Da nach (4.) die bei der Division von

$$(1)a,\ (2)a,\ (3)a,\ (4)a,\ \ldots .\ (q)a$$

durch p bleibenden Reste ohne Rücksicht auf die Ordnung

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ \ldots .\ (q)$$

sind, und jeder Dividendus offenbar seinem entsprechenden Reste congruent ist, wie aus dem Begriffe der Congruenz der Zahlen unmittelbar folgt, so ist

$$(1)a.(2)a.(3)a \ldots . (q)a = (1).(2).(3) \ldots . (q).a^q \equiv (1).(2).(3) \ldots . (q).$$

Also

$$(1).(2).(3).(4) \ldots . (q).\ [a^q - 1] \equiv 0.$$

Folglich geht p in $(1).(2).(3) \ldots . (q).[a^q - 1]$, also, weil es mit (1), (2), (3), ... (q) relative Primzahl ist, in $a^q - 1$ auf. Also

$$a^q - 1 \equiv 0 \ (\text{Mod. } p), \quad a^q \equiv 1 \ (\text{Mod. } p).$$

Ist p eine Primzahl, so sind die Zahlen, welche $< p$ und zu p relative Primzahlen sind:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots .\ p-1.$$

Die Anzahl dieser Zahlen ist $= p-1$. Im vorliegenden Falle also $q = p-1$. Folglich, wenn p eine Primzahl ist, die in a nicht aufgeht:

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \ (\text{Mod. } p), \quad a^{p-1} \equiv 1 \ (\text{Mod. } p).$$

p darf in a nicht aufgehen, weil nach (1.) a und p im Allgemeinen relative Primzahlen sind. Für $p = 2$, welcher Fall oben ausgeschlossen worden ist, gilt diese Congruenz auch. Da 2 nemlich in a nicht aufgehen darf, so ist a eine ungerade, $a-1$ eine gerade Zahl. Also offenbar

$$a^{2-1} - 1 \equiv 0 \ (\text{Mod. } 2.), \quad a^{2-1} \equiv 1 \ (\text{Mod. } 2.).$$

Dies ist der Fermatsche Satz.

12.

Nach (10.) ist

$$(1).(2).(3).(4) \ldots . (q).a^q \equiv \pm 1 \text{ (Mod. } p).$$

Dies gilt auch für $a = 1$. Also

$$(1).(2).(3).(4) \ldots . (q) \equiv \pm 1 \text{ (Mod. } p).$$

Nur in dem Falie, wo p eine Primzahl ist, wollen wir bestimmen, welches Zeichen genommen werden mufs, da die allgemeine Untersuchung hierüber jetzt nicht zu unserm Zweck gehört.

Ist p eine Primzahl, so sind

$$(1), (2), (3), (4), \ldots . (q),$$

wie wir schon in (11.) gesehen haben, die Zahlen:

$$1, 2, 3, 4, \ldots . p-1.$$

Also immer

$$1.2.3.4.5 \ldots . (p-1) \equiv \pm 1 \text{ (Mod. } p).$$

Wäre nun in (6.) für $a = 1$:

$$(k)(k) \equiv +1 \text{ (Mod. } p),$$

so wäre

$$(k)\ (k)-1 = [(k)-1]\ [(k)+1] \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

Folglich wäre dieses Product, und demnach, da p eine Primzahl ist, entweder $(k)-1$ oder $(k)+1$ durch p theilbar; also, da $(k) < p$ ist, entweder $(k) = 1$, oder $(k) = p-1$. In diesem Falle lassen sich folglich die Glieder der Reihe

$$2, 3, 4, 5, 6, \ldots . p-2$$

immer so, ohne Wiederholung eines, zu zweien unter einander verbinden, dafs jedes der erhaltenen Producte $\equiv +1$ ist, da hier offenbar alle sonstigen Unterscheidungen in (6.) nun wegfallen. Nach einem bekannten Satze von der Congruenz der Zahlen ist also, wenn p eine Primzahl ist, immer

$$2.3.4.5 \ldots . (p-2) \equiv +1 \text{ (Mod. } p).$$

Aber $1.(p-1) = p-1$, $p \equiv 0$, $1 \equiv 1$, $p-1 \equiv 0-1 \equiv -1$, $1.(p-1) \equiv 1(-1) \equiv -1$, immer für p als Modulus. Folglich auch

$$2.3.4.5 \ldots .(p-2).1.(p-1) \equiv (+1).(-1) \equiv -1 \text{ (Mod. } p),$$

$1.2.3.4 \ldots .(p-1) \equiv -1$ (Mod. p), $1.2.3.4 \ldots .(p-1)+1 \equiv 0$ (Mod. p), so dafs also jede Primzahl p immer in $1.2.3.4 \ldots .(p-1)+1$ aufgeht, welches der nach **Wilson** benannte Satz ist. Für $p = 2$ ist $1+1 = 2$ natürlich auch durch 2 theilbar, so wie auch in diesem Falle offenbar $(1).(2).(3).(4) \ldots .(q) \equiv \pm 1$ (Mod. p) ist.

16.
Observationes in fractiones continuas.

(Auct. *Stern*, Dr. phil. Goett.)

(Epitome dissertationis mense Mart. anni 1829 script.)

Fractio continua $a+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\ddots+\cfrac{b_m}{a_m}}}$ quam ita designabo $\left(a, \frac{b_1}{a_1} \ldots . \frac{b_m}{a_m}\right)$, resolvatur in fractionem vulgarem, nulla prorsus reductione facta. Tum ponam numeratorem hujus fractionis $= a,\ a_m$, denominatorem $= a_1,\ a_m$. Erit itaque $a_m,\ a$ numerator fractionis $\left(a_m, \frac{b_m}{a_{m-1}} \ldots . \frac{b_1}{a}\right)$ in vulgarem resolutae, ejusque denominator $a_{m-1},\ a$. Cum sit $\frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m} = a + \frac{b_1}{\frac{a_1,\ a_m}{a_2,\ a_m}}$ erit

$$1. \quad a,\ a_m = a \,.\, a_1,\ a_m + b_1 \,.\, a_2,\ a_m$$

similique modo

$$a_m,\ a = a_m \,.\, a_{m-1},\ a + b_m \,.\, a_{m-2},\ a.$$

Constat etiam esse

$$2. \quad a,\ a_m = a_m \,.\, a,\ a_{m-1} + b_m \,.\, a,\ a_{m-2}$$

ideoque

$$a_m,\ a = a \,.\, a_m,\ a_1 + b_1 \,.\, a_m,\ a_2 \,.$$

Ex formulis (1.) et (2.) sequitur:

$$a_m \,.\, a,\ a_{m-1} + b_m \,.\, a,\ a_{m-2} - a \,.\, a_1,\ a_m - b_1 \,.\, a_2,\ a_m = 0,$$
$$a_m \,.\, a_{m-1},\ a + b_m \,.\, a_{m-2},\ a - a \,.\, a_m,\ a_1 - b_1 \,.\, a_m,\ a_2 = 0,$$

vel

$$a_m\,(a,\ a_{m-1} - a_{m-1},\ a) + b_m\,(a,\ a_{m-2} - a_{m-2},\ a) + a\,(a_m,\ a_1 - a_1,\ a_m) + b_1\,(a_m,\ a_2 - a_2,\ a_m) = 0.$$

Cum autem litterae a_m, b_m, b_1, a, quemlibet valorem induere possint, oportet sit $a,\ a_{m-1} = a_{m-1},\ a$; $a,\ a_{m-2} = a_{m-2},\ a$ etc. vel omnino *) $a_r,\ a_{r+s} = a_{r+s},\ a_r$.

---

*) Si itaque fractio continua periodica $\left(b, \frac{1}{a} \ldots . \frac{1}{a_m}, \frac{1}{a} \ldots . \frac{1}{a_m} \text{ etc.}\right) = x$, radicem aequationis quadraticae exprimit, altera radix ejusdem aequationis erit $= \left(b - a_m, \frac{-1}{a_{m-1}}, \frac{1}{a_{m-2}}, \ldots . \frac{1}{a}, \frac{1}{a_m}, \ldots . \frac{1}{a}, \frac{1}{a_m}, \ldots . \frac{1}{a} \text{ etc.}\right) = y$.

Si in formula (2) pro a_m substituitur $\frac{a_m\,,\ a_{m+n}}{a_{m+1}\,,\ a_{m+n}}$, erit

3. $a,\ a_{m+n} = a,\ a_{m-1}\,.\,a_m,\ a_{m+n} + b_m\,.\,a,\ a_{m-2}\,.\,a_{m+1},\ a_{m+n}\,.$

Ex datis formulis facile sequens deducitur:

$$a,\ a_m\,.\,a_1\,,\ a_{m-1} - a_1\,,\ a_m\,.\,a,\ a_{m-1} = -\,b_1\,(a_1\,,\ a_m\,.\,a_2\,,\ a_{m-1} - a_2\,,\ a_m\,,\ a_1\,,\ a_{m-1})$$

vel omnino **4.** $= \pm\, b_1\,.\,b_2\,.\,.\,.\,.\,b_m\,.$

Hoc posito jam ad generaliores formulas progredi licet. Cum enim sit, posito $m<n$,

$$a\,,\ a_n = a\,,\ a_{n-m}\,.\,a_{n-m+1}\,,\ a_n + b_{n-m+1}\,.\,a\,,\ a_{n-(m+1)}\,.\,a_{n-m+2}\,,\ a_n\,,$$

$$a_1\,,\ a_n = a_1\,,\ a_{n-m}\,.\,a_{n-m+1}\,,\ a_n + b_{n-m+1}\,.\,a_1\,,\ a_{n-(m+1)}\,.\,a_{n-m+2}\,,\ a_n\,,$$

erit

$$a,\ a_n\,.\,a_1\,,\ a_{n-m} - a_1\,,\ a_n\,.\,a,\ a_{n-m}$$

$$= a_{n-m+2}\,,\ a_n\,.\,b_{n-m+1}\,.\,(a,\ a_{n-(m+1)}\,.\,a_1\,,\ a_{n-m} - a_1\,,\ a_{n-(m+1)}\,.\,a,\ a_{n-m})$$

vel (sec. form. 4.)

5. $= \pm\, a_{n-m+2},\ a_n\,(b_1\,.\,b_2\,.\,.\,.\,.\,b_{n-m+1})\,.$

Cum sit

$$a,\ a_n = a,\ a_{n-(m+1)}\,.\,a_{n-m},\ a_n + b_{n-m}\,.\,a,\ a_{n-(m+2)}\,.\,a_{n-m+1},\ a_n\,,$$

$$a,\ a_{n-p} = a,\ a_{n-(m+1)}\,.\,a_{n-m},\ a_{n-p} + b_{n-m}\,.\,a,\ a_{n-(m+2)}\,.\,a_{n-m+1},\ a_{n-p}\,,$$

erit

6. $a,\ a_n\,.\,a_{n-m}\,.\,a_{n-p} - a,\ a_{n-p}\,.\,a_{n-m}\,,\ a_n = \pm\, a,\ a_{n-(m+2)}\,.\,a_{n-p+2}\,,\ a_n\,(b_{n-m}\,.\,b_{n-m+1}\,.\,b_{n-p+1})\,.$

Singulos casus in form. (5.) et (6.) contentos jam *) Euler et Kramp exhibuerunt.

Erit enim

$$x = b + \cfrac{1}{a + \ddots + \cfrac{1}{a_m + x - b}} = b + \frac{(x-b)\,.\,a_1\,,\ a_{m-1} + a_1\,,\ a_m}{(x-b)\,.\,a,\ a_{m-1} + a,\ a_m} \quad \text{vel} \quad x = b - \frac{[(b-x)\,.\,a,\ a_m + a_1\,,\ a_m\,]}{(b-x)\,.\,a,\ a_{m-1} + a_1\,,\ a_{m-1}}$$

et $y = b - \left(a_m + \cfrac{1}{a_{m-1} + \ddots + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b - y}}}\right) = b - \frac{[(b-y)\,.\,a_m\,,\ a + a_m\,,\ a_1]}{(b-y)\,.\,a_{m-1}\,,\ a + a_{m-1}\,,\ a_1}$, erit itaque y radix ejus-

dem aequationis cujus radix x est. Facile autem perspicitur, hanc propositionem quae jam theorema ab E. Galois demonstratum (*Annal. des math. T.* 19. *p.* 294.) continet, generalius ita enuntiari posse:

sit radix aequationis quadraticae $= \left(b,\ \frac{1}{b_1} \ldots . \frac{1}{b_m},\ \frac{1}{a} \ldots . \frac{1}{a_m},\ \frac{1}{a} \ldots . \frac{1}{a_m}\ \text{etc.}\right)$,

tum erit altera radix hujus aequationis

$$\left(b,\ \frac{1}{b_1} \ldots . \frac{1}{b_m - a_m},\ \frac{-1}{a_{m-1}},\ \frac{1}{a_{m-2}} \ldots . \frac{1}{a},\ \frac{1}{a_m} \ldots . \frac{1}{a},\ \frac{1}{a_m} \ldots . \frac{1}{a}\ \text{etc.}\right);$$

cf. etiam „*Theorie des nombres, par* Legendre, *part.* 1. §. 10." (Addit. mens. Decembr. anno 1830 auct. script.)

*) *Nov. comm. petr. T.* 9. *Elém. d'arithm. univ. l.* 8.

17.

Potenzial- oder cyklisch-hyperbolische Functionen.

(Von Hrn. Prof. *Gudermann* zu Cleve.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1., 14. und 28. im VI., No. 9. und 21. im VII., und No. 6. im VIII. Bande.)

II.

Die briggischen Logarithmen der hyperbolischen Cosinus, Sinus und Tangenten aller Zahlen, welche gröfser als zwei sind, mit neun und zuletzt mit zehn Decimalziffern.

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,000	0,575 4413 82	4186 87	0,559 5308 41	4504 83	9,984 0894 59	317 96
2,001	0,575 8600 69	4187 18	0,559 9813 24	4504 51	9,984 1212 55	317 33
02	76 2787 87	4187 48	60 4317 75	4504 18	1529 88	316 69
03	76 6975 35	4187 79	60 8821 92	4503 85	1846 57	316 06
04	77 1163 14	4188 09	61 3325 77	4503 52	2162 63	315 43
05	77 5351 23	4188 40	61 7829 29	4503 20	2478 06	314 80
2,006	0,577 9539 63	4188 70	0,562 2332 49	4502 87	9,984 2792 86	314 17
07	78 3728 33	4189 00	62 6835 36	4502 54	3107 03	313 55
08	78 7917 32	4189 30	63 1337 90	4502 22	3420 58	312 91
09	79 2106 63	4189 60	63 5840 12	4501 90	3733 49	312 29
10	79 6296 24	4189 91	64 0342 02	4501 57	4045 78	311 67
2,011	0,580 0486 14	4190 21	0,564 4843 59	4501 25	9,984 4357 45	311 04
12	80 4676 35	4190 51	64 9344 84	4500 93	4668 49	310 43
13	80 8866 85	4190 81	65 3845 77	4500 61	4978 92	309 81
14	81 3057 65	4191 11	65 8346 38	4500 29	5288 73	309 16
15	81 7248 77	4191 41	66 2846 66	4499 97	5597 89	308 57
2,016	0,582 1440 17	4191 70	0,566 7346 63	4499 65	9,984 5906 46	307 94
17	82 5631 87	4192 00	67 1846 27	4499 33	6214 40	307 32
18	82 9823 88	4192 30	67 2345 60	4499 01	6521 72	306 70
19	83 4016 18	4192 60	68 0844 60	4498 69	6828 42	306 10
20	83 8208 77	4192 89	68 5343 29	4498 37	7134 52	305 48
2,021	0,584 2401 66	4193 18	0,568 9841 66	4498 06	9,984 7440 00	304 87
22	84 6594 85	4193 48	69 4339 72	4497 74	7744 87	304 27
23	85 0788 32	4193 77	69 8837 46	4497 43	8049 14	303 66
24	85 4982 09	4194 06	70 3334 89	4497 11	8352 80	303 04
25	85 9176 16	4194 35	70 7832 00	4496 80	8655 84	302 45
2,026	0,586 3370 51	4194 65	0,571 2328 80	4496 49	9,984 8958 29	301 84
27	86 7565 16	4194 94	71 6825 29	4496 18	9260 13	301 25
28	87 1760 09	4195 23	72 1321 47	4495 87	9561 38	300 63
29	87 5955 32	4195 52	72 5817 33	4495 56	9862 01	300 05
30	88 0150 83	4195 81	73 0312 89	4495 25	9,985 0162 06	299 43
2,031	0,588 4346 64	4196 09	0,573 4808 13	4494 94	9,985 0461 49	298 85
32	88 8542 73	4196 38	73 9303 07	4494 63	0760 34	298 25
33	89 2739 11	4196 67	74 3797 70	4494 32	1058 59	297 64
34	89 6935 78	4196 96	74 8292 01	4494 05	1356 23	297 05
35	90 1132 74	4197 24	75 2786 02	4493 70	1653 28	296 45
2,036	0,590 5329 99	4197 53	0,575 7279 72	4493 39	9,985 1940 73	295 87
37	90 9527 52	4197 82	76 1773 12	4493 09	2245 60	295 27
38	91 3725 33	4198 10	76 6266 20	4492 78	2540 87	294 67
39	91 7923 44	4198 39	77 0758 98	4492 47	2835 54	294 09
40	92 2121 83	4198 68	77 5251 46	4492 17	3129 63	293 49
2,041	0,592 6320 51	4198 96	0,577 9743 63	4491 87	9,985 3423 12	292 92
42	93 0519 46	4199 24	78 4235 50	4491 57	3716 04	292 33
43	93 4718 70	4199 52	78 8727 07	4491 27	4008 37	291 73
44	93 8918 23	4199 80	79 3218 33	4490 97	4300 10	291 17
45	94 3118 03	4200 08	79 7709 30	4490 66	4591 27	290 58
2,046	0,594 7318 11	4200 36	0,580 2199 96	4490 36	9,985 4881 85	290 00
47	95 1518 48	4200 64	80 6690 33	4490 06	5171 85	289 42
48	95 5719 12	4200 92	81 1180 39	4489 77	5461 27	288 85
49	95 9920 04	4201 20	81 5670 16	4489 47	5750 12	288 25
50	96 4121 25	4201 48	82 0159 62	4489 17	6038 37	287 70

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,050	0,596 4121 25	4201 48	0,582 0159 62	4489 17	9,985 6038 37	287 70
2,051	0,596 8322 73	4201 76	0,582 4648 80	4488 87	9,985 6326 07	287 12
52	97 2524 48	4202 04	82 9137 67	4488 58	6613 19	286 54
53	97 6726 52	4202 31	83 3626 25	4488 28	6899 73	285 97
54	98 0928 83	4202 59	83 8114 53	4487 99	7185 70	285 40
55	98 5131 42	4292 87	84 2602 52	4487 69	7471 10	284 82
2,056	0,598 9334 29	4203 14	0,584 7090 21	4487 40	9,985 7755 92	284 26
57	99 3537 43	4203 42	85 1577 61	4487 11	8040 18	283 68
58	99 7740 85	4203 69	85 6064 71	4486 81	8323 86	283 12
59	0,600 1944 54	4203 97	86 0551 52	4486 52	8606 98	282 55
60	00 6148 51	4204 24	86 5038 04	4486 23	8889 53	281 98
2,061	0,601 0352 76	4204 52	0,586 9524 27	4485 94	9,985 9171 51	281 42
62	01 4557 27	4204 79	87 4010 20	4485 65	9452 93	280 86
63	01 8762 06	4205 06	87 8495 85	4445 36	9733 79	280 30
64	02 2967 12	4205 33	88 2981 21	4485 07	9,986 0014 09	279 74
65	02 7172 44	4205 60	88 7466 27	4484 78	0293 83	279 19
2,066	0,603 1378 04	4205 87	0,589 1951 06	4484 49	9,986 0573 02	278 62
67	03 5583 91	4206 14	89 6435 55	4484 21	0851 64	278 08
68	03 9790 04	4206 40	90 0919 76	4483 92	1129 72	277 53
69	04 3996 44	4206 67	90 5403 68	4483 63	1407 24	276 95
70	04 8203 12	4206 94	90 9887 31	4483 35	1684 19	276 41
2,071	0,605 2410 06	4207 21	0,591 4370 66	4483 06	9,986 1960 60	275 86
72	05 6617 26	4207 48	91 8853 72	4483 78	2236 46	275 30
73	06 0824 74	4207 74	92 3336 50	4482 49	2511 76	274 75
74	06 5032 48	4208 01	92 7818 99	4482 21	2786 51	274 20
75	06 9240 49	4208 27	93 2301 20	4481 92	3060 71	273 65
2,076	0,607 3448 76	4208 54	0,593 6783 12	4481 64	9,986 3334 36	273 10
77	07 7657 30	4208 80	94 1264 76	4481 36	3607 46	272 56
78	08 1866 11	4209 07	94 5746 11	4481 07	3880 00	272 00
79	08 6075 17	4209 33	95 0227 19	4480 79	4152 02	271 44
80	09 0284 51	4209 59	95 4707 97	4480 52	4423 46	270 93
2,081	0,609 4494 10	4209 86	0,595 9189 49	4480 24	9,986 4694 39	270 38
82	09 8703 96	4210 12	96 3668 73	4479 96	4964 77	269 84
83	10 2914 08	4210 38	96 8148 69	4479 68	5234 61	269 31
84	10 7124 46	4210 64	97 2628 38	4479 41	5503 92	268 76
85	11 1335 10	4210 90	97 7107 78	4479 13	5772 68	268 24
2,086	0,611 5545 99	4211 16	0,598 1586 91	4478 85	9,986 6040 92	267 69
87	11 9757 15	4211 42	98 6065 76	4478 58	6308 61	267 16
88	12 3968 57	4211 68	99 0544 34	4478 30	6575 77	266 62
89	12 8180 25	4211 93	99 5022 64	4478 03	6842 39	266 10
90	13 2392 18	4212 19	99 9500 67	4477 75	7108 49	265 50
2,091	0,613 6604 37	4212 45	0,600 3978 42	4477 48	9,986 7374 05	265 92
92	14 0816 83	4212 71	00 8455 90	4477 21	7639 07	264 51
93	14 5029 53	4212 97	01 2933 11	4477 94	7903 58	263 96
94	14 9242 50	4213 22	01 7410 04	4476 66	8167 54	263 45
95	15 3455 72	4213 48	02 1886 71	4476 39	8430 99	262 91
2,096	0,615 7669 20	4213 73	0,602 6363 10	4475 12	9,986 8693 90	262 39
97	16 1882 93	4213 99	03 0839 22	4475 85	8956 29	261 86
98	16 6096 92	4214 24	03 5315 07	4475 58	9218 15	261 35
99	17 0311 16	4214 50	03 9790 66	4475 31	9479 50	260 81
2,100	17 4525 66	4214 75	04 4265 97	4475 04	9740 31	260 29

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,100	0,617 4525 06	4214 75	0,604 4265 97	4475 04	9,986 9740 31	260 29
2,101	0,617 8740 41	4215 00	0,604 8741 01	4474 77	9,987 0000 60	259 77
02	18 2955 42	4215 26	05 3215 79	4474 51	0260 37	259 25
03	18 7170 67	4215 51	05 7690 29	4474 24	0519 62	258 73
04	19 1386 18	4215 76	06 2164 53	4473 98	0778 35	258 23
05	19 5601 93	4216 01	06 6638 51	4473 71	1036 58	257 70
2,106	0,619 9817 94	4216 25	0,607 1112 22	4473 45	9,987 1294 28	257 20
07	20 4034 19	4216 50	07 5585 67	4473 18	1551 48	256 68
08	20 8250 69	4216 75	08 0058 85	4472 92	1808 16	256 16
09	21 2467 45	4217 00	08 4531 77	4472 66	2064 32	255 66
10	21 6684 44	4217 25	08 9004 42	4472 39	2319 98	255 14
2,111	0,622 0901 69	4217 49	0,609 3476 81	4472 13	9,987 2575 12	254 64
12	22 5119 18	4217 74	09 7948 94	4471 87	2829 76	254 13
13	22 9336 92	4217 99	10 2420 81	4471 61	3083 89	253 61
14	23 3554 91	4218 23	10 6892 41	4471 34	3337 50	253 12
15	23 7773 14	4218 48	11 1363 76	4471 08	3590 62	252 61
2,116	0,624 1991 61	4218 72	0,611 5834 84	4470 82	9,987 3843 23	252 09
17	24 6210 34	4218 97	12 0305 66	4470 56	4095 32	251 60
18	25 0429 30	4219 21	12 4776 22	4470 30	4346 92	251 09
19	25 4648 51	4219 45	12 9246 52	4470 04	4598 01	250 58
20	25 8867 97	4219 70	13 3716 56	4469 79	4848 59	250 09
2,121	0,626 3087 66	4219 94	0,613 8186 34	4469 53	9,987 5098 68	249 59
22	26 7307 60	4220 18	14 2655 87	4469 27	5348 27	249 09
23	27 1527 79	4220 43	14 7125 15	4469 02	5597 36	248 60
24	27 5748 21	4220 67	15 1594 17	4468 76	5845 96	248 09
25	27 9968 88	4220 91	15 6062 93	4468 51	6094 05	247 60
2,126	0,628 4189 79	4221 15	0,616 0531 44	4468 26	9,987 6341 65	247 12
27	28 8410 93	4221 39	16 4999 69	4468 00	6588 76	246 61
28	29 2632 32	4221 63	16 9467 69	4467 75	6835 37	246 12
29	29 6853 95	4221 87	17 3935 44	4467 49	7081 49	245 63
30	30 1075 82	4222 11	17 8402 94	4467 24	7327 12	245 14
2,131	0,630 5297 92	4222 35	0,618 2870 18	4466 99	9,987 7572 26	244 64
32	30 9520 27	4222 58	18 7337 17	4466 74	7816 90	244 15
33	31 3742 85	4222 82	19 1803 90	4466 49	8061 05	243 67
34	31 7965 67	4223 06	19 6270 39	4466 24	8304 72	243 18
35	32 2188 73	4223 30	20 0736 63	4465 99	8547 90	242 68
2,136	0,632 6412 03	4223 53	0,620 5202 61	4465 74	9,987 8790 58	242 21
37	33 0635 56	4223 77	20 9668 35	4465 49	9032 79	241 72
38	33 4859 33	4224 01	21 4133 84	4465 24	9274 51	241 22
39	33 9083 34	4224 24	21 8599 07	4464 99	9515 73	240 75
40	34 3307 58	4224 48	22 3064 06	4464 74	9756 48	240 27
2,141	0,634 7532 06	4224 71	0,622 7528 81	4464 50	9,987 9996 75	239 78
42	35 1756 77	4224 94	23 1993 30	4464 25	9,988 0237 53	239 31
43	35 5981 71	4225 17	23 6457 55	4464 01	0475 84	238 84
44	36 0206 88	4225 41	24 0921 56	4463 76	0714 68	238 35
45	36 4432 29	4225 64	24 5385 32	4463 52	0953 03	237 89
2,146	0,636 8657 92	4225 87	0,624 9848 84	4463 27	9,988 1190 92	237 40
47	37 2883 79	4226 10	25 4312 11	4463 03	1428 32	236 94
48	37 7109 88	4226 33	25 8775 14	4462 79	1665 26	276 45
49	38 1336 21	4226 55	26 3237 92	4462 54	1901 71	236 00
50	38 5562 76		26 7700 47		2137 71	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,150	0,638 5562 76	4226 78	0,626 7700 47	4462 30	9,988 2137 71	235 51
2,151	0,638 9789 55	4227 01	0,627 2162 77	4462 06	9,988 2373 22	235 05
52	39 4016 56	4227 24	27 6624 83	4461 82	2608 27	234 59
53	39 8243 79	4227 46	28 1086 65	4461 58	2842 86	234 11
54	40 2471 26	4227 69	28 5548 23	4461 34	3076 97	233 64
55	40 6698 95	4227 92	29 0009 56	4461 10	3310 61	233 19
2,156	0,641 0926 86	4228 14	0,629 4470 66	4460 86	9,988 3543 80	232 72
57	41 5155 00	4228 37	29 8931 52	4460 62	3776 52	232 24
58	41 9383 37	4228 59	30 3392 13	4460 38	4008 76	231 79
59	42 3611 96	4228 82	30 7852 51	4460 14	4240 55	231 32
60	42 7840 78	4229 05	31 2312 65	4459 90	4471 87	230 85
2,161	0,643 2069 83	4229 28	0,631 6772 55	4459 67	9,988 4702 72	230 39
62	43 6299 11	4229 50	32 1232 22	4459 43	4933 11	229 93
63	44 0528 61	4229 73	32 5691 65	4459 20	5163 04	229 46
64	44 4758 34	4229 95	33 0150 84	4458 96	5392 50	229 02
65	44 8988 29	4230 17	33 4609 81	4458 73	5621 52	228 55
2,166	0,645 3218 46	4230 39	0,633 9068 53	4458 49	9,988 5850 07	228 10
67	45 7448 85	4230 62	34 3527 02	4458 26	6078 17	227 64
68	46 1679 47	4230 84	34 7985 28	4458 02	6305 81	227 20
69	46 5910 30	4231 06	35 2443 31	4457 79	6533 01	266 73
70	47 0141 36	4231 28	35 6901 10	4457 56	6759 74	226 27
2,171	0,647 4372 64	4231 50	0,636 1358 65	4457 33	9,988 6986 01	225 83
72	47 8604 14	4231 72	36 5815 98	4457 10	7211 84	225 38
73	48 2835 86	4231 94	37 0273 08	4456 86	7437 22	224 93
74	48 7067 79	4232 16	37 4729 94	4456 63	7662 15	224 47
75	49 1299 95	4232 37	37 9186 57	4456 40	7886 62	224 04
2,176	0,649 5532 32	4232 59	0,638 3642 98	4456 17	9,988 8110 66	223 57
77	49 9764 92	4232 81	38 8099 15	4455 94	8334 23	223 13
78	50 3997 73	4233 03	39 2555 09	4455 72	8557 36	222 70
79	50 8230 75	4233 25	39 7010 81	4455 49	8780 06	222 23
80	51 2464 00	4233 46	40 1466 29	4455 26	9002 29	221 80
2,181	0,651 6697 46	4233 68	0,640 5921 55	4455 03	9,988 9224 09	221 35
82	52 0931 14	4233 90	41 0376 58	4454 80	9445 44	220 90
83	52 5165 04	4234 11	41 4831 38	4454 58	9666 34	220 47
84	52 9399 15	4234 33	41 9285 96	4454 35	9886 81	220 03
85	53 3633 47	4234 54	42 3740 31	4454 13	9,989 0106 84	219 59
2,186	0,653 7868 01	4234 75	0,642 8194 44	4453 90	9,989 0326 43	219 15
87	54 2102 76	4234 97	43 2648 34	4453 68	0545 58	218 71
88	54 6337 73	4235 18	43 7102 02	4453 46	0764 29	218 29
89	55 0572 90	4235 39	44 1555 48	4453 23	0982 58	217 84
90	55 4808 29	4235 60	44 6008 71	4453 01	1200 42	217 40
2,191	0,655 9043 90	4235 81	0,645 0461 72	4452 79	9,989 1417 82	216 97
92	56 3279 71	4236 03	45 4914 50	4452 56	1634 79	216 54
93	56 7515 74	4236 24	45 9367 07	4452 34	1851 33	216 11
94	57 1751 97	4236 45	46 3819 41	4452 12	2067 44	215 67
95	57 5988 42	4236 66	46 8271 53	4451 90	2283 11	215 24
2,196	0,658 0225 08	4236 87	0,647 2723 43	4451 68	9,989 2498 35	214 82
97	58 4461 94	4237 08	47 7175 11	4451 46	2713 17	214 37
98	58 8699 02	4237 29	48 1626 56	4451 24	2927 54	213 90
99	59 2936 30	4237 49	48 6077 80	4451 02	3141 50	213 52
2,200	59 7173 80		49 0528 82		3355 02	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,200	0,659 7173 80	4237 70	0,649 0528 52	4450 81	9,989 3355 02	213 11
2,201	0,660 1411 50	4237 91	0,649 4979 63	4450 59	9,989 3568 13	212 68
02	60 5649 41	4238 12	49 9430 22	4450 37	3780 81	212 25
03	60 9887 53	4238 33	50 3880 59	4450 16	3993 06	211 83
04	61 4125 86	4238 53	50 8330 75	4449 94	4204 89	211 40
05	61 8364 39	4238 38	51 2780 68	4449 72	4416 29	210 99
2,206	0,662 2603 13	4238 94	0,651 7230 41	4449 50	9,989 4627 28	210 56
07	62 6842 07	4239 15	52 1679 91	4449 29	4837 84	210 14
08	63 1081 22	4239 35	52 6129 20	4449 07	5047 98	209 72
09	63 5320 57	4239 56	53 0578 27	4448 86	5257 70	209 29
10	63 9560 13	4239 76	53 5027 12	4448 64	5466 99	208 88
2,211	0,664 3799 89	4239 97	0,653 9475 76	4448 42	9,989 5675 87	208 45
12	64 8039 86	4240 17	54 3924 19	4448 21	5884 32	208 06
13	65 2280 02	4240 37	54 8372 40	4448 00	6092 38	207 62
14	65 6520 39	4240 57	55 2820 39	4447 78	6300 00	207 20
15	66 0760 97	4240 78	55 7268 17	4447 57	6507 20	206 80
2,216	0,666 5001 74	4240 98	0,656 1715 74	4447 36	9,989 6714 00	206 38
17	66 9242 72	4241 18	56 6163 10	4447 14	6920 38	205 96
18	67 3483 90	4241 38	57 0610 24	4446 93	7126 34	205 55
19	67 7725 28	4241 58	57 5057 17	4446 72	7331 89	205 14
20	68 1966 86	4241 78	57 9503 89	4446 52	7537 03	204 74
2,221	0,668 6208 64	4241 98	0,658 3950 41	4446 31	9,989 7741 77	204 33
22	69 0450 62	4242 18	58 8396 72	4446 10	7946 10	203 91
23	69 4692 81	4242 38	59 2842 82	4445 90	8150 01	203 52
24	69 8935 19	4242 58	59 7288 72	4445 69	8353 53	203 10
25	70 3177 77	4242 78	60 1734 40	4445 48	8556 63	202 71
2,226	0,670 7420 54	4242 97	0,660 6179 88	4445 27	9,989 8759 34	202 30
27	71 1663 52	4243 17	61 0625 16	4445 07	8961 64	202 90
28	71 5906 69	4243 37	61 5070 23	4444 86	9163 54	201 49
29	72 0150 06	4243 57	61 9515 09	4444 66	9365 03	201 08
30	72 4393 63	4243 76	62 3959 74	4444 45	9566 11	200 69
2,231	0,672 8637 39	4243 96	0,662 8404 19	4444 24	9,989 9766 80	200 29
32	73 2881 34	4244 15	63 2848 43	4444 04	9967 09	199 88
33	73 7125 50	4244 35	63 7292 47	4443 83	9,990 0166 97	199 49
34	74 1369 84	4244 54	64 1736 30	4443 63	0366 46	199 09
35	74 5614 38	4244 74	64 6179 93	4443 42	0565 55	198 69
2,236	0,674 9859 12	4244 93	0,665 0623 36	4443 22	9,990 0764 24	198 28
37	75 4104 05	4245 12	65 5066 57	4443 02	0962 52	197 90
38	75 8349 17	4245 32	65 9509 59	4442 81	1160 42	197 49
39	76 2594 49	4245 51	66 3952 40	4442 61	1357 91	197 10
40	76 6840 00	4245 70	66 8395 01	4442 41	1555 01	196 71
2,241	0,677 1085 70	4245 90	0,667 2837 42	4442 21	9,990 1751 72	196 31
42	77 5331 60	4246 09	67 7279 63	4442 01	1948 03	195 93
43	77 9577 68	4246 28	68 1721 64	4441 81	2143 96	195 54
44	78 3823 96	4246 47	68 6163 46	4441 61	2339 50	195 14
45	78 8070 43	4246 66	69 0605 07	4441 41	2534 64	194 75
2,246	0,679 2317 09	4246 85	0,669 5046 48	4441 22	9,990 2729 39	194 37
47	79 6563 94	4247 04	69 9487 70	4441 02	2923 76	193 97
48	80 0810 98	4247 33	70 3928 71	4440 82	3117 73	193 59
49	80 5058 21	4247 42	70 8369 53	4440 62	3311 32	193 20
50	80 9305 63		71 2810 15		3504 52	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,250	0,680 9305 63	4247 61	0,671 2810 15	4440 42	9,990 3504 52	192 81
2,251	0,681 3553 24	4247 80	0,671 7250 57	4440 22	9 990 3697 33	192 44
52	81 7801 03	4247 99	72 1690 80	4440 03	3889 77	192 04
53	82 2049 02	4248 17	72 6130 83	4439 83	4081 81	191 66
54	82 6297 19	4248 36	73 0570 66	4439 64	4273 47	191 27
55	83 0545 55	4248 55	73 5010 29	4439 44	4464 74	190 89
2,256	0,683 4794 10	4248 73	0,673 9449 73	4439 25	9,990 4655 63	190 52
57	83 9042 83	4248 92	74 3888 98	4439 05	4846 15	190 13
58	84 3291 75	4279 10	74 8328 03	4438 86	5036 28	189 75
59	84 7540 86	4249 29	75 2766 89	4438 66	5226 03	189 38
60	85 1790 14	4249 48	75 7205 55	4438 47	5415 41	188 99
2,261	0,685 6039 62	4249 66	0,676 1644 02	4438 28	9,990 5604 40	188 61
62	86 0289 28	4249 85	76 6082 29	4438 08	5793 01	188 28
63	86 4539 13	4250 03	77 0520 38	4437 89	5981 25	187 86
64	86 8789 16	4250 21	77 4958 27	4437 70	6169 11	187 49
65	87 3039 37	4250 40	77 9395 97	4437 51	6356 60	187 12
2,266	0,687 7289 76	4250 58	0,678 3833 48	4437 32	9,990 6543 72	186 71
67	88 1540 34	4250 76	78 8270 80	4437 13	6730 46	186 34
68	88 5791 10	4250 94	79 2707 93	4436 94	6916 83	185 98
69	89 0042 05	4251 13	79 7144 86	4436 75	7102 81	185 63
70	89 4293 17	4251 31	80 1581 61	4436 56	7288 44	185 25
2,271	0,689 8544 48	4251 49	0,680 6018 17	4436 37	9,990 7473 69	184 88
72	90 2795 97	4251 67	81 0454 54	4436 18	7658 57	184 51
73	90 7047 64	4251 85	81 4890 72	4435 99	7843 08	184 15
74	91 1299 48	4252 03	81 9326 71	4435 81	8027 23	183 78
75	91 5551 51	4252 21	82 3762 52	4435 62	8211 01	183 41
2,276	0,691 9803 72	4252 39	0,682 8198 14	4435 43	9,990 8394 42	183 04
77	92 4056 11	4252 57	83 2633 57	4435 24	8577 46	182 68
78	92 8308 67	4252 75	83 7068 81	4435 06	8760 14	182 31
79	93 2561 42	4252 92	84 1503 87	4434 87	8942 45	181 95
80	93 6814 34	4253 10	84 5938 74	4434 68	9124 40	181 57
2,281	0,694 1067 45	4253 28	0,685 0373 42	4434 50	9,990 9305 97	181 22
82	94 5320 73	4253 46	85 4807 92	4434 31	9487 19	180 86
83	94 9574 18	4253 63	85 9242 23	4434 13	9668 05	180 49
84	95 3827 82	4253 81	86 3676 36	4433 95	9848 54	980 14
85	95 8081 63	4253 99	86 8110 31	4433 76	9,991 0028 68	179 78
2,286	0,696 2335 61	4254 16	0,687 2544 07	4433 58	9,991 0208 46	179 42
87	96 6589 77	4254 34	87 6977 65	4433 40	0387 88	179 06
88	97 0844 11	4254 51	88 1411 05	4433 21	0566 94	178 69
89	97 5098 63	4254 69	88 5844 26	4433 03	0745 63	178 35
90	97 9353 31	4254 86	89 0277 29	4432 85	0923 98	177 98
2,291	0,698 3608 18	4255 04	0,689 4710 14	4432 67	9,991 1101 96	177 64
92	98 7863 21	4255 21	89 9142 81	4432 49	1279 60	177 26
93	99 2118 43	4255 39	90 3575 29	4432 31	1456 86	176 93
94	99 6373 81	4255 56	90 8007 60	4432 13	1633 79	176 56
95	0,700 0629 37	4255 73	91 2439 72	4431 95	1810 35	176 22
2,296	0,700 4885 10	4255 90	0,691 6871 67	4431 77	9,991 1986 57	175 86
97	00 9141 01	4256 08	92 1303 44	4431 59	2162 43	175 52
98	01 3397 08	4256 25	92 5735 03	4431 41	2337 95	175 16
99	01 7653 33	4256 42	93 0166 44	4431 23	2513 11	174 81
2,300	02 1909 75		93 4597 67		2687 92	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,300	0,702 1909 75	4256 59	0,693 4597 67	4431 05	9,991 2687 92	174 47
2,301	0,702 6166 34	4256 76	6,693 9028 73	4430 87	9,991 2862 39	174 11
02	03 0423 10	4256 93	94 3459 60	4430 70	3036 50	173 77
03	03 4680 03	4257 10	94 7890 30	4430 52	3210 27	173 42
04	03 8937 13	4257 27	95 2320 82	4430 34	3383 69	173 07
05	04 3194 40	4257 44	95 6751 16	4430 17	3556 76	172 73
2,306	0,704 7451 84	4257 61	0,696 1181 33	4429 99	9,991 3729 49	172 38
07	05 1709 45	4257 78	96 5611 32	4429 82	3901 87	172 04
08	05 5967 23	4257 95	97 0041 14	4429 64	4073 91	171 70
09	06 0225 17	4258 11	97 4470 78	4429 47	4245 61	171 34
10	06 4483 29	4258 28	97 8900 24	4429 29	4416 95	171 01
2,311	0,706 8741 57	4258 45	0,698 3329 53	4429 12	9,991 4587 96	170 67
12	07 3000 02	4258 62	98 7758 65	4428 94	4758 63	170 33
13	07 7258 63	4258 78	99 2187 59	4428 77	4928 96	169 98
14	08 1517 42	4258 95	99 6616 36	4428 59	5098 94	169 64
15	08 5776 37	4259 12	0,700 1044 95	4428 42	5268 58	169 30
2,316	0,709 0035 49	4259 29	0,700 5473 37	4428 25	9,991 5437 88	168 97
17	09 4294 77	4259 45	00 9901 62	4428 08	5606 85	168 63
18	09 8554 22	4259 62	01 4329 70	4427 90	5775 48	168 28
19	10 2813 84	4259 79	01 8757 60	4427 73	5943 76	167 94
20	10 7073 63	4259 94	02 3185 33	4427 56	6111 70	167 61
2,321	0,711 1333 58	4260 11	0,702 7612 89	4427 39	9,991 6279 31	167 29
22	11 5593 68	4260 27	03 2040 28	4427 22	6446 60	166 95
23	11 9853 96	4260 44	03 6467 51	4427 05	6613 55	166 62
24	12 4114 39	4260 60	04 0894 56	4426 88	6780 17	166 28
25	12 8374 99	4260 76	04 5321 44	4426 72	6946 45	165 96
2,326	0,713 2635 75	4260 93	0,704 9748 16	4426 55	9,991 7112 41	165 61
27	13 6896 68	4261 09	05 4174 70	4426 38	7278 02	165 29
28	14 1157 77	4261 25	05 8601 08	4426 21	7443 31	164 96
29	14 5419 02	4261 41	06 3027 29	4426 04	7608 27	164 63
30	14 9680 43	4261 57	06 7453 33	4425 87	7772 90	164 30
2,331	0,715 3942 00	4261 73	0,707 1879 20	4425 71	9,991 7937 20	163 99
32	15 8203 73	4261 89	07 6304 92	4425 54	8101 19	163 64
33	16 2465 63	4262 05	08 0730 46	4425 37	8264 83	163 32
34	16 6727 68	4262 21	08 5155 83	4425 20	8428 15	162 98
35	17 0989 90	4262 37	08 9581 03	4425 04	8591 13	162 67
2,336	0,717 5252 27	4262 53	0,709 4006 07	4424 87	9,991 8753 80	162 34
37	17 9514 80	4262 69	09 8430 94	4424 71	8916 14	162 01
38	18 3777 49	4262 85	10 2855 64	4424 54	9078 15	161 68
39	18 8040 34	4263 01	10 7280 17	4424 37	9239 83	161 37
40	19 2303 35	4263 17	11 1704 55	4424 21	9401 20	161 04
2,341	0,719 6566 52	4263 33	0,711 6128 76	4424 05	9,991 9562 24	160 73
42	20 0829 84	4263 48	12 0552 81	4423 89	9722 97	160 39
43	20 5093 33	4263 64	12 4976 69	4423 72	9883 36	160 09
44	20 9356 97	4263 80	12 9400 42	4423 56	9,992 0043 45	159 76
45	21 3620 76	4263 96	13 3823 97	4423 40	0203 21	159 44
2,346	0,721 7884 72	4264 11	0,713 8247 37	4423 23	9,992 0362 65	159 12
47	22 2148 83	4264 27	14 2670 60	4423 07	0521 77	158 81
48	22 6413 10	4264 43	14 7093 68	4422 91	0680 58	158 48
49	23 0677 53	4264 58	15 1516 59	4422 75	0839 06	158 17
50	23 4942 11		15 5939 34		0997 23	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,350	0,723 4942 11	4264 74	0,715 5939 34	4422 59	9,992 0997 23	157 85
2,351	0,723 9206 84	4262 89	0,716 0361 92	4422 43	9,992 1155 08	157 54
52	24 3471 73	4266 04	16 4784 35	4422 2	1312 62	157 23
53	24 7736 77	4205 20	16 9206 62	4422 11	1469 85	156 91
54	25 2001 97	4265 35	17 3628 73	4421 95	1626 76	156 60
55	25 6267 32	4265 51	17 8050 68	4421 97	1783 36	156 28
2,356	0,726 0532 83	4265 66	0,718 2472 47	4421 64	9,992 1939 64	155 99
57	26 4798 48	4265 81	18 6894 11	4421 48	2095 63	155 65
58	26 9064 30	4265 96	19 1315 58	4421 32	2251 28	155 36
59	27 3330 26	4266 12	19 5736 90	4421 16	2406 64	155 06
60	27 7596 37	4266 27	20 0158 07	4421 00	2561 70	154 72
2,361	0,728 1862 64	4266 42	0,720 4579 06	4420 84	9,992 2716 42	154 42
62	28 6129 06	4266 57	20 8999 99	4420 68	2870 84	154 11
63	29 0395 64	4266 72	21 3420 59	4420 53	3024 95	153 80
64	29 4662 36	4266 87	21 7841 11	4420 37	3178 75	153 50
65	29 8929 23	4267 02	22 2261 48	4420 21	3332 25	153 19
2,366	0,730 3196 26	4267 17	0,722 6681 70	4420 05	9,992 3485 44	152 88
67	30 7463 43	4267 32	23 1101 75	4419 90	3638 32	152 58
68	31 1730 76	4267 47	23 5521 66	4419 75	3790 90	152 27
69	31 5998 23	4267 62	23 9941 40	4419 59	3943 17	151 98
70	32 0265 85	4267 77	24 4361 00	4419 44	4095 15	151 65
2,371	0,732 4533 63	4267 92	0,724 8780 43	4419 29	9,992 4246 80	151 37
72	32 8801 55	4268 07	25 3199 72	4419 13	4398 17	151 06
73	33 3069 62	4268 22	25 7618 85	4418 98	4549 23	150 76
74	33 7337 84	4268 37	26 2037 83	4418 83	4699 99	150 46
75	34 1606 21	4268 52	26 6456 66	4418 67	4850 45	150 16
2,376	0,734 5874 72	4268 66	0,727 0875 33	4418 52	9,992 5000 61	149 85
77	35 0143 39	4268 81	27 5293 85	4418 37	5150 46	149 56
78	35 4412 20	4268 96	27 9712 22	4418 22	5300 02	149 26
79	35 8681 16	4269 11	28 4130 44	4418 07	5449 28	148 96
80	36 2950 27	4269 25	28 8548 51	4417 91	5598 24	148 66
2,381	0,736 7219 52	4269 40	0,729 2966 42	4417 76	9,992 5746 90	148 36
82	37 1488 92	4269 54	29 7384 18	4417 61	5895 26	148 07
83	37 5758 46	4269 68	30 1801 79	4417 46	6043 33	147 78
84	38 0028 14	4269 83	30 6219 25	4417 31	6191 11	147 47
85	38 4297 98	4269 97	31 0636 56	4417 16	6338 58	147 19
2,386	0,738 8567 95	4270 12	0,731 5053 72	4417 01	9,992 6485 77	146 90
87	39 2838 07	4270 26	31 9470 74	4416 86	6632 67	146 59
88	39 7108 34	4270 40	32 3887 60	4416 71	6779 26	146 31
89	40 1378 74	4270 55	32 8304 31	4416 57	6925 57	146 01
90	40 5649 30	4270 69	33 2720 88	4416 42	7071 58	145 72
2,391	0,740 9919 99	4270 84	0,733 7137 29	4416 27	9,992 7217 30	145 43
92	41 4190 83	4270 98	34 1553 56	4416 12	7362 73	145 14
93	41 8461 81	4271 12	34 5969 68	4415 97	7507 87	144 85
94	42 2732 93	4271 27	35 0385 65	4415 82	7652 72	144 55
95	42 7004 20	4271 41	35 4801 47	4415 68	7797 27	144 27
2,396	0,743 1275 61	4271 55	0,735 9217 15	4415 53	9,992 7941 54	143 98
97	43 5547 16	4271 70	36 3632 68	4415 38	8085 52	143 68
98	43 9818 86	4271 48	36 8048 06	4415 24	8229 20	143 40
99	44 4090 70	4271 98	37 2463 30	4415 09	8372 60	143 11
2,400	44 8362 68		37 6878 39		8515 71	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,400	0,744 8362 68	4272 11	0,737 6878 39	4414 95	9,992 8515 71	142 84
2,401	0,745 2634 79	4272 26	0,738 1293 34	4414 80	9,992 8658 55	142 54
02	45 6907 05	4272 40	38 5708 14	4414 66	8801 09	142 26
03	46 1179 45	4272 54	39 0122 80	4414 51	8943 35	141 97
04	46 5451 99	4272 67	39 4537 31	4414 37	9085 32	141 70
05	46 9724 66	4272 82	39 8951 68	4414 23	9227 02	141 41
2,406	0,747 3997 48	4272 95	0,740 3365 91	4414 08	9,992 9368 43	141 13
07	47 8270 43	4273 09	40 7779 99	4413 94	9509 56	140 86
08	48 2543 52	4273 23	41 2193 94	4413 80	9650 42	140 56
09	48 6816 75	4273 37	41 6607 73	4413 66	9790 98	140 29
10	49 1090 12	4273 51	42 1021 39	4413 51	9931 27	140 00
2,411	0,749 5363 63	4273 65	0,742 5434 90	4413 37	9,993 0071 27	139 72
12	49 9637 28	4273 78	42 9848 27	4413 23	0210 99	139 45
13	50 3911 06	4273 92	43 4261 50	4413 09	0350 44	139 17
14	50 8184 98	4274 05	43 8674 69	4412 94	0489 61	138 89
15	51 2459 03	4274 19	44 3087 53	4412 80	4628 50	138 61
2,416	0,751 6733 22	4274 33	0,744 7500 33	4412 66	9,993 0767 11	138 33
17	52 1007 55	4274 47	45 1912 99	4412 52	0905 44	138 05
18	52 5282 02	4274 60	45 6325 51	4412 38	1043 49	137 78
19	52 9556 62	4274 73	46 0737 89	4412 24	1181 27	137 50
20	53 3831 35	4274 87	46 5150 12	4412 10	1318 77	137 23
2,421	0,753 8106 22	4275 01	0,746 9562 22	4411 96	9,993 1456 00	136 95
22	54 2381 23	4275 14	47 3974 18	4411 82	1592 95	136 69
23	54 6656 37	4275 28	47 8386 01	4411 68	1729 64	136 40
24	55 0931 65	4275 41	48 2797 69	4411 55	1866 04	136 13
25	55 5207 06	4275 55	48 7209 23	4411 41	2002 17	135 86
2,426	0,755 9482 61	4275 68	0,749 1620 64	4411 27	9,993 2138 03	135 59
27	56 3758 29	4275 81	49 6031 91	4411 13	2273 62	135 32
28	56 8034 10	4275 95	50 0443 04	4410 99	2408 94	135 05
29	57 2310 04	4276 08	50 4854 03	4410 86	2543 99	134 78
30	57 6586 12	4276 21	50 9264 89	4410 72	2678 77	134 51
2,431	0,758 0862 33	4276 34	0,751 3675 61	4410 58	9,993 2813 28	134 24
32	58 5138 68	4276 47	51 8086 20	4410 45	2947 52	133 97
33	58 9415 15	4276 60	52 2496 64	4410 32	3081 49	133 71
34	59 3691 76	4276 74	52 6906 96	4410 18	3215 20	133 45
35	59 7968 49	4276 87	53 1317 14	4410 05	3348 65	133 17
2,436	0,760 2245 36	4277 00	0,753 5727 18	4409 91	9,993 3481 82	132 93
37	60 6522 35	4277 13	54 0137 10	4409 78	3614 75	132 64
38	61 0799 48	4277 26	54 4546 87	4409 64	3747 39	132 39
39	61 5076 74	4277 39	54 8956 52	4409 51	3879 78	132 12
40	61 9354 12	4277 52	55 3366 02	4409 37	4011 90	131 85
2,441	0,762 3631 64	4277 65	0,755 7775 39	4409 24	9,993 4143 75	131 59
42	62 7909 29	4277 78	56 2184 63	4409 10	4275 34	131 32
43	63 2187 07	4277 91	56 6593 73	4408 97	4406 66	131 06
44	63 6464 98	4278 04	57 1002 70	4408 84	4537 72	130 80
45	64 0743 02	4278 17	57 5411 54	4408 71	4668 52	310 53
2,446	0,764 5021 19	4278 29	0,757 9820 24	4408 57	9,993 4799 05	130 29
47	64 9299 48	4278 42	58 4228 82	4408 44	4929 34	130 02
48	65 3577 90	4278 55	58 8637 26	4408 31	5059 36	129 76
49	65 7856 45	4278 68	59 3045 57	4408 18	5189 12	129 49
50	66 2135 13		59 7453 74		5318 61	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,450	0,766 2135 13	4278 81	0,769 7453 74	4408 05	9,993 5318 61	129 24
2,451	0,766 6413 94	4278 93	0,760 1861 79	4407 92	9,993 5447 85	128 99
52	67 0692 87	4279 05	60 6269 71	4407 78	5576 84	128 72
53	67 4971 93	4279 19	61 0677 49	4407 65	5705 56	128 47
54	67 9251 11	4279 31	61 5085 14	4407 52	5834 03	128 20
55	68 3530 43	4279 44	61 9492 66	4407 39	5962 23	127 97
2,456	0,768 7809 86	4279 57	0,762 3900 06	4407 26	9,993 6090 20	127 69
57	69 2089 43	4279 69	62 8307 32	4407 13	6217 89	127 44
58	69 6369 12	4279 82	63 2714 45	4407 00	6345 33	127 18
59	70 0648 94	4279 95	63 7121 45	4406 87	6472 51	126 92
60	70 4928 89	4280 07	64 1528 32	4406 75	6599 43	126 68
2,461	0,770 9208 96	4280 19	0,764 5935 07	4406 62	9,993 6726 11	126 42
62	71 3489 15	4280 32	65 0341 68	4406 49	6852 53	126 17
63	71 7769 47	4280 44	65 4748 17	4406 36	6978 70	125 92
64	72 2049 91	4280 56	65 9154 53	4406 23	7104 62	125 68
65	72 6330 47	4280 69	66 3560 77	4406 11	7230 30	125 41
2,466	0,773 0611 16	4280 81	0,766 7966 87	4405 98	9,993 7355 71	125 17
67	73 4891 97	4280 93	67 2372 85	4405 85	7480 88	124 92
68	73 9172 90	4281 06	67 6778 70	4405 73	7605 80	124 67
69	74 3453 96	4281 18	68 1184 43	4405 60	7730 47	124 42
70	74 7735 14	4281 30	68 5590 03	4405 47	7854 89	124 17
2,471	0,775 2016 44	4281 43	0,768 9995 50	4405 35	9,993 7979 06	123 91
72	75 6297 87	4281 55	69 4400 84	4405 22	8102 68	123 68
73	76 0579 42	4281 67	69 8806 07	4405 10	8226 05	123 42
74	76 4861 09	4281 79	70 3211 16	4404 97	8350 07	123 19
75	76 9142 88	4281 91	70 7616 14	4404 85	8473 26	122 93
2,476	0,777 3424 79	4282 04	0,771 2020 98	4404 73	9,993 8596 19	122 69
77	77 7706 83	4282 16	71 6425 71	4404 60	8718 88	122 45
78	78 1988 98	4282 28	72 0830 31	4404 48	8841 33	122 20
79	78 6271 26	4282 40	72 5234 79	4404 35	8963 53	121 96
80	79 0553 65	4282 52	72 9639 14	4404 23	9085 49	121 71
2,481	0,779 4836 17	4282 64	0,773 4043 37	4404 10	9,993 9207 20	121 47
82	79 9118 80	4282 75	73 8447 47	4403 98	9328 67	121 22
83	80 3401 56	4282 87	74 2851 45	4403 86	9449 89	120 99
84	80 7684 43	4282 99	74 7255 31	4403 73	9570 88	120 74
85	81 1967 42	4283 11	75 1659 04	4403 61	9691 62	120 50
2,486	0,781 6250 53	4283 23	0,775 6062 65	4403 49	9,993 9812 12	120 26
87	82 0533 76	4283 35	76 0466 14	4403 37	9932 38	120 02
88	82 4817 11	4283 47	76 4869 51	4403 25	9,994 0052 40	119 78
89	82 9100 58	4283 59	76 9272 76	4403 12	0172 18	119 53
90	83 3384 17	4283 70	77 3675 88	4403 00	0291 71	119 30
2,491	0,783 7667 87	4283 82	0,777 8078 88	4402 88	9,994 0411 01	119 07
92	84 1951 69	4283 94	78 2481 77	4402 76	0530 08	118 82
93	84 6235 63	4284 06	78 6884 53	4402 64	0648 90	118 58
94	85 0519 69	4284 18	79 1287 17	4402 52	0767 48	118 38
95	85 4803 86	4284 29	79 5689 69	4402 41	0885 83	118 12
2,496	0,785 9088 15	4284 41	0,780 0092 10	4402 29	9,994 1003 95	117 88
97	86 3372 56	4284 52	80 4494 39	4402 17	1121 83	117 64
89	86 7657 08	4284 64	80 8896 55	4402 06	1239 47	117 41
99	87 1941 72	4284 75	81 3298 60	4401 93	1356 88	117 17
2,500	87 6226 48		81 7700 53		1474 05	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,500	0,787 6226 48	4284 87	0,781 7760 53	4401 81	9,994 1474 05	116 94
2,501	0,788 0511 35	4284 98	0782, 2102 34	4401 69	9,994 1590 99	116 70
02	88 4796 33	4285 10	82 6504 02	4401 57	1707 69	116 47
03	88 9081 43	4285 21	83 0905 59	4401 45	1824 16	116 24
04	89 3366 65	4285 33	83 5307 05	4401 33	1940 40	116 01
05	89 7651 97	4285 44	83 9708 38	4401 22	2056 41	115 77
2,506	0,790 1937 42	4285 56	0,784 4109 60	4401 10	9,994 2272 18	115 55
07	90 6222 97	4285 67	84 8510 70	4400 98	2387 73	115 30
08	91 0508 65	4285 79	85 2911 68	4400 87	2403 03	115 09
09	91 4794 43	4285 90	85 7312 55	4400 75	2518 12	114 84
10	91 9080 33	4286 01	86 1713 29	4400 63	2632 96	114 63
2,511	0,792 3366 34	4286 13	0,786 6113 93	4400 62	9,994 2747 59	114 38
12	92 7652 47	4286 24	87 0514 44	4400 40	2861 97	114 18
13	93 1938 70	4286 35	87 4914 85	4400 29	2976 15	113 92
14	93 6225 06	4286 46	87 9315 13	4400 17	3090 07	113 72
15	94 0511 52	4286 58	88 3715 31	4400 06	3203 79	113 48
2,516	0,794 4798 09	4286 69	0,788 8115 36	4399 94	9,994 3317 27	113 26
17	94 9084 78	4286 80	89 2515 31	4399 83	3430 53	113 03
18	95 3371 58	4286 91	89 6915 14	4399 72	3543 56	112 80
19	95 7658 49	4287 02	90 1314 85	4399 60	3656 36	112 60
20	96 1945 50	4287 13	90 5714 46	4399 48	3768 96	112 34
2,521	0,796 6232 64	4287 24	0,791 0113 94	4399 37	9,994 3881 30	112 13
22	97 0519 88	4287 35	91 4513 31	4399 26	3993 43	111 91
23	97 4807 23	4287 46	91 8912 57	4399 15	4105 34	111 68
24	97 9094 69	4287 57	92 3311 71	4399 03	4217 02	111 47
25	98 3382 26	4287 68	92 7710 75	4398 92	4328 49	111 23
2,526	0,798 7669 95	4287 79	0,793 2109 67	4398 81	9,994 4439 72	111 01
27	99 1957 74	4287 90	93 6508 47	4398 70	4550 73	110 80
28	99 6245 64	4288 01	94 0907 17	4398 58	4661 53	110 57
29	0,800 0533 65	4288 12	94 5305 75	4398 47	4772 10	110 35
30	00 4821 77	4288 23	94 9704 22	4398 36	4882 45	110 13
2,531	0,800 9110 00	4288 34	0,795 4102 58	4398 25	9,994 4992 58	109 91
32	01 3398 34	4288 45	95 8500 83	4398 14	5102 49	109 68
33	01 7686 79	4288 56	96 2898 96	4398 03	5212 17	109 48
34	02 1975 34	4288 67	96 7296 99	4397 91	5321 65	109 24
35	02 6264 01	4288 77	97 1694 90	4397 80	5430 89	108 03
2,536	0,803 0552 78	4288 88	0,797 6092 70	4397 69	9,994 5539 92	108 81
37	03 4841 66	4288 99	98 0490 39	4397 58	5648 73	108 59
38	03 9130 65	4289 10	98 4887 97	4397 47	5757 32	108 38
39	04 3419 74	4289 20	98 9285 44	4397 36	5865 70	108 16
40	04 7708 94	4289 31	99 3682 80	4397 25	5973 86	107 95
2,541	0,805 1998 25	4289 41	0,799 8080 06	4397 14	9,994 6081 81	107 73
42	05 6287 66	4289 52	0,800 2477 20	4397 04	6189 54	107 52
43	06 0577 18	4289 63	00 6874 24	4396 93	6297 06	107 29
44	06 4866 81	4289 73	01 1271 16	4396 82	6404 35	107 09
45	06 9156 54	4289 84	01 5667 98	4396 71	6511 44	106 87
2,546	0,807 3446 38	4289 94	0,802 0064 69	4396 60	9,994 6618 31	106 66
47	07 7736 32	4290 05	02 4461 29	4396 49	6724 97	106 45
48	08 2026 37	4290 15	02 8857 79	4396 39	6831 42	106 23
49	08 6316 52	4290 26	03 3254 17	4396 28	6937 65	106 02
50	09 0606 78		03 7650 45		7043 67	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,550	0,809 0606 78	4290 36	0,803 7650 45	4396 17	9,994 7043 67	105 81
2,551	0,809 4897 15	4290 47	0,804 2046 63	4396 07	9,994 7149 48	105 60
52	09 9187 61	4290 57	04 6442 69	4395 96	7255 08	105 39
53	10 3478 18	4290 68	05 0838 65	4395 85	7360 47	105 18
54	10 7768 86	4290 78	05 5234 51	4395 75	7465 65	104 96
55	11 2059 64	4290 88	05 9630 25	4395 64	7570 61	104 76
2,556	0,811 6350 52	4290 99	0,806 4025 89	4395 53	9,994 7675 37	104 54
57	12 0641 51	4291 08	06 8421 42	4395 43	7779 91	104 35
58	12 4932 59	4291 19	07 2816 85	4395 32	7884 26	104 13
59	12 9223 78	4291 29	07 7212 17	4395 21	7988 39	103 92
60	13 3515 07	4291 40	08 1607 38	4395 11	8092 31	103 71
2,561	0,813 7806 47	4291 50	0,808 6002 49	4395 01	9,994 8196 02	103 50
62	14 2097 98	4291 60	09 0397 50	4394 90	8299 52	103 30
63	14 6389 58	4291 71	09 4792 40	4394 80	8402 82	103 10
64	15 0681 28	4291 81	09 9187 20	4394 69	8505 92	102 88
65	15 4973 09	4291 91	10 3581 89	4394 59	8608 80	102 68
2,566	0,815 9265 00	4292 01	0,810 7976 48	4394 49	9,994 8711 48	102 48
67	16 3557 01	4292 11	11 2370 97	4394 38	8813 96	102 27
68	16 7849 12	4292 21	11 6765 35	4394 28	8916 23	102 07
69	17 2141 33	4292 31	12 1159 63	4394 18	9018 30	101 87
70	17 6433 64	4292 41	12 5553 81	4394 07	9120 17	101 66
2,571	0,818 0726 05	4292 51	0,812 9947 88	4393 97	9,994 9221 83	101 46
72	18 5018 56	4292 61	13 4341 85	4393 87	9323 29	101 25
73	18 9311 18	4292 71	13 8735 72	4393 77	9424 54	101 06
74	19 3603 89	4292 81	14 3129 49	4393 66	9525 60	100 85
75	19 7896 70	4292 91	14 7523 15	4393 56	9626 45	100 65
2,576	0,820 2189 61	4293 01	0,815 1916 71	4393 46	9,994 9727 10	100 45
77	20 6482 62	4293 11	15 6310 17	4393 36	9827 55	100 24
78	21 0775 73	4293 21	16 0703 52	4393 25	9927 79	100 05
79	21 5068 94	4293 31	16 5096 78	4393 15	9,995 0027 84	99 84
80	21 9362 25	4293 41	16 9489 93	4393 05	0127 68	99 65
2,581	0,822 3655 65	4293 51	0,817 3882 98	4392 95	9,995 0227 33	99 45
82	22 7949 16	4293 60	17 8275 94	4392 85	0326 78	99 25
83	23 2242 76	4293 70	18 2668 79	4392 75	0426 03	99 05
84	23 6536 46	4293 80	18 7061 54	4392 65	0525 08	98 86
85	24 0830 26	4293 90	19 1454 20	4392 55	0623 94	98 65
2,586	0,824 5124 16	4293 99	0,819 5846 75	4392 45	9,995 0722 59	98 46
87	24 9418 15	4294 09	20 0239 20	4392 36	0821 05	98 27
88	25 3712 24	4294 19	20 4631 56	4392 26	0919 32	98 06
89	25 8006 43	4294 29	20 9023 81	4392 16	1017 38	97 87
90	26 2300 72	4294 38	21 3415 97	4392 06	1115 25	97 68
2,591	0,826 6595 10	4294 48	0,821 7808 03	4391 96	9,995 1212 93	97 48
92	27 0889 58	4294 58	22 2199 99	4391 86	1310 41	97 29
93	27 5184 15	4294 67	22 6591 85	4391 76	1407 70	97 09
94	27 9478 82	4294 77	23 0983 61	4391 66	1504 79	96 88
95	28 3773 59	4294 86	23 5375 28	4391 57	1601 67	96 72
2,596	0,828 8068 45	4294 96	0,823 9766 84	4391 47	9,995 1698 39	96 51
97	29 2363 41	4295 06	24 4158 31	4391 37	1794 90	96 30
98	29 6658 47	4295 15	24 8549 67	4391 27	1891 20	96 12
99	30 0953 62	4295 25	25 2940 94	4391 17	1987 32	95 92
2,600	30 5248 87		25 7332 11		2083 24	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,600	0,830 5248 87	4295 34	0,825 7332 11	4391 08	9,995 2083 24	95 75
2,601	0,830 9544 20	4295 43	0,826 1723 19	4390 98	9,995 2178 99	95 54
02	31 3839 64	4295 53	26 6114 17	4390 89	2274 53	95 37
03	31 8135 16	4295 62	27 0505 06	4390 79	2369 90	95 16
04	32 2430 79	4295 72	27 4895 85	4390 69	2465 06	94 98
05	32 6726 50	4295 81	27 9286 54	4390 60	2560 04	94 79
2,606	0,833 1022 31	4295 90	0,828 3677 14	4390 50	9,995 2654 83	94 60
07	33 5318 21	4296 00	28 8067 64	4390 41	2749 43	94 41
08	33 9614 21	4296 09	29 2458 05	4390 31	2843 88	94 22
09	34 3910 30	4296 18	29 6848 36	4390 22	2938 06	94 04
10	34 8206 48	4296 28	30 1238 58	4390 12	3032 10	93 84
2,611	0,835 2502 76	4296 37	0,830 5628 70	4390 03	9,995 3125 94	93 66
12	35 6799 13	4296 46	31 0018 73	4389 93	3219 60	93 47
13	36 1095 59	4296 56	31 4408 66	4389 84	3313 07	93 29
14	36 5392 14	4296 65	31 8798 50	4389 74	3406 36	93 09
15	36 9688 79	4296 74	32 3188 24	4389 65	3499 45	92 91
2,616	0,837 3985 53	4296 83	0,832 7577 89	4389 55	9,995 3593 36	92 72
17	37 8282 36	4296 92	33 1967 44	4389 46	3685 08	92 53
18	38 2579 29	4297 01	33 6356 90	4389 36	3777 61	92 35
19	38 6876 30	4297 10	34 0746 26	4389 27	3869 96	92 17
20	39 1173 40	4297 20	34 5135 53	4389 17	3962 13	91 97
2,621	0,839 5470 60	4297 29	0,834 9524 70	4389 08	9,995 4054 10	91 80
22	39 9767 88	4297 38	35 3913 78	4388 99	4145 90	91 61
23	40 4065 26	4297 47	35 8302 77	4388 90	4237 51	91 44
24	40 8362 72	4297 56	36 2691 67	4388 81	4328 95	91 24
25	41 2660 28	4297 65	36 7080 47	4388 72	4420 19	91 08
2,626	0,841 6957 92	4297 74	0,837 1469 19	4388 63	9,995 4511 27	90 88
27	42 1255 66	4297 83	37 5857 81	4388 53	4602 15	90 72
28	42 5553 48	4297 92	38 0246 35	4388 44	4692 87	90 52
29	42 9851 40	4298 01	38 4634 79	4388 35	4783 39	90 35
30	43 4149 40	4298 10	38 9023 14	4388 26	4873 74	90 17
2,631	0,843 8447 50	4298 19	0,839 3411 41	4388 17	9,995 4963 91	89 99
32	44 2745 68	4298 28	39 7799 58	4388 08	5053 90	89 80
33	44 7043 96	4298 37	40 2187 66	4387 99	5143 70	89 63
34	45 1342 32	4298 46	40 6575 65	4387 90	5233 33	89 44
35	45 5640 78	4298 54	41 0963 55	4387 81	5322 77	89 28
2,636	0,845 9939 32	4298 63	0,841 5351 37	4387 72	9,995 5412 05	89 08
37	46 4237 96	4298 72	41 9739 09	4387 63	5501 13	88 91
38	46 8536 68	4298 81	42 4126 72	4387 54	5590 04	88 74
39	47 2835 49	4298 90	42 8514 27	4387 45	5678 78	88 55
40	47 7134 39	4298 98	43 2901 72	4387 36	5767 33	88 38
2,641	0,848 1433 37	4299 07	0,843 7289 08	4387 27	9,995 5855 71	88 20
42	48 5732 44	4299 16	44 1676 35	4387 18	5943 91	88 02
43	49 0031 60	4299 24	44 6063 53	4387 09	6031 93	87 85
44	49 4330 84	4299 33	45 0450 62	4387 00	6119 78	87 67
45	49 8630 17	4299 42	45 4837 62	4386 91	6207 45	87 49
2,646	0,850 2929 59	4299 50	0,845 9224 53	4386 83	9,995 6294 94	87 33
47	50 7229 09	4299 59	46 3611 36	4386 74	6382 27	87 14
48	51 1528 68	4299 68	46 7998 09	4386 65	6469 41	86 98
49	51 5828 35	4299 76	47 2384 74	4386 56	6556 39	86 80
50	52 0128 11		47 6771 30		6643 19	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
2,650	0,852 0128 11	4299 85	0,847 6771 30	4386 47	9,995 6643 19	86 63
2,651	0,852 4427 96	4299 93	0,848 1157 78	4386 39	9,995 6729 82	86 45
52	52 8727 89	4300 02	48 5544 16	4386 30	6816 27	86 28
53	53 3027 91	4300 10	48 9930 46	4386 21	6902 55	86 12
54	53 7328 01	4300 19	49 4316 68	4386 13	6988 67	85 93
55	54 1628 20	4300 27	49 8702 80	4386 04	7074 60	85 76
2,656	0,854 5928 48	4300 36	0,850 3088 84	4385 96	9,995 7160 36	85 61
57	55 0228 83	4300 44	50 7474 80	4385 87	7245 97	85 42
58	55 4529 28	4300 53	51 1860 67	4385 78	7331 39	85 26
59	55 8829 80	4300 61	51 6246 45	4385 70	7416 65	85 09
60	56 3130 41	4300 70	52 0632 15	4385 61	7501 74	84 92
2,661	0,856 7431 10	4300 78	0,852 5017 76	4385 52	9,995 7586 66	84 74
62	57 1731 88	4300 86	52 9403 28	4385 44	7671 40	84 57
63	57 6032 75	4300 95	53 3788 72	4385 35	7755 97	84 40
64	58 0333 70	4301 03	53 8174 07	4385 27	7840 37	84 24
65	58 4634 73	4301 12	54 2559 34	4385 18	7924 61	84 07
2,666	0,858 8935 84	4301 20	0,854 6944 52	4385 10	9,995 8008 68	83 90
67	59 3237 04	4301 28	55 1329 62	4385 01	8092 58	83 74
68	59 7538 32	4301 36	55 5714 64	4384 93	8176 32	83 55
69	60 1839 69	4301 45	56 0099 56	4384 85	8259 87	83 41
70	60 6141 13	4301 53	56 4484 41	4384 76	8343 28	83 23
2,671	0,861 0442 66	4301 61	0,856 8869 17	4384 68	9,995 8426 51	83 07
72	61 4744 27	4301 69	57 3253 85	4384 59	8509 58	82 89
73	61 9045 97	4301 78	57 7638 44	4384 51	8592 47	82 74
74	62 3347 74	4301 86	58 2022 95	4384 43	8675 21	82 56
75	62 7649 60	4301 94	58 6407 37	4384 34	8757 77	82 41
2,676	0,863 1951 54	4302 02	0,859 0791 72	4384 26	9,995 8840 18	82 24
77	63 6253 55	4302 10	59 5175 97	4384 18	8922 42	82 08
78	64 0555 65	4302 18	59 9560 15	4384 09	9004 50	81 90
79	64 4857 84	4302 26	60 3944 24	4384 01	9086 40	81 75
80	64 9160 10	4302 35	60 8328 25	4383 93	9168 15	81 59
2,681	0,865 3462 44	4302 43	0,861 2712 18	4383 85	9,995 9249 74	81 41
82	65 7764 87	4302 51	61 7096 02	4383 76	9331 15	81 26
83	66 2067 37	4302 59	62 1479 78	4383 68	9412 41	81 09
84	66 6369 96	4302 67	62 5863 46	4383 60	9493 50	80 93
85	67 0672 63	4302 75	63 0247 06	4383 52	9574 43	80 78
2,686	0,867 4975 37	4302 83	0,863 4630 58	4383 44	9,995 9655 21	80 16
87	67 9278 20	4302 91	63 9014 02	4383 36	9735 82	80 45
88	68 3581 10	4302 99	64 3397 37	4383 27	9816 27	80 29
89	68 7884 09	4303 07	64 7780 65	4383 19	9896 56	80 12
90	69 2187 16	4303 14	65 2163 84	4383 11	9976 68	79 97
2,691	0,869 6490 30	4303 22	0,865 6546 95	4383 03	9,996 0056 65	79 81
92	70 0793 52	4303 30	66 0929 98	4382 95	0136 46	79 65
93	70 5096 82	4303 38	66 5312 93	4382 87	0216 11	79 48
94	70 9400 21	4303 46	66 9695 89	4382 79	029559	79 33
95	71 3703 67	4303 54	67 4078 59	4382 71	0374 92	79 19
2,696	0,871 8007 20	4303 62	0,867 8461 31	4382 63	9,996 0454 11	79 01
97	72 2310 82	4303 70	68 2843 94	4382 55	0533 12	78 85
98	72 6614 52	4303 78	68 7226 49	4382 48	0611 97	78 70
99	73 0918 30	4303 85	69 1608 97	4382 40	0690 67	78 55
2,700	73 5222 15		69 5991 37		0769 22	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,700	0,873 5222 15	4303 93	0,869 5991 37	4382 31	9,996 0769 22	78 37
2,701	0,873 9526 08	4304 01	6,870 0373 67	4382 23	9,996 0847 59	78 22
02	74 3830 09	4304 08	70 4755 90	4382 15	0925 81	78 07
03	74 8134 17	4304 16	70 9138 05	4382 07	1003 88	77 91
04	75 2438 33	4304 24	71 3520 12	4381 99	1081 79	77 75
05	75 6742 57	4304 32	71 7902 11	4381 92	1159 54	77 60
2,706	0,876 1046 89	4304 39	0,872 2284 03	4381 84	9,996 1237 14	77 44
07	76 5351 28	4304 47	72 6665 86	4381 76	1314 58	77 29
08	76 9655 75	4304 55	73 1047 62	4381 68	1391 87	77 15
09	77 3960 29	4304 62	73 5429 31	4381 61	1469 02	76 98
10	77 8264 92	4304 70	73 9810 92	4381 53	1546 00	76 84
2,711	0,878 2569 61	4304 77	0,874 4192 45	4381 45	9,996 1622 84	76 67
12	78 6874 39	4304 85	74 8573 90	4381 38	1699 51	76 53
13	79 1179 24	4304 93	75 2955 28	4381 30	1776 04	76 38
14	79 5484 16	4305 00	75 7336 58	4381 23	1852 42	76 22
15	79 9789 17	4305 08	76 1717 81	4381 15	1928 64	76 07
2,716	0,880 4094 24	4305 15	0,876 6098 95	4381 08	9,996 2004 71	75 92
17	80 8399 40	4305 23	77 0480 03	4381 00	2080 63	75 77
18	81 2704 63	4305 31	77 4861 03	4380 93	2156 40	75 62
19	81 7009 93	4305 38	77 9241 95	4380 85	2232 02	75 48
20	82 1315 31	4305 45	78 3622 81	4380 76	2307 50	75 31
2,721	0,882 5620 76	4305 53	0,878 8003 57	4380 69	9,996 2382 81	75 16
22	82 9926 29	4305 60	79 2384 26	4380 61	2457 97	75 01
23	83 4231 89	4305 68	79 6764 87	4380 54	2532 98	74 86
24	83 8537 57	4305 75	80 1145 41	4380 46	2607 84	74 71
25	84 2843 32	4305 82	80 5525 87	4380 38	2682 55	74 56
2,726	0,884 7149 14	4305 90	0,880 9906 25	4380 31	9,996 2757 11	74 41
27	85 1455 04	4305 97	81 4286 56	4380 23	2831 52	74 26
28	85 5761 01	4306 05	81 8666 79	4380 16	2905 78	74 12
29	86 0067 05	4306 12	82 3046 95	4380 08	2979 90	73 96
30	86 4373 17	4306 19	82 7427 03	4380 01	3053 86	73 82
2,731	0,886 8679 36	4306 27	0,883 1807 04	4379 94	9,996 3127 68	73 67
32	87 2985 63	4306 34	83 6186 98	4379 86	3201 35	73 52
33	87 7291 97	4306 41	84 0566 84	4379 79	3274 87	73 38
34	88 1598 38	4306 48	84 4946 63	4379 72	3348 25	73 24
35	88 5904 86	4306 56	84 9326 35	4379 64	3421 49	73 08
2,736	0,889 0211 42	4306 63	0,885 3705 99	4379 57	9,996 3494 57	72 94
37	89 4518 05	4306 70	85 8085 56	4379 50	3567 51	72 79
38	89 8824 75	4306 78	86 2465 05	4379 42	3640 30	72 66
39	90 3131 52	4306 85	86 6844 48	4379 35	3712 96	72 50
40	90 7438 37	4306 92	87 1223 83	4379 27	3785 46	72 35
2,741	0,891 1745 29	4306 99	0,887 5603 10	4379 20	9,996 3857 81	72 21
42	91 6052 28	4307 06	87 9982 30	4379 13	3930 02	72 07
43	92 0359 34	4307 13	88 4361 43	4379 06	4002 09	71 93
44	92 4666 47	4307 20	88 8740 49	4378 98	4074 02	71 78
45	92 8973 67	4307 27	89 3119 47	4378 91	4145 80	71 64
2,746	0,893 3280 94	4307 34	0,889 7498 38	4378 84	9,996 4217 44	71 48
47	93 7588 29	4307 42	90 1877 21	4378 76	4288 92	71 36
48	94 1895 70	4307 49	90 6255 98	4378 69	4360 28	71 29
49	94 6203 19	4307 56	91 0634 67	4378 62	4431 48	71 06
50	95 0510 75		91 5013 29		4502 45	

k.	log. Cof. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
2,750	0,895 0510 75	4307 63	0,891 5013 20	4378 55	9,996 4502 54	70 93
2,751	0,895 4818 37	4307 70	0,891 9391 84	4378 48	9,996 4573 47	70 78
52	95 9126 07	4307 77	92 3770 32	4378 41	4644 25	70 64
53	96 3433 84	4307 84	92 8148 73	4378 34	4714 89	70 51
54	96 7741 67	4307 91	93 2527 07	4378 27	4785 40	70 36
55	97 2049 58	4307 98	93 6905 34	4378 20	4855 76	70 22
2,756	0,897 6357 56	4308 05	0,894 1283 54	4378 13	9,996 4925 98	70 08
57	98 0665 61	4308 12	94 5661 67	4378 06	4996 06	69 94
58	98 4973 72	4308 19	95 0039 72	4377 99	5066 00	69 80
59	98 9281 91	4308 26	95 4417 71	4477 92	5135 80	69 66
60	99 3590 17	4308 33	95 8795 63	4377 84	5205 46	69 53
2,761	0,899 7898 49	4308 39	0,896 3173 48	4377 77	9,996 5274 99	69 38
62	0,900 2206 88	4308 46	96 7551 25	4377 70	5344 37	69 23
63	00 6515 35	4308 53	97 1928 96	4377 63	5413 60	69 11
64	01 0823 87	4308 60	97 6306 58	4377 65	5482 71	68 97
65	01 5132 47	4308 67	98 0684 15	4377 49	5551 68	68 82
2,766	0,901 9441 14	4308 73	0,898 5061 64	4377 42	9,996 5620 50	68 69
67	02 3749 87	4308 80	98 9439 06	4377 35	5689 19	68 56
68	02 8058 67	4308 87	99 3816 42	4377 29	5757 75	68 41
69	03 2367 54	4308 94	99 8193 70	4377 22	5826 16	68 28
70	03 6676 48	4309 01	0,900 2570 92	4377 15	5894 44	68 15
2,771	0,904 0985 48	4309 07	0,900 6948 07	4377 08	9,996 5962 59	68 01
72	04 5294 55	4309 14	01 1325 15	4377 01	6030 60	67 88
73	04 9603 69	4309 21	01 5702 17	4376 95	6098 48	67 73
74	05 3912 90	4309 28	02 0079 11	4376 88	6166 21	67 60
75	05 8222 18	4309 34	02 4455 99	4376 81	6233 81	67 47
2,776	0,906 2531 52	4309 40	0,902 8832 80	4376 74	9,996 6301 28	67 33
77	06 6840 93	4309 48	03 3209 54	4376 68	6368 61	67 20
78	07 1150 41	4309 55	03 7586 22	4376 61	6435 81	67 06
79	07 5459 96	4309 62	04 1962 83	4376 54	6502 87	66 92
80	07 9769 58	4309 68	04 6339 37	4376 47	6569 79	66 79
2,781	0,908 4079 26	4309 74	0,905 0715 84	4376 40	9,996 6636 58	66 66
82	08 8389 00	4309 81	05 5092 24	4376 34	6703 24	66 53
83	09 2698 81	4309 88	05 9468 58	4376 27	6769 77	66 40
84	09 7008 68	4309 94	06 3844 85	4376 20	6836 17	66 26
85	10 1318 62	4310 01	06 8221 05	4376 14	6902 43	66 13
2,786	0,910 5628 63	4310 07	0,907 2597 19	4376 07	9,996 6968 56	65 99
87	10 9938 70	4310 14	07 6973 25	4376 00	7034 56	65 86
88	11 4248 84	4310 20	08 1349 25	4375 94	7100 41	65 74
89	11 8559 04	4310 27	08 5725 19	4375 87	7166 15	65 60
90	12 2869 31	4310 33	09 0101 06	4375 80	7231 75	65 46
2,791	0,912 7179 65	4310 40	0,909 4476 86	4375 74	9,996 7297 21	65 35
92	13 1490 04	4310 46	09 8852 60	4375 67	7362 56	65 21
93	13 5800 51	4310 53	10 3228 27	4375 61	7427 77	65 08
94	14 0111 03	4310 59	10 7603 88	4375 54	7492 85	64 95
95	14 4421 63	4310 66	11 1979 42	4375 48	7557 80	64 82
2,796	0,914 8732 28	4310 72	0,911 6354 89	4375 41	9,996 7622 62	64 69
97	15 3043 00	4310 78	12 0730 30	4375 35	7687 31	64 57
98	15 7353 78	4310 84	12 5105 65	4375 28	7751 88	64 44
99	16 1664 62	4310 91	12 9480 94	4375 22	7816 32	64 31
2,800	16 5975 53		13 3856 16		7880 63	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,800	0,916 5975 53	4310 98	0,913 3856 15	4375 15	9,996 7880 62	64 17
2,801	0,917 0286 51	4311 04	0,913 8231 30	4375 08	9,996 7944 79	64 04
02	17 4597 55	4311 10	14 2606 38	4375 02	8008 83	63 92
03	17 8908 65	4311 17	14 6981 40	4374 95	8072 75	63 79
04	18 3219 81	4311 23	15 1356 35	4374 89	8136 54	63 66
05	18 7531 04	4311 29	15 5731 24	4374 83	8200 20	63 54
2,806	0,919 1842 33	4311 35	0,916 0106 07	4374 77	9,996 8263 74	63 41
07	19 6153 69	4311 42	16 4480 84	4374 70	8327 15	63 29
08	20 0465 10	4311 48	16 8855 54	4374 64	8390 44	63 16
09	20 4776 58	4311 54	17 3230 18	4374 58	8453 60	63 03
10	20 9088 12	4311 61	17 7604 75	4374 51	8516 63	62 91
2,811	0,921 3399 73	4311 67	0,918 1979 27	4374 45	9,996 8579 54	62 78
12	21 7711 40	4311 73	18 6353 72	4374 39	8642 32	62 65
13	22 2023 13	4311 79	19 0728 10	4374 32	8704 97	62 54
14	22 6334 92	4311 86	19 5102 43	4374 26	8767 51	62 40
15	23 0646 78	4311 92	19 9476 69	4374 20	8829 91	62 29
2,816	0,923 4958 69	4311 98	0,920 3850 89	4374 14	9,996 8892 20	62 14
17	23 9270 68	4312 05	20 8225 02	4374 07	8954 34	62 03
18	24 3582 72	4312 11	21 2599 09	4374 01	9016 37	61 90
19	24 7894 83	4312 17	21 6973 10	4373 95	9078 27	61 78
20	25 2207 00	4312 23	22 1347 05	4373 88	9140 05	61 66
2,821	0,925 6519 22	4312 29	0,922 5720 93	4373 82	9,996 9201 71	61 53
22	26 0831 51	4312 35	23 0094 75	4373 76	9263 24	61 42
23	26 5143 85	4312 41	23 4468 51	4373 70	9324 66	61 29
24	26 9456 26	4312 47	23 8842 21	4373 64	9385 95	61 16
25	27 3768 73	4312 53	24 3215 84	4373 58	9447 11	61 05
2,826	0,927 8081 26	4312 59	0,924 7589 42	4373 51	9,996 9508 16	60 92
27	28 2393 85	4312 65	25 1962 93	4373 45	9569 08	60 81
28	28 6706 50	4312 71	25 6336 39	4373 39	9629 89	60 67
29	29 1019 22	4312 77	26 0709 78	4373 33	9690 56	60 56
30	29 5331 99	4312 83	26 5083 11	4373 27	9751 12	60 44
2,831	0,929 9644 82	4312 89	0,926 9456 38	4373 21	9,996 9811 56	60 31
32	30 3957 72	4312 95	27 3829 59	4373 15	9871 87	60 20
33	30 8270 67	4313 01	27 8202 74	4373 09	9932 07	60 08
34	31 2583 68	4313 07	28 2575 83	4373 03	9992 15	59 95
35	31 6896 75	4313 13	28 6948 85	4372 97	9,997 0052 10	59 84
2,836	0,932 1209 88	4313 19	0,929 1321 82	4372 91	9,997 0111 94	59 72
37	32 5523 06	4313 25	29 5694 72	4372 84	0171 66	59 60
38	32 9836 31	4313 31	30 0067 57	4372 78	0231 26	59 47
39	33 4149 62	4313 36	30 4440 35	4372 72	0290 73	59 36
40	33 8462 98	4313 43	30 8813 07	4372 67	0350 09	59 25
2,841	0,934 2776 40	4313 49	0,931 3185 74	4372 61	9,997 0409 34	59 12
42	34 7089 89	4313 54	31 7558 35	4372 55	0468 46	59 00
43	35 1403 43	4313 60	32 1930 89	4372 49	0527 46	58 89
44	35 5717 03	4313 66	32 6303 38	4372 43	0586 35	58 77
45	36 0030 69	4313 72	33 0675 81	4372 37	0645 12	58 65
2,846	0,936 4344 41	4313 78	0,933 5048 18	4372 31	9,997 0703 77	58 55
47	36 8658 18	4313 83	33 9420 50	4372 25	0762 32	58 41
48	37 2972 02	4313 89	34 3792 75	4372 19	0820 73	58 30
49	37 7285 91	4313 95	34 8164 94	4372 14	0879 03	58 20
50	38 1599 85		35 2537 08		0937 23	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,850	0,938 1599 85	4314 01	0,935 2537 08	4372 08	9,997 0937 23	58 06
2,851	0,938 5913 86	4314 06	0,935 6909 15	4372 02	9,997 0995 29	57 96
52	39 0227 92	4314 12	36 1281 17	4371 96	1053 25	57 83
53	39 4542 05	4314 18	36 5653 13	4371 90	1111 08	57 72
54	99 8856 23	4314 24	37 0025 03	4371 84	1168 80	57 61
55	40 3170 46	4314 30	37 4396 87	4371 79	1226 41	57 49
2,856	0,940 7484 76	4314 35	0,937 8768 66	4371 73	9,997 1283 90	57 37
57	41 1799 11	4314 41	38 3140 38	4371 67	1341 27	57 26
58	41 6113 52	4314 47	38 7512 05	4371 61	1398 53	57 14
59	42 0427 99	4314 53	39 1883 66	4371 55	1455 67	57 02
60	42 4742 52	4314 58	39 6255 21	4371 50	1512 69	56 92
2,861	0,942 9057 10	4314 64	0,940 0626 71	4371 44	9,997 1569 61	56 81
62	43 3371 73	4314 69	40 4998 15	4371 38	1626 42	56 69
63	43 7686 42	4314 75	40 9369 53	4371 33	1683 11	56 58
64	44 2001 17	4314 80	41 3740 86	4371 27	1739 69	56 46
65	44 6315 97	4314 86	41 8112 12	4371 21	1796 15	56 36
2,866	0,945 0630 83	4314 92	0,942 2483 34	4371 16	9,997 1852 51	56 23
67	45 4945 75	4314 97	42 6854 49	4371 10	1908 74	56 13
68	45 9260 72	4315 03	43 1225 59	4371 04	1964 87	56 01
69	46 3575 75	4315 08	43 5596 63	4370 99	2020 88	55 91
70	46 7890 83	4315 14	43 9967 62	4370 93	2076 79	55 97
2,871	0,947 2205 97	4315 20	0,944 4338 55	4370 88	9,997 2132 58	55 69
72	47 6521 16	4315 25	44 8709 43	4370 82	2188 27	55 56
73	48 0836 41	4315 31	45 3080 24	4370 76	2243 83	55 46
74	48 5151 72	4315 36	45 7451 01	4370 71	2299 29	55 34
75	48 9467 08	4315 42	46 1821 71	4370 65	2354 63	55 24
2,876	0,949 3782 49	4315 47	0,946 6192 37	4370 60	9,997 2409 87	55 13
77	49 8097 96	4315 53	47 0562 96	4370 54	2465 00	55 01
78	50 2413 49	4315 58	47 4933 50	4370 48	2520 01	54 90
79	50 6729 07	4315 64	47 9303 98	4370 43	2574 91	54 79
80	51 1044 71	4315 69	48 3674 41	4370 37	2629 70	54 69
2,881	0,951 5360 39	4315 74	0,948 8044 78	4370 32	9,997 2684 39	54 58
82	51 9679 13	4315 80	49 2415 10	4370 26	2738 97	54 47
83	52 3991 93	4315 85	49 6785 37	4370 21	2793 44	54 35
84	52 8307 78	4315 90	50 1155 57	4370 16	2847 79	54 26
85	53 2623 68	4315 96	50 5525 73	4370 10	2902 05	54 14
2,886	0,953 6939 64	4316 01	0,950 9895 83	4370 05	9,997 2956 19	54 04
87	54 1255 65	4316 07	51 4265 88	4369 99	3010 23	53 93
88	54 5571 71	4316 12	51 8635 87	4369 94	3064 16	53 82
89	54 9887 83	4316 17	52 3005 81	4369 89	3117 98	53 70
90	55 4204 01	4316 23	52 7375 69	4369 83	3171 68	53 61
2,891	0,955 8520 23	4316 28	0,953 1745 53	4369 78	9,997 3225 29	53 50
92	56 2836 51	4316 33	53 6115 30	4369 72	3278 79	53 40
93	56 7152 84	4316 39	54 0485 03	4369 67	3332 19	53 27
94	57 1469 23	4316 44	54 4854 69	4369 62	3385 46	53 18
95	57 5785 67	4316 49	54 9224 31	4369 56	3438 64	53 07
2,896	0,958 0102 16	4316 55	0,955 3593 87	4369 51	9,997 3491 71	52 97
97	58 4418 70	4316 60	55 7963 38	4369 46	3544 68	52 85
89	58 8735 30	4316 65	56 2332 83	4379 40	3597 53	52 75
99	59 3051 95	4316 70	56 6702 23	4369 34	3650 28	52 64
2,900	59 7368 65		57 1071 57		3702 92	

(Die Fortsetzung folgt.)

18.

Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques.

(Suite du mémoire No. 3. cah. 1. et No. 7. cah. 2.)

(Par M. *J. V. Poncelet*, chef de Bataillon du Génie.)

§. II.

Des différens modes par lesquels on peut transformer, traduire et combiner entre elles les relations concernant les transversales des lignes géométriques.

164. Toute courbe à double courbure, d'un degré donné, ayant pour projection ordinaire ou conique, sur un plan quelconque, une ligne géométrique du même degré; toute surface géométrique étant pareillement susceptible d'être coupée, par un plan arbitraire, suivant une ligne géométrique de son propre degré; enfin tout polygone, plan ou gauche, considéré comme transversal d'une ligne ou surface, pouvant toujours être décomposé en une suite de simples triangles, on conçoit, à priori, qu'il suffira de bien étudier les propriétés qui se rapportent au système des intersections d'une courbe géométrique plane et d'un ordre quelconque avec trois droites ou transversales rectilignes arbitraires, pour être ensuite en état de découvrir, avec facilité, toutes les relations métriques ou descriptions qui peuvent appartenir à des lignes à double courbure, à des surfaces géométriques, et à des polygones transversaux d'un degré ou d'un nombre de côtés quelconques. Tel est l'objet de ce second §.

En nous restreignant ainsi au cas le plus élémentaire, nous éviterons de compliquer inutilement la marche des raisonnemens, et nous pourrons donner aux divers résultats le degré de simplicité qui peut les rendre vraiment recommandables aux yeux des géomètres.

Exposé de la relation fondamentale.

165. Rappelons d'abord l'énoncé de cette relation, cela nous fournira l'occasion de présenter quelques observations préliminaires qui serviront à en faciliter la parfaite intelligence ainsi que les applications.

Soit abc un triangle arbitrairement situé sur le plan d'une ligne géométrique d'un ordre quelconque, et dont les côtés ab, bc, ca, prolongés indéfiniment rencontrent respectivement cette courbe aux points $p, p', p'' \ldots ; q, q', q'' \ldots ; r, r', r'' \ldots$, dont le nombre, pour chaque côté, est marqué par le degré même de la courbe. Désignons par (ap) le produit $ap \,.\, ap' \,.\, ap'' \ldots$ de tous les segmens compris sur le côté ab du triangle abc, depuis le sommet a de ce triangle, jusqu'aux différentes branches ou régions de la courbe; par (bq) le produit semblable de tous les segmens bq, bq', $bq'' \ldots$ qui, sur le côté bc, correspondent à ces mêmes branches et au sommet b, et ainsi de suite pour les autres segmens ou côtés; on aura l'égalité

$$(ap)(bq)(cr) = (bp)(cq)(ar),$$

que nous mettrons sous cette forme

$$\frac{(ap)(bq)(cr)}{(bp)(cq)(ar)} = 1,$$

et qui demeure applicable à la courbe proposée, même quand quelques unes de ses intersections avec le triangle deviennent imaginaires, se réunissent par couples on passent à l'infini, auquel cas le côté correspondant de ce triangle devient simplement parallèle à l'une des branches ou des asymptotes de cette courbe.

En effet, dans cette dernière hypothèse, le rapport des segmens infinis se réduit à l'unité (147.) et disparaît totalement de la relation ci-dessus; dans la seconde, les segmens des paires de points qui se confondent sur chacun des côtés du triangle, devenus tangens à la courbe proposée, sont simplement égaux entre eux, de sorte qu'ils continuent à demeurer dans la relation dont il s'agit; enfin, dans la première, les produits des couples de segmens imaginaires restent réels, comme on sait, et peuvent toujours être censés donnés implicitement, soit par le tracé ou la constitution propre de la courbe, soit par le tracé effectif ou possible d'autres courbes plus simples et qui auraient en commun, avec la proposée, les couples de points imaginaires relatifs à ces segmens. Les intersections r et r', par exemple, étant imaginaires, les produits $ar \,.\, ar'$, $cr \,.\, cr$ qui leur correspondent, ou plutôt le rapport de ces produits, sera donné par la relation même qui les renferme, ou par ses analogues relatives soit à la courbe proposée, soit à une section conique on à une ligne géométrique quelconque qui aurait, avec cette proposée, la direction

indéfinie de rr' ou ac pour sécante commune idéale (*Traité des propriétés projectives* Sect. I. et III.).

166. La relation générale qui nous occupe met d'ailleurs à même de trouver l'une quelconque des intersections de la courbe avec les côtés du triangle, quand toutes les autres sont connues. En effet, elle donne immédiatement le rapport des segmens relatifs à cette intersection, ou des deux distances qui, sur le côté auquel elle appartient, la séparent des sommets correspondans du triangle; mais il est nécessaire de remarquer qu'on peut diviser, de deux manières distinctes, ce côté en parties proportionnelles à deux nombres donnés, selon que le point de division doit se trouver entre les extrémités mêmes de ce côté ou sur son prolongement. Or un seul de ces points appartient à la courbe puisqu'il doit être tel (149.) que le système de toutes les intersections de celle-ci avec les côtés du triangle transversal, en offre un nombre zéro on pair sur le périmètre même de ce triangle, condition qui lève évidemment toute espèce d'incertitude.

167. Il résulte en particulier de ces observations, que si les différentes branches d'une courbe géométrique, une seule exceptée, sont décrites sur un plan, il suffira de connaître deux quelconques des points de cette branche pour être à même d'en déterminer successivement tous les autres par une méthode qui se rapporte uniquement au *premier degré*, et qui n'exige même que l'intervection de la *ligne droite* ou de la règle, comme nous le verrons tout à l'heure.

Effectivement, si l'on suppose que la direction indéfinie de deux des côtés du triangle transversal restent invariables sur le plan de la courbe, tandis que celle du troisième côté change de position d'une manière quelconque, par exemple en pivotant autour de l'un de ses sommets; il est clair, d'après ce qui précède, que les intersections successives de ce côté, avec l'une des branches de la courbe choisie à volonté, pourront être déterminées à l'aide des autres intersections variables de ce même côté et des intersections fixes qui appartiennent aux deux premiers.

On voit donc que chaque branche distincte d'une courbe géométrique se comporte, par rapport à toutes les autres, comme si elle était une simple ligne droite; car deux points de sa direction suffisent pour la déterminer complètement, et son tracé n'exige que des constructions du premier degré.

On prouverait, de la même manière, que le système de deux branches distinctes d'une courbe géométrique se comporte comme une simple ligne du second ordre par rapport à l'ensemble des autres branches censées connues; de sorte, par exemple, que ce système serait entièrement donné au moyen de cinq points quelconques de son contour; et ainsi de suite pour les systèmes de trois ou d'un nombre quelconque de branches. Or ces circonstances mettent à même de prévoir, à l'avance, que plusieurs des propriétés connues de la ligne droite et des sections coniques doivent être applicables aux branches simples et aux couples de branches des lignes géométriques de degré quelconque.

C'est ainsi, par exemple, que nous avons vu (155. et suiv.) les propriétés projectives les plus générales dont jouit une ligne du second ordre par rapport à une droite arbitraire de son plan, subsister, d'une manière analogue et sans modifications essentielles, pour le système de deux branches quelconques, d'une ligne du 3e ordre par rapport à la dernière branche.

168. En général, il résulte, de la nature des relations qui nous occupent, que toutes les propriétés, toutes les conséquences qu'il sera possible d'en déduire pour les courbes géométriques considérées d'une manière individuelle, seront aussi applicables aux systèmes de droites ou de courbes géométriques quelconques dont la somme des degrés serait un nombre donné et qui se trouveraient compris dans le même plan. Mais, afin d'éviter les répétitions et de ne pas compliquer inutilement les énoncés ou les démonstrations, nous convenons, une fois pour toutes, de comprendre sous la dénomination de *lignes géométriques*, aussi bien les lignes individuelles et distinctes que les assemblages ou systèmes de lignes auxquels notre théorème fondamental est directement applicable.

Et, puisque ce théorème établit une relation nécessaire entre les intersections des côtés du triangle transversal avec les différentes branches des lignes géométriques, il en résulte réciproquement qu'un système de points, choisis arbitrairement, mais en nombre égal, sur chacun des côtés d'un triangle quelconque, ne saurait, en aucune manière, appartenir à une ligne géométrique de l'ordre marqué par ce même nombre s'il ne satisfait pas à la relation dont il s'agit; ce qui revient à dire qu'il sera impossible de faire passer une telle ligne par l'ensemble de tous ces points. Ainsi, par exemple, six points étant situés arbitrairement, mais deux par deux, sur les côtés d'un triangle, on ne saurait construire aucune ligne

du second ordre qui contienne ces six points, et il est également de toute impossibilité d'en faire passer une du 3e par neuf points qui seraient choisis à volonté, quoique trois par trois, sur ces mêmes côtés.

Enfin il parait évident, d'après le No. 166., que, lorsque les points considérés satisfont aux conditions de grandeur et de position dont il y est question, toute courbe géométrique, du degré marqué par le nombre des points qui appartiennent à un même côté et qui passerait par le système de ces points et de tous les autres, un seul excepté, devra nécessairement aussi passer par ce dernier.

Ainsi, bien que nous ignorions actuellement les moyens géométriques de construire une telle courbe à l'aide des points donnés, quand son degré surpasse le deuxième (145), nous n'en devons pas moins regarder la relation métrique qui lie entre eux ces points, comme un indice de l'existence de cette courbe en général, ou, si l'on veut, comme une définition qui exclue seulement toute idée de son impossibilité absolue. Au surplus, lorsque, dans le courant de ce §. il nous arrivera d'énoncer qu'un certain groupe de $3m$ points, assujettis aux conditions que suppose cette relation, appartient à une ligne du degré m marqué par le nombre des points qui sont situés sur chaque transversale, ce sera uniquement dans la vue de simplifier le langage, et nullement de rien prononcer à l'avance sur l'existence ou la possibilité effective de cette courbe, possibilité qui sera démontrée complètement et généralement dans le paragraphe suivant, où nous nous occuperons, d'une manière spéciale, de la construction des lignes et surfaces géométriques par leurs systèmes d'intersections avec des transversales rectilignes données.

Méthode générale d'élimination appliquée spécialement aux segmens qui deviennent nuls ou infiniment petits. Des tangentes, des points singuliers et des polygones inscrits ou circonscrits.

169. Après les observations préliminaires qui précèdent, nous nous occuperons des différens modes par lesquels on peut transformer notre relation primitive en d'autres également propres à caractériser les lignes géométriques, et à faire construire numériquement ou graphiquement l'une quelconque de leurs intersections avec les côtés du triangle transversal, quand les intersections restantes sont censées données; ce qui conduit nécessairement aussi à autant de théorèmes distincts ou de propriétés nouvelles des lignes géométriques.

En effet, il suffit de traiter cette relation comme nous l'avons fait dans le 1. §., pour le cas particulier des lignes du second ordre; c'est à dire en fesant intervenir de nouvelles transversales rectilignes ou courbes qui contiennent quelques-uns des points d'abord considérés, et qui, donnant lieu à d'autres relations analogues, permettent d'éliminer simultanément, ou successivement de la proposée, tout ou partie des segmens qu'elle renferme, de manière à retomber finalement sur une égalité plus simple, sur une relation qui indique plus explicitement que la première, la dépendance graphique qui lie, entre elles, les intersections primitives de la courbe et ses transversales.

Obervons en outre que, par de telles transformations, on peut aussi généraliser notre équation fondamentale, de manière à la rendre applicable à des situations des transversales pour lesquelles elle cesserait de l'être sous le point de vue purement géométrique. En effet, par l'élimination, de tous ou de partie des segmens qui y entrent, au moyen d'équations et de transversales auxiliaires, on rend les relations nouvelles indépendantes du mode d'existence propre des points auxquels ces segmens appartiennent; de sorte que ces segmens peuvent devenir nuls, infinis, imaginaires sans que ces dernieres relations deviennent, pour cela, identiques, illusoires etc.

170. Nous avons déjà offert différens exemples de ces transformations pour le cas particulier des lignes du 2^{d} et du 3me ordre, mais il convient de les étudier ici d'une manière tout à fait spéciale et pour les courbes de degré quelconque.

Supposant, entre autres, que, dans le cas général ci-dessus (165.) d'une courbe géométrique plane coupée par les côtés indéfiniment prolongés du triangle $a\,b\,c$, il arrive que le sommet c de ce triangle doive être situé sur la courbe, et se confondre ainsi avec les points q et r qui lui sont adjacens; les segmens $c\,q$, $c\,r$ devenant à la fois nuls, la relation proposée prendra la forme $\frac{0}{0} = 1$ ou $0 = 0$, et cessera ainsi d'être apte à définir la courbe, ou à déterminer l'un quelconque des segmens du triangle à l'aide de tous les autres. Mais, si l'on conçoit, par les points q et r, une nouvelle transversale rectiligne ou courbe quelconque, le système de toutes ces intersections, avec les côtés du triangle $a\,b\,c$, donnera lieu à une seconde relation qui permettra d'éliminer, de la première, les segmens $c\,q$ et $c\,r$, censés nuls ou infiniment petits, et qui conduira à une

dernière équation propre à déterminer immédiatement l'une quelconque des intersections du triangle abc, avec les deux courbes devenues tangentes entre elles au point c, quand on connaîtra le système de toutes les autres.

171. Pour nous borner, ici, à ce qu'il y de plus simple et de plus élémentaire, nous supposerons que la ligne auxiliaire soit la droite indéfinie qr rencontrant au point P le 3e côté ab du triangle transversal, on aura évidemment

$$\frac{ar\,.\,cq\,.\,bP}{cr\,.\,bq\,.\,aP} = 1,$$

équation qui, multipliée, membre à membre, par la proposée (165.), donne cette autre

$$\frac{(ap)\,(bq')\,(cr')\,bP}{(bp)\,(cq')\,(ar')\,aP} = 1,$$

dans laquelle (bq') est censé représenter le produit de tous les segmens bq', bq'', bq'''.... à l'exception de bq; (ar') le produit semblable de tous les segmens, ar', ar'', ar'''.... à l'exception de ar etc., et d'où l'on déduit immédiatement le rapport de bP à aP propre à construire le point P, et parconséquent la transversale qrP, qui devient naturellement une *tangente* de la courbe proposée, dans l'hypothèse ci-dessus où les points q et r se confondraient en un seul avec le sommet c du triangle considéré.

On remplira aussi le même but d'éliminer, de la relation primitive, les segmens cr et cq qui la rendent identique, en observant que, dans le triangle cqr, le rapport des segmens ou côtés dont il sagit, conserve une valeur déterminée et finie, même quand ce triangle s'évanouit, ou que la direction indéfinie de qr devient tangente à la courbe. En effet, ce rapport est égal à celui des sinus des angles cqr, crq opposés respectivement aux côtés cr et cq dont il s'agit. Mais ce dernier mode d'élimination aurait l'inconvénient de faire intervenir, dans la relation primitive, des élémens d'une nature étrangère à ceux qu'elle contient, et qui ne se prêteraient pas, avec la même facilité, aux interprétations géométriques ou aux transformations que nous aurons à lui faire subir par la suite.

172. On se convaincra, dès à présent, des avantages inhérens au premier mode d'élimination en observant que la relation obtenue ci-dessus (171.) peut immédiatement se ramener à la forme même de celle d'où

nous sommes partis. Il suffit, pour cela, de supposer qu'on mène, par le point P, situé snr le côté ab du triangle abc, une seconde droite arbitraire rencontrant en q_1 et r_1 les deux autres côtés de ce triangle; car, étant considérée, à son tour, comme transversale de ce même triangle, elle donnera lieu à une nouvelle relation dont la combinaison avec la précédente conduira à celle-ci

$$\frac{(ap)\times bq_1\,(bq')}{(bq)\times cq_1\,(cq')}\frac{\times cr_1\,(cr')}{\times ar_1\,(ar')}=1,$$

qui, étant absolument de même forme que la relation primitive et assujettie aux mêmes conditions (149.), exprime (168.) que les trois groupes de points p, p', p'' ....; q, q', q'' ....; r, r', r'' ...., appartenans à la courbe proposée à l'exception des deux points q et r, sont eux mêmes situés sur une autre courbe géométrique d'un degré égal au sien propre.

Ce théorème qui a son inverse, d'après les principes de la théorie des polaires réciproques, conduit à des énoncés aussi élégans que faciles, mais sur lesquels nous ne pouvons ici insister. Cententons nous de remarquer que le moyen par lequel nous sommes parvenus à ramener l'équation du No. 171. à la forme de celle du No. 165., peut être mis en usage dans beaucoup d'autres circonstances analogues; ce qui permet de traduire immédiatement, en relations purement descriptives, toute égalité à deux termes, du genre de celles qui nous occupent, et qui ne différerait de celle du No. 165. dont il s'agit, que par l'ordre des facteurs qui y entrent ou l'arrangement des points auxquels elle s'applique.

173. Nous venons de montrer comment on peut transformer cette dernière relation en une autre qui ne devienne pas illusoire quand l'un des sommets du triangle abc se trouve situé sur la courbe proposée; et nons avons vu que cela revient à éliminer, de cette relation, les deux segmens qui sont susceptibles d'y devenir nuls à la fois; or, il est clair qu'on pourrait, de même, en faire disparaître deux autres segmens quelconques relatifs à des côtés différens du triangle transversal, ce qui permettrait d'amener de nouveaux sommets de ce triangle sur la courbe, sans que la relation, ainsi transformée, cessât d'être applicable aux intersections qui sont demeurées distinctes de ces sommets.

Je dis plus, c'est que le même procédé d'élimination pourra servir à amener un ou plusieurs des sommets du triangle proposé, ou, en général, d'un polygone transversal quelconque, en des points *multiples* de

la courbe, et cela quelle que soit *l'espèce* de ces points ou le nombre des branches qui y passent. En effet, il suffira évidemment de faire intervenir, dans la figure, autant de transversales auxiliaires (171.) qu'il y a de ces branches, et qui soient telles que, réunissant deux par deux les intersections du triangle et de la courbe, qui doivent se confondre soit avec l'un des sommets de ce triangle, soit avec l'un des points multiples de cette courbe, elles finissent par devenir des tangentes véritables aux différentes branches dont il s'agit.

Les points *conjugués*, de *rebroussement* ou *d'inflexion* donnant lieu à des observations analogues, on voit qu'il doit en résulter une infinité de théorèmes absolument neufs sur les points singuliers des courbes géométriques, et, en général, sur les figures qui leur sont inscrites ou circonscrites. Ces propositions pourraient ensuite être doublées au moyen des principes exposés dans notre *Mémoire sur la théorie des polaires réciproques*, et l'on en déduirait notamment des procédés fort simples et sur lesquels nous aurons occasion de revenir dans le §. suivant, pour construire, par points, toute ligne géométrique ayant un point multiple d'un ordre inférieur, d'une ou de deux unités, au sien propre etc. Mais ce n'est pas ici le lieu de s'étendre sur ces différentes matières dignes d'intérêt et qui sont susceptibles des plus grands développemens, soit qu'on s'arrête aux figures situées simplement dans un plan, soit que l'on considère des polygones gauches quelconques coupés par des surfaces géométriques dans l'espace.

Traduction de l'équation fondamentale en relations purement descriptives et linéaires.

174. Revenons maintenant aux suppositions générales du No. 165., où le triangle abc a une situation quelconque par rapport à la courbe, et montrons comment, en suivant la marche qui précède, on peut aisément découvrir les moyens de construire *linéairement*, c'est-à-dire avec une *simple règle*, l'un quelconque des points définis par la relation

$$\frac{(ap)(bq)(cr)}{(bp)(cq)(ar)} = 1,$$

quand tous les autres sont censés donnés sur la direction des transversales ab, bc et ac.

Pour y parvenir, il ne s'agira évidemment que d'éliminer successivement, de la relation dont il s'agit, tous les segmens qui y entrent, en

conduisant par les points d'intersection de la courbe, pris deux à deux et dans un ordre convenable, de nouvelles droites considérées, à leur tour, comme autant de transversales de côtés du triangle, et en procédant, du reste, comme cela a déjà été indiqué plus haut (171.) relativement aux segmens des points q et r, c'est-à-dire en s'arrangeant de façon à retomber toujours sur une dernière relation de la forme de la proposée et qui appartienne simplement au système de trois derniers points situés en ligne droite; ce qui est possible d'une infinité de manières différentes, et conduit à autant de procédés graphiques distincts pour construire l'un des points primitivement considérés quand on connaît tous les autres, procédés dont nous nous contenterons de donner quelques exemples, sans insister même sur les conséquences ou les théorèmes qui peuvent en découler pour les lignes géométriques des divers ordres.

175. Qu'il s'agisse, en particulier, d'une ligne du 4e degré coupée, par les côtés du triangle abc, comme il a été expliqué au No. 165.; on considérera d'abord le groupe des six points p et p', q et q', r et r' situés par couples ou deux par deux sur les côtés dont il s'agit, et on les traitera de la même manière qu'on la fait au No. 148. pour le cas des simples sections coniques, en complétant, par exemple, l'hexagone inscrit $pp'qq'rr'p$, ou, ce qui revient au même, en traçant les trois transversales $q'r$, pr', $p'q$, joignant des points d'intersection qui appartiennent à des couples de côtés différens du triangle abc, et dont la rencontre respective, avec chacun de ses troisièmes côtés, déterminera les nouveaux points P, Q, R qui sont les points de concours des côtés opposés de l'hexagone dont il s'agit. On mènera pareillement, par les six intersections restantes et toujours dans le même ordre, les trois transversales $q'''r''$, $p''r'''$,$p'''q''$, rencontrant en P', Q', R' respectivement les côtés du triangle abc, dont ces transversales ne dépendent pas. Cela posé, considérant le système complet de ces six transversales comme une courbe unique (167.) du 6e degré, on aura, entre les 36 segmens qu'elle détermine sur les côtés abc ou sur leurs prolongemens, la relation générale

$$\frac{(ap)(bq)(cr)\times aP.aP'\times bQ.bQ'\times cR.cR'}{(bp)(cq)(ar)\times bP.bP'\times cQ.cQ'\times aR.aR'}=1,$$

qui, en vertu de celle qui appartient à la courbe proposée, se réduit à la suivante

$$\frac{aP.aP'\times bQ.bQ'\times cR.cR'}{bP.bP'\times cQ.cQ'\times aR.aR'}=1.$$

Cette nouvelle équation exprime évidemment que le système des six points P et P', Q et Q', R et R', distribués deux par deux et symétriquement sur les côtés ab, bc et ac, du triangle proposé, appartiennent à une seule et même ligne du second ordre, car elle satisfait aux différentes conditions spécifiées aux No. 148., 149., 165. et suivans. Traitant donc ces six nouveaux points comme il est indiqué dans le premier de ces numéros, ou comme on vient de le faire des deux groupes des douze premiers points appartenans à la courbe proposée, on obtiendra finalement trois derniers points qui seront situés en ligne droite, conformément à ce qui a été établi dans ce même numéro et à ce qu'indique le principe de *Pascal* sur les hexagones inscrits aux lignes du second ordre.

Ces constructions, comme on voit, lient entre elles graphiquement les douze intersections de la courbe du 4e degré et des côtés du triangle abc, de manière que onze quelconques d'entre elles étant données, la derniere s'ensuit nécessairement par le tracé de simples lignes droites.

176. S'il s'agissait d'une ligne du 3e ordre seulement, on tracerait une droite arbitraire formant, avec cette ligne, un système qu'on traiterait comme on vient de le faire pour la courbe du 4e degré. On pourrait aussi détacher, des neuf intersections de la ligne du 3e ordre avec les côtés du triangle abc, un groupe de six points symétriquement situés sur ces côtés, afin de traiter ce groupe comme on l'a fait précédemment, mais la relation à la quelle on parviendrait ainsi, n'ayant pas la forme de celle du No. 165., on n'en pourrait conclure que les trois points nouvellement obtenus, réunis aux trois derniers points de la courbe proposée, appartiennent à une ligne du second ordre; il faudrait nécessairement lui faire subir la transformation du No. 172. pour la rendre susceptible d'exprimer immédiatement une dépendance graphique entre les points auxquels elle se rapporte; ce qui enlèverait à la construction finale toute la symétrie qui caractérise le premier mode d'opérer.

Cette difficulté n'existe pas pour les lignes du 5ème ordre; car, si l'on détache des 15 intersections qui leur appartiennent sur les côtés du triangle transversal, trois quelconques d'entre elles relatives à des côtés différens, puis qu'on traite les 12 intersections restantes comme on l'a fait des 12 intersections relatives à la courbe du 4e degré ci-dessus, on arrivera finalement à trois derniers points qui, réunis avec les trois points reservés, appartiendront naturellement à une ligne du 2^d ordre; ce qui tient

essentiellement à ce que les 12 premiers points ont été soumis à un nombre pair d'opérations qui n'ont pas changé l'ordre des produits des segmens qui, dans les équations successives, se rapportent à ces douze points.

Pour les lignes du 6e ordre, on partagerait les 18 intersections correspondantes en trois groupes de six points respectivement situés sur les côtés du triangle; et, les traitant séparément comme s'ils appartenaient à une ligne du second ordre, on arriverait à neuf derniers points situés sur une ligne du 3ème ordre, qu'on traiterait, à leur tour, comme nous venons de l'indiquer pour cet ordre, en fesant intervenir une droite auxiliaire quelconque dans la figure, afin de n'avoir qu'une ligne du 4e ordre à considérer.

On procéderait d'une manière analogue pour les lignes des ordres supérieurs au 6ème.

177. Les constructions qui précèdent établissant des dépendances purement graphiques et linéaires entre les intersections d'une courbe plane donnée et les côtés d'un triangle pris pour transversal de cette courbe, il est clair que ces dépendances ne cesseront jamais d'être applicables au système des intersections correspondantes, pourvu seulement qu'aucune d'entre elles ne devienne imaginaire: elle servira donc à construire l'une quelconque de ces intersections au moyen de toutes les autres, même quand le triangle dont il s'agit s'évanouira, aura des sommets placés sur la courbe ou situés à l'infini etc.; ce qui fournira, entre autres (171.), le moyen de construire, toujours par de simples intersections de lignes droites, la *tangente* en l'un quelconque des points d'une courbe géométrique donnée sur un plan.

Ce sont précisement ces constructions, dont l'analogie avec celles qui résultent du principe de *Pascal* pour les sections coniques est de toute évidence, que nous avions découvertes, dès 1816, et que nous avons annoncées à la page 154. du tome VIII. des *Annales de Mathématiques*, année 1817. On voit qu'envisagées individuellement et pour chaque courbe d'un certain ordre, elles sont assez simples en elles mêmes pour être facilement appliquées, et assez symétriques pour être aisément retenues et saisies par l'esprit. Mais elles n'en manquent pas moins, dans leur ensemble, de ce caractère d'uniformité et d'universalité, qui peut seul rendre les méthodes mathématiques vraiment recommandables: c'est pourquoi, dans ce qui va suivre, nous exposerons des constructions absolument exemptes de cet inconvenient.

Elimination de tous les segmens relatifs à une même transversale ou au système de deux transversales distinctes. Des systèmes d'intersection en involution simple.

178. Afin de mieux faire apercevoir la marche qui nous a fait parvenir à ces constructions, nous remarquerons que la relation du No. 165. devient complétement illusoire quand l'un des côtés du triangle abc passe à l'infini; ensorte que cette relation n'apprend plus rien par elle même sur la loi ou la dépendence qui lient entre elles les différentes intersections de ce triangle et de la courbe. Or nous venons de voir que cette dépendance, considérée sous le point de vue purement graphique, n'en existe pas moins dans la supposition dont il s'agit, puisque, d'après les notions généralement admises, toute droite, à distance donnée, qui contient l'un des points d'une courbe, situé à l'infini, n'est autre chose qu'une parallèle à la branche ou à l'asymptote correspondante de cette courbe; donc il doit exister aussi une relation métrique nécessaire entre tous ceux des différens segmens du triangle abc, qui, fesant partie de la relation primitive, n'ont pas acquis une valeur infinie dans l'hypothèse dont il s'agit.

Pour découvrir cette nouvelle relation, il ne s'agira, suivant l'esprit de la méthode que nous avons jusqu'ici prise pour guide, que de transformer la relation du No. 165. en une autre qui cesse de devenir identique quand le côté du triangle abc, que l'on considère, s'éloigne à une distance infinie sur le plan de la courbe; ce qui consiste toujours à éliminer, de cette relation et à l'aide de nouvelles transversales rectilignes convenablement tracées, tous les couples de segmens dont le rapport conserve essentiellement la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, attendu qu'en devenant infinis, ils diffèrent entre eux d'une quantité qui reste elle même infinie. Or cette circonstance n'a évidemment lieu que pour les seuls segmens qui appartiennent au côté dont il s'agit; c'est donc aussi de ces seuls segmens qu'il faut débarrasser la relation proposée, en menant, par les intersections correspondantes de la courbe, des transversales rectilignes arbitraires.

179. Supposant, par exemple, que ce soit le côté bc du triangle abc, qui soit susceptible de passer à l'infini; pour faire sortir, de l'égalité du No. 165. les segmens qui appartiennent à ce côté, on mènera, par ses intersections q, q', q''.... avec la courbe, des droites ou transversales arbitraires coupant respectivement en P et R, P' et R', P'' et R'' etc. les deux autres côtés ab et ac de ce triangle. Cela posé on aura évidemment, en considérant le système de ces transversales comme une ligne

géométrique du même ordre que la proposée, et en conservant d'ailleurs les conventions jusqu'ici admises,

$$\frac{(aP)(bq)(cR)}{(bP)(cq)(aR)} = 1;$$

d'où l'on tire, en combinant avec la relation du No. 165.

$$\frac{(ap)}{(bp)}\frac{(cr)}{(ar)} = \frac{(aP)}{(bP)}\frac{(cR)}{(aR)},$$

équation dont l'énoncé facile donnerait lieu à un nouveau théorème sur les courbes géométriques, et qui, dans la supposition où bc s'éloigne à l'infini et où les transversales auxiliaires PqR, $P'q'R'$.... se changent, comme nous l'avons dit, en un système de parallèles quelconques aux différentes branches infinies de la courbe, prend cette autre forme encore plus simple

$$\frac{(ap)}{(ar)} = \frac{(aP)}{(aR)},$$

attendu que les rapports de segmens infinis se réduisent ici à l'unité, puisque ceux-ci ne diffèrent entre eux que d'une quantité donnée.

D'ailleurs, quand les transversales auxiliaires, au lieu d'être menées arbitrairement, sont prises tangentes à la courbe proposée ou qu'elles se confondent avec ses différentes asymptotes, on retombe sur un théorème démontré, par *Waring*, à la page 85. de ses *Mélanges analytiques*, lequel n'est ainsi qu'un cas particulier du nôtre.

180. Supposons encore que ces trausversales soient conduites par les intersections respectives r, r', r''.... de la courbe et de l'un, ac, des côtés du triangle abc, dont elles ne dérivent pas; ce qui revient à supposer que R coïncide avec r, R' avec r', et ainsi des autres; la relation, obtenue en premier lieu, deviendra, attendu qu'alors le produit $(cr) = (cR)$, le produit $(ar) = (aR)$,

$$\frac{(ap)}{(bp)} = \frac{(aP)}{(bP)};$$

nouvelle équation qui, lorsque le dernier côté bc du triangle s'éloigne à l'infini ou devient simplement parallèle au côté ab, se réduit à cette autre encore plus simple

$$(ap) = (aP),$$

et qui indique, d'après nos conventions (165.), que „le produit de tous „les segmens ap, ap', ap''.... relatifs à la courbe proposée, est égal „à celui de tous les segmens aP, aP', aP'',.... déterminés par les sé-

cantes ou cordes indéfinies qr, $q'r'$, $q''r''$ .... devenues parallèles aux différentes branches ou asymptotes de cette courbe

181. L'équation

$$\frac{(ap)}{(bp)} = \frac{(aP)}{(bP)},$$

relative au cas ou ac ou bc restent quelconques, se rapporte évidemment à la forme des trois premières de celles qui ont été établies aux No. 143. et 144. pour le cas des lignes du second ordre; ce qui conduit à quelques conséquences intéressantes concernant les lignes géométriques en général, et qui peuvent être considérées comme l'extension des propriétés dont jouissent les quadrilatères inscrits au système de deux droites ou à une section conique quelconque, supposés coupés par une transversale arbitraire.

En effet, le système des transversales PqR, $P'q'R'$, $P''q''R''$,.... dont il a été question ci-dessus, forme, avec les côtés indéfinis du triangle abc, une suite continue de quadrilatères $PRR'P'$, $P'R'R''P''$ .... également inscrits à la courbe proposée, et dont les différens côtés se trouvent, aussi bien que les branches de cette courbe, coupées à la fois par la transversale arbitraire ab; l'équation ci-dessus peut donc être considérée comme indiquant que les points a et b, qui appartiennent aux deux côtés communs à tous ces quadrilatères, jouent le même rôle ou sont en *involution simple*, soit par rapport aux intersections de la transversale et de la courbe, soit par rapport aux intersections de tous les autres côtés des quadrilatères.

Mais ce rapprochement, entre les propriétés des lignes du second ordre et celles qui appartiennent aux lignes d'un ordre quelconque, peut être rendu plus évident et plus complet encore, en observant que la relation, qui nous occupe, étant indépendante de l'ordre même dans lequel on joint, deux à deux, les intersections distinctes, des côtés ac et bc du triangle transversal, avec la courbe, elle a lieu, d'une manière analogue, pour les deux systèmes de diagonales joignant des sommets différens des quadrilatères ci-dessus; de sorte que les intersections de la transversale arbitraire avec la courbe, et ses intersections avec les côtés ou les diagonales distinctes dont il s'agit, constituent quatre groupes de points qui, combinés deux à deux, sont à la fois en *involution* par rapport aux points a et b de la transversale.

182. Pour traduire ces conséquences en un langage plus explicite encore, concevons une courbe géométrique du degré m tracée sur un plan; soient ac et bc deux transversales arbitraires rencontrant cette courbe en autant de points qu'il est marqué par son degré; inscrivons, à volonté, à cette même courbe, un polygone de $2m$ côtés qui ait alternativement pour sommets les m points de rencontre de ac et les m points de rencontre de bc; soit en outre ab une troisième transversale arbitraire rencontrant les deux premières en a et b, la courbe aux m points p, p', p''...., les côtés de rang pair du polygone aux m points P, P', P''.... et enfin ceux de rang impair aux m points P_1, P'_1, P''_1.... respectivement; on aura, selon ce qui vient d'être démontré, les deux relations

$$\frac{(ap)}{(bp)} = \frac{(aP)}{(bP)}, \qquad \frac{(ap)}{(bp)} = \frac{(aP_1)}{(bP_1)};$$

d'où l'on déduit immédiatement cette troisième

$$\frac{(aP)}{(bP)} = \frac{(aP_1)}{(bP_1)},$$

qui se rapporte uniquement aux intersections de la transversale ab avec les côtés de rang pair ou de rang impair du polygone, et à laquelle on arriverait directement et généralement, pour un polygone quelconque, d'un nombre pair de sommets, inscrit à l'angle de deux droites arbitraires ac et bc, en considérant alternativement le système de tous les côtés de rang pair de ce polygone et celui de tous les côtés de rang impair, comme autant de lignes géométriques (165.) transversales du triangle abc, formé par la rencontre mutuelle des deux droites ac et bc dont il s'agit, et d'une troisième droite arbitraire ab.

183. Ce dernier théorème qui, daprès ce que nous avons fait voir, de deux manières différentes, aux No. 515. et 517. du *Traité des propriétés projectives des figures*, s'étend aisément aux polygones, d'un nombre pair de côtés, inscrits à une ligne du second ordre quelconque, ce théorème, disons-nous, lie entre eux tous les points de deux systèmes en *involution simple* par rapport à deux points donnés, de manière à faire découvrir linéairement l'un quelconque d'entre eux, quand tous les autres sont assignés *à priori*.

Qu'il s'agisse, par exemple, des deux systèmes de points p, p', p''.... P, P', P'' considérés dans le No. 181., et qui sont en *involution* par rapport aux sommets a et b du triangle abc, on inscrira, à volonté, dans

l'angle acb des deux transversales ac et ab, ou de deux droites quelconques issues de a et b, un polygone dans les sommets, en nombre égal à celui des deux systèmes de points proposés s'appuient alternativement sur ces droites et de manière que les côtés de rang pair, je suppose, passant respectivement par les points p, p', p'' ...., les côtés de rang impair, un seul excepté, passent respectivement aussi par ceux des points P, P', P'' .... qui sont censés donnés. Cela posé, le dernier côté ira naturellement rencontrer la transversale ab au point qui a été excepté; circonstance qui d'ailleurs arrivera quel que soit ce point et quel que soit l'ordre dans lequel on ait opéré.

Nouvelles construction des tangentes. Des faisceaux de tangentes en involution.

184. Ce qui précède fournit évidemment une nouvelle méthode, aussi générale qu'elle est symétrique et élégante, pour construire (164. et suiv.) l'une quelconque des intersections d'une courbe géométrique avec trois droites ab, ac et bc, arbitrairement tracées sur son plan et lorsque toutes les autres sont connues ou données par le tracé de la courbe. De là également un procédé nouveau pour construire linéairement, ou sans autre instrument que la règle, la tangente en un point donné d'une courbe géométrique quelconque, plane ou à double courbure, procédé qui peut aussi servir à construire les asymptotes de cette courbe, quand on connaît simplement leur direction ou leur point de tangente à l'infini.

Supposons, par exemple, que, dans la figure relative aux No. 180. et 183., le point de rencontre c des transversales ac et bc, soit pris sur la courbe, de manière que leurs intersections q et r avec cette courbe, se confondent en une seule au point de rencontre dont il s'agit; la droite indéfinie qr deviendra évidemment une tangente de la courbe, et la relation graphique qui précède donnera le point de rencontre P, de cette tangente, avec la transversale arbitraire ab.

185. En appliquant aux diverses propositions qui nous ont jusqu'ici occupé, les principes exposés dans les No. 101., 120. et suiv. de notre précédent *Mémoire sur la théorie des polaires réciproques*, on arrive à divers résultats, dont nous nous bornerons à citer les suivans parcequ'ils conduisent à des énoncés faciles.

„Soit une courbe quelconque, de degré m, tracée sur un plan, et „a, b, c trois points aussi quelconques de ce plan, de chacun desquels on

„ait mené, à la courbe, les $m(m-1)$ tangentes *) qui lui correspondent „(No. 66.), tangentes qui seront ici censées toutes réelles; choisissons, à „volonté, parmi les $m^2(m-1)^2$ intersections mutuelles des tangentes issues „de b et de c, un système de $m(m-1)$ de ces intersections appartenantes „à autant de couples distincts de ces tangentes; fesons enfin passer, par „les intersections dont il s'agit, un faisceau de $m(m-1)$ droites dirigées „vers le point a; il résulte, des No. 180., et suivans, que ce faisceau et „celui des $m(m-1)$ tangentes, issues du même point a, seront en *involution simple* par rapport aux deux droites indéfinies ac et ab; c'est-„à-dire que les intersections respectives de ces faisceaux, avec une trans-„versale arbitraire, seront elles-mêmes en *involution* par rapport aux „intersections de cette transversale et des deux droites dont il s'agit."

Il résulte en particulier, de ce théorème général, que, si l'on se donne toutes les tangentes issues des trois points a, b, c, une seule exceptée, on pourra immédiatement déterminer celle-ci par de simples tracés de lignes droites, et en ayant recours aux constructions du No. 183. appliquées aux intersections de la transversale ci-dessus; problème de la solution duquel dépend d'ailleurs la détermination du point de contact des tangentes. Mais on peut aussi opérer directement en renversant les constructions elles-mêmes, au moyen de la *Théorie des polaires réciproques*, en observant que la question revient, en définitive, à déterminer l'une quelconque des droites des deux faisceaux issus du point a, et qui sont en *involution* par rapport à ab et ac.

A cet effet, ayant choisi à volonté deux points b' et c' sur ces dernières droites respectives, on s'en servira pour faire passer alternativement les côtés, de rang pair et impair, d'un polygone quelconque dont les sommets s'appuieront eux-mêmes alternativement sur chacune des droites du couple de faisceaux considérés, à l'exception cependant de celle qu'il s'agit de déterminer au moyen de tous les autres. Cela posé, le dernier sommet de ce polygone, celui qui est demeuré entièrement libre, se placera de lui même, sur la dernière droite, et servira ainsi à la déterminer complétement de position.

---

*) Nous reviendrons, dans le quatrième §., sur ce qui concerne le tracé de ces tangentes.

186. Ces exemples suffisent pour donner une idée du genre de propositions auxquelles on est conduit quand on applique nos principes sur la réciprocité des figures, aux diverses considérations qui précèdent; c'est pourquoi, sans insister davantage, nous retournerons à l'objet de nos premières investigations relatives aux applications spéciales de la doctrine des transversales, en remarquant qu'il nous reste une dernière transformation à faire subir à la relation générale du No. 165, pour qu'elle puisse s'étendre à toutes les situations possibles du triangle ou des transversales dont elle dérive.

Du changement complet de forme que subit, dans certains cas, la relation fondamentale. — Théorèmes qui en résultent.

187. Par les considérations du No. 171. et suivans, 179. et 180., nous avons déjà converti la relation fondamentale du No. 165. en d'autres relations métriques qui ne deviennent illusoires ou identiques ni quand les sommets du triangle formé par les intersections mutuelles des transversales de la courbe, se trouvent situés sur cette courbe, ni quand un ou deux de ces sommets se sont éloignés à l'infini sur son plan. Mais toutes ces nouvelles relations se réduisent, ainsi que la primitive, à des identités de la forme $1 = 1$, quand ce même triangle vient à s'évanouir complétement, soit que d'ailleurs les directions indéfinies de ses côtés restent distinctes en convergeant en un point unique, soit que deux quelconques d'entre elles se réunissent en une seule également distincte de la troisième.

Toutefois les relations purement descriptives et linéaires auxquelles nous sommes parvenus aux No. 175. 176, et 183., en éliminant successivement, de celles dont il s'agit, tous les segmens qui y entrent, ces relations, dis-je, ne cessant nullement d'être applicables au système des transversales, et devant être considérées comme les traductions immédiates des relations métriques dont elles dérivent primitivement, il faut bien encore que l'indétermination de celles-ci tienne purement au changement de forme qu'elles doivent subir dans la nouvelle hypothèse.

188. Il est évident qu'on ne saurait ici employer le mode d'élimination successive des segmens dont nous nous sommes servis précédemment; car il nous ferait retomber sur les mêmes relations linéaires. Mais, si l'on met l'équation du No. 165. sous cette forme

$$(ap)(bq)(ar + ac) = (ar)(ap + ab)(bq + bc),$$

qu'ensuite on développe tous les produits des facteurs binomes en négligeant successivement, dans les résultats, les termes que contiennent ab, bc et ac à des degrés supérieurs au premier, attendu que les cotés du triangle abc peuvent, ici, être censés infiniment petits, on obtiendra la nouvelle équation

$$ac\Sigma\left(\frac{1}{ar}\right) = ab\Sigma\left(\frac{1}{aq}\right) + bc\Sigma\left(\frac{1}{pq}\right),$$

dans laquelle le signe Σ désigne la somme algébrique *) des valeurs inverses ou des *réciproques* de segmens analogues, différant seulement par le signe de position et l'accent ou indice qui affecte les lettres p, q, r.

On arrivera plus rapidement encore, à cette transformée, en prenant la différentielle logarithmique des deux nombres de l'équation primitive (165.), dans laquelle on devra, selon ce qui précède, regarder les produits (cr), (bp) et (cq) comme les seules quantités susceptibles de varier, et considérer les variations des segmens relatifs à chacun des côtés du triangle abc comme égales entre elles et à ces côtés respectifs censés devenus infiniment petits.

Observant maintenant que ces côtés sont proportionnels aux sinus des angles respectivement opposés du triangle, et supposant finalement que les trois sommets de celui-ci viennent à se confondre en un point unique, on obtiendra la relation

$$\sin.paq\,\Sigma\left(\frac{1}{ar}\right) = \sin.qar\,\Sigma\left(\frac{1}{ap}\right) + \sin.par\,\Sigma\left(\frac{1}{aq}\right),$$

pour remplacer celle du No. 165. dans le cas ou les trois transversales arbitraires de la courbe convergent en un même point a, en formant entre elles des angles dont, conformément aux hypothèses faites tacitement dans les raisonnemens qui précèdent, le plus grand de tous est censé l'angle paq comprenant ar dans son intérieur.

189. Mais, ainsi qu'il a déjà été observé au No. 53. (*Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques*), il n'est nullement indispensable de recourir aux transformations algébriques pour se convaincre que la relation ci-dessus s'étend aux lignes géométriques d'un ordre quelconque, comme elle s'applique également aux systèmes composés de simples lignes droites, d'après les considérations purement élémentaires du No. 51.

---

*) *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques*, No. 4. et suiv.

Rappelons nous, en effet, la manière dont on parvient aux relations linéaires et purement descriptives des N. 175. et suivans, relations qui sont directement applicables au cas où les transversales ab, ac, ac, concourent en un même point a, et observons que, si des trois derniers points en ligne droite obtenus sur ces transversales, on remonte successivement, au système des six points qui appartiennent à une même ligne du second ordre, à celui des douze points qui appartiennent à une même ligne du 4e ordre etc., on aura à considérer un égal nombre d'équations, de la forme de celle ci-dessus, qu'on obtiendra en combinant, de proche en proche, par voie d'addition ou de soustraction, toutes celles qui, d'après le No. 51. déjà cité, se rapportent tant à la droite qui contient les trois derniers points, qu'aux différens systèmes de droites auxiliaires (175.) qui servent à remonter, de ces points, aux six précédens, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on soit parvenu aux intersections mêmes des transversales ap, aq et ar, avec la courbe proposée.

A l'inverse, en partant de la relation qui convient au système total de ces intersections, et en opérant d'une manière analogue à celle qui à été mise en usage dans les No. 175. et 176., mais en substituant toujours les additions aux multiplications, les soustractions aux divisions, on retombera finalement sur les relations descriptives mêmes auxquelles on est parvenu pour le cas de trois transversales dirigées d'une manière quelconque.

Quant à la relation générale dont il est question aux No. 51. et 53., on s'assurera aisément qu'elle n'a pas lieu pour les courbes géométriques, bien qu'elle soit applicable aux simples systèmes de lignes droites; ce qui tient à ce que la diversité des coefficiens numériques dont ses termes sont affectés s'oppose à ce que, dans les opérations ci-dessus, les éliminations de segmens puissent s'opérer par de simples additions ou soustractions des égalités relatives aux transversales rectilignes. Telle est aussi la manière dont on doit entendre, dans le cas présent (Voyez *l'introduction* de ce *mémoire* pag. 27, 29 et 30) que les propriétés concernant les systèmes de lignes droites peuvent s'étendre aux courbes géométriques d'un ordre quelconque.

190. Il résulte d'ailleurs, de ces rapprochemens et de ce qui a été exposé au No. 54. de notre premier mémoire, que, si l'on suppose le faisceau des trois transversales aq, ar, ap coupée en A, B, C respec-

tivement par la droite arbitraire AC, on aura, pour remplacer la relation du No. 188. ci-dessus, cette autre équation

$$AC\Sigma\left(\frac{Br}{ar}\right) = AB\,\Sigma\left(\frac{Cp}{ap}\right) + BC\,\Sigma\left(\frac{Aq}{aq}\right),$$

qui a l'avantage particulier de ne pas devenir identique ou insignifiante quand on suppose le point de concours a à l'infini, ou les transversales ap, aq, ar parallèles. En effet, elle devient simplement alors

$$AC\Sigma(Br) = AB\Sigma(Cp) + BC\Sigma(Aq)$$

AC étant la plus grande des trois distances AB, AC et BC.

191. Je ne m'arrêterai point à montrer comment ces dernières relations peuvent être déduites directement *) de l'équation générale du No. 188., ni comment elles peuvent être étendues à un nombre quelconque de transversales convergeant en un point unique et situées dans un même plan, s'il s'agit de courbes géométriques données dans ce plan, ou d'une manière arbitraire dans l'espace, s'il s'agit de surfaces géométriques en général. Quant à la relation des No. 180. et suiv., qui expriment qu'il y a *involution simple* entre les systèmes de points $p, p' p'' \ldots$ et $P, P' P'' \ldots$, rangés sur la transversale ab, par rapport aux intersections a, b de cette transversale avec les deux autres ac et bc, il est aisé de voir qu'elle se réduit simplement à la suivante, lorsque ces intersections se confondent en une seule a,

$$\Sigma\left(\frac{1}{ap}\right) = \Sigma\left(\frac{1}{aP}\right),$$

ou à cette autre, si on adopte les conventions du No. 190.

$$\Sigma\left(\frac{Cp}{ap}\right) = \Sigma\left(\frac{CP}{aP}\right);$$

---

*) Pour en donner au moins une idée, nous ferons observer que dans les triangles AaC, AaB, BaC, on a, en nommant P la hauteur commune du sommet a sur la transversale ABC,

$$\sin AaC = \frac{AC}{aA.aC}P = AC.aB \times \frac{P}{aA.aB.aC}, \sin AaB = AB.aC \times \frac{P}{aA.aB.aC},$$

$$\sin BaC = BC.aA \times \frac{P}{aA.aB.aC};$$

au moyen de quoi l'équation du No. 188. devient, en supprimant les facteurs ou diviseurs communs à tous ses termes

$$AC\,\Sigma\left(\frac{aB}{ar}\right) = AB\,\Sigma\left(\frac{aC}{ap}\right) + BC\,\Sigma\left(\frac{aA}{aq}\right),$$

relation qui conduira immédiatement à celle dont il s'agit, en observant que

$$aB = ar + Br,\ aC = ap + Bp,\ Aa = aq + Aq.$$

équation qui, à son tour, se réduit à cette égalité plus simple encore, quand le point de concours a, des transversales, passe à l'infini, ou que ces transversales deviennent parallèles entre elles,

$$\Sigma(Cp) = \Sigma(CP).$$

Il est évident d'ailleurs que toutes les autres équations qui nous ont occupé dans ce qui précède et notamment celles du No. 179., subiraient des transformations analogues dans les circonstances dont il s'agit.

192. Supposons que, sur la transversale ac qui contient les m points p, p', p'' .... de la courbe, on choisisse un nouveau point x tel qu'on ait, en tenant compte des signes de position (6. et 17.)

$$\frac{m}{ax} = \frac{1}{ap} + \frac{1}{ap'} + \frac{1}{ap''} + \ldots = \Sigma\left(\frac{1}{ap}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$m.\frac{Cx}{ax} = \frac{Cp}{ap} + \frac{Cp'}{ap'} + \frac{Cp''}{ap''} + \ldots = \Sigma\left(\frac{Cp}{ap}\right),$$

le point x, ainsi défini, sera, d'après le No. 17. déjà cité, le *centre* ordinaire *des moyennes harmoniques*, de tous les points p, p', q'' .... par rapport au pôle a, et il en deviendra le *centre* ordinaire des *moyennes distances*, quand l'origine a des segmens passera à l'infini ou qu'on aura

$$m.Cx = Cp + Cp' + Cp'' + \ldots = \Sigma(Cp).$$

Donc nos deux relations du No. 191. ci-dessus n'expriment autre chose si ce n'est que le système des points P, P', P'' .... qui, dans les hypothèses générales des No. 180. et suivans, formaient une *involution simple* par rapport aux sommets a et b du triangle transversal abc, ont, dans le cas où ce triangle s'évanouit, *le même centre de moyennes harmoniques ou de moyennes distances par rapport au point de concours commun des transversales;* circonstance qui n'altère d'ailleurs en aucune façon la dépendance purement linéaire (183.) que nous avons démontré appartenir à ces deux systèmes et qui sert à faire trouver l'un quelconque des points dont ils se composent au moyen de tous les autres.

Donc aussi les relations générales des No. 188. et 190., expriment que *les centres de moyennes harmoniques ou de moyennes distances des trois groupes de points* p, p', p'' .... q, q', q'' .... r, r', r'' .... *situés à l'intersection de la courbe et des transversales arbitraires* ap, aq, ar, *issues d'un même point* a, *elles expriment, dis-je, que ces centres respectifs sont situés sur une même ligne droite*, comme cela résulte d'ail-

leurs, *à priori*, des considérations exposées dans les No. 51. et 54. du *mémoire sur les centres de moyennes harmoniques.*

193. Ces dernieres considérations suffisent, je pense, pour convaincre pleinement le lecteur que les théorèmes généraux qui se trouvent exposés, dans ce mémoire, sur les centres, axes et plans de moyennes harmoniques des systèmes de points de droites et de plans quelconques, sont susceptibles de s'appliquer, d'une manière analogue, aux lignes et aux surfaces géométriques de tous les degrés, pourvu que les centres de moyennes harmoniques soient censés pris par rapport à des coefficiens numériques égaux entre eux ou à l'unité, conformément à ce qui a été observé plus haut. Mais nous reviendrons sur cette remarque importante dans la partie de ces recherches qui est spécialement consacrée à l'exposition des principales conséquences relatives aux lignes et aux surfaces dont il s'agit.

Pour completter d'ailleurs l'objet que nous nous sommes proposé dans ce paragraphe, il nous reste à présenter quelques observations propres à étendre, de plus en plus, les applications de notre principe fondamental, et à le rendre indépendant, en quelque sorte, de la position relative des transversales.

Examen particulier du cas où les transversales convergent en un même point de la courbe, ou portent des couples d'intersections imaginaires.

194. Toutes les relations métriques, établies depuis le No. 187. et qui se rapportent au cas où les transversales convergent en un même point, deviennent à la fois illusoires ou prennent la forme $\frac{r}{0} = \frac{1}{0}$, quand on suppose que ce point vient à s'appliquer sur la courbe; circonstance qui, d'après les considérations du No. 192. ci-dessus, annonce évidemment que les centres de moyennes harmoniques ou de moyennes distances relatifs à chacune des transversales, se confondent eux-mêmes alors avec le point de concours dont il s'agit. Or il est très digne de remarque que ce ne sont pas seulement les relations métriques qui deviennent illusoires, mais toutes les relations purement descriptives jusqu'ici exposées, et que nous avons vu demeurer applicables aux divers autres changemens d'état de la figure, sans modifications essentielles.

En y réfléchissant un peu, on verra que cette circonstance singulière tient à ce que trois des intersections de la courbe et des transver-

sales, qui d'abord étaient distincts sur chacune d'elles, ont dû se réunir en un seul au point de concours de ces mêmes transversales. En effet, le système de ces points, supposés à une distance infiniment petite les uns des autres, détermine un élément du second ordre de la courbe, et non plus simplement un élément du premier (171.); de sorte que, pour éliminer, des relations primitives, les segmens qui s'y rapportent et dont les réciproques sont infinis, il ne suffit plus de faire intervenir, dans la figure, de simples transversales rectilignes (169. et suiv.) qui contiennent un à un, deux à deux, le points d'intersection dont il s'agit, mais il devient indispensable de prendre, pour transversale auxiliaire unique, une ligne géométrique d'un degré tout au moins égal au second, et qui renferme à la fois ces trois mêmes points considérés toujours comme distincts quoiqu'ils soient réellement confondus en un seul.

195. Supposant, par exemple, que, dans les hypothèses des No. 187. et suiv., le point de concours a des transversales doive venir s'appuyer sur la courbe proposée, en un point pour lequel les intersections p, q, r se confondent elles-mêmes en une seule avec a; on concevra, par ces intersections, une ligne du second ordre quelconque rencontrant, de nouveau, les transversales ap, aq, ar en P', Q', R' respectivement. Cela posé on aura, d'après le No. 190. et en conservant toutes les notations et conventions de ce numéro,

$$AC = \Sigma\left(\frac{Br}{ap}\right) = AB\,\Sigma\left(\frac{Cp}{ap}\right) + BC\,\Sigma\left(\frac{Aq}{aq}\right),$$

$$AC\left(\frac{Br}{ar} + \frac{BR'}{aR'}\right) = AB\left(\frac{Cp}{ap} + \frac{CP'}{aP'}\right) + BC\left(\frac{Aq}{aq} + \frac{AQ'}{aQ'}\right).$$

Soustrayant cette dernière équation de la précédente, il viendra

$$AC\left[\Sigma\left(\frac{Br'}{ar'}\right) - \frac{BR'}{aR'}\right] = AB\left[\Sigma\left(\frac{Cp'}{ap'}\right) - \frac{CP'}{aP'}\right] + BC\left[\Sigma\left(\frac{Aq'}{aq'}\right) - \frac{AQ'}{aQ'}\right].$$

Cette nouvelle relation étant indépendante des segmens qui appartiennent aux points p, q et r, demeure immédiatement applicable au cas où ces points se confondent en un seul avec le pôle a des transversales, et où parconséquent la ligne auxiliaire du second ordre doit devenir osculatrice de la proposée en ce même point. De plus, elle peut servir alors à tracer entièrement cette première ligne par points, puisqu'en laissant aP' et aQ' fixes et fesant varier, de position, autour de a, la troisième transversale aR', elle donnera successivement les diverses valeurs de $\frac{BR'}{aR'}$ qui déterminent la position correspondante du point R'.

Mais, attendu que cette même relation se présente sous une forme différente de celle de l'équation du No. 190., qu'elle est plus compliquée, et qu'elle n'indique point explicitement la dépendance graphique qui lie entre elles les intersections des transversales et des deux courbes, on cherchera à l'y ramener en opérant à peu près comme nous l'avons fait au No. 172., à l'occasion de la relation qui concerne le système des trois transversales quelconques.

Par exemple, si l'on conduit, par les points donnés Q' et R' de la ligne du second ordre, une droite auxiliaire rencontrant en p la troisième transversale aP', et que l'on mène semblablement, par le troisième point P' de cette ligne, une droite arbitraire rencontrant, je suppose, en q et r respectivement les deux autres transversales aQ' et aR', on aura, pour le système de ces nouvelles transversales,

$$AC\left(\frac{Br}{ar}+\frac{BR'}{aR'}\right)=AB\left(\frac{Cp}{ap}+\frac{CP'}{aP'}\right)+AC\left(\frac{Aq}{aq}+\frac{AQ'}{aQ'}\right),$$

relation qui ramène, sur le champ, la précédente à la forme mentionnée, et qui apprend que le système de tous les points p, p', p''.... de tous les points q, q', q'' et de tous les points r, r', r''.... appartiennent à une ligne géométrique du même ordre que la proposée.

196. Nous ne pousserons pas plus loin ces conséquences, parce que ce serait anticiper sur le sujet de la seconde partie de ces mémoires, où nous nous proposons d'appliquer, d'une manière spéciale, les principes exposés dans celle-ci, à la théorie des osculatrices des courbes géométriques de tous les ordres. Toutefois, avant de passer à de nouvelles recherches, nous devons encore remarquer que les relations métriques considérées depuis le No. 17., sont de même que celle du No. 165., indépendantes du mode d'existence propre des intersections de la courbe et des transversales; c'est-à-dire de la réalité ou de la non-réalité absolue de ces intersections. Car, par exemple, s'il arrivait que les deux points r et r' devinssent imaginaires, les sommes de réciproques ou de quotiens

$$\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar'},\quad \frac{Br}{ar}+\frac{Br'}{ar'},$$

relatives à ces points, n'en conserveraient pas moins des valeurs réelles, puisqu'en les mettant sous cette forme

$$\frac{ar+ar'}{ar.ar'},\ \frac{Br.ar'+Br'.ar}{ar.ar'}=AB\left(\frac{ar+ar'}{ar.ar}\right)+2,$$

leurs numérateurs et leurs dénominateurs conserveraient eux-mêmes une

valeur toujours absolue et réelle, ainsi qu'il résulte immédiatement des principes généraux de l'analyse algébrique.

197. Mais, pour laisser le moins possible à désirer sur ce sujet, et ne rien emprunter, pour ainsi dire, d'étranger aux considérations de la géométrie, nous rappellerons que d'après l'observation déjà faite au No. 165., les deux points r et r' peuvent toujours être censés définis par une ligne du second ordre quelconque qui les contiendrait en commun avec la courbe proposée. Or, si on considère une telle ligne comme coupée, à son tour, par les transversales ar et deux autres droites quelconques issues de a, mais dont les intersections seraient toutes réelles et constructibles géométriquement, elle donnera lieu à une nouvelle équation qui permettra de calculer immédiatement les quantités ci-dessus, qu'on obtiendrait également à l'aide des considérations exposées, dans la sect. I., chap. II., du *Traité des propriétés projectives*, sur les sécantes et cordes idéales des lignes du second ordre.

Toutefois, comme ces considérations supposent la section conique auxiliaire donnée *à priori*, il est bon de remarquer qu'on pourra toujours la construire par points sans recourir à des données étrangères à celles qui sont fournies par la courbe proposée, pourvu seulement qu'il ne se trouve pas plus d'un couple de points imaginaires sur chacune des transversales que l'on considère, et qu'on puisse mener, du point de concours de ces transversales, de nouvelles sécantes, dans la courbe, qui la rencontrent en autant de points réels qu'il est marqué par son degré.

Supposons, en effet, que, dans les hypothèses générales du No. 165. ou du No. 187., le couple des points r et r', et, si l'on veut encore, celui des points p et p' qui appartiennent à des transversales distincts, soient imaginaires, tandis que tous les autres soient essentiellement réels; on concevra, par ces quatre points, et par un cinquième point Q, pris arbitrairement sur la transversale qq', une ligne du second ordre qui viendra couper cette même transversale en un second point Q', lequel pourra être déterminé géométriquement, ainsi que tous ses analogues relatifs à des nouvelles transversales arbitraires passant également par Q et dont les intersections, avec la courbe proposée, seraient toutes réelles. Car, si l'on élimine, des relations appartenantes aux intersections de ces transversales et des deux courbes, tous les segmens qui se rapportent aux points imaginaires communs à ces courbes, on obtiendra évidemment d'autres rela-

tions, du premier degré, qui seront propres à calculer ou à construire linéairement les valeurs des segmens qui répondent aux différens points Q' dont il s'agit.

Ces dernières considérations se rattachant à la question générale où l'on se propose de construire géométriquement le système des intersections d'une courbe plane, de degré donné, avec une transversale arbitraire, nous renverrons le lecteur au §. suivant où cette question et ses annexes se trouvent traitées d'une manière tout à fait spéciale.

§. III.

Détermination et tracé des lignes géométriques par leurs systèmes d'intersections avec des transversales rectilignes données etc.

Jusqu'ici nous nous sommes principalement occupés à faire voir comment notre principe fondamental peut être étendu à des situations quelconques des transversales, et nous avons aussi donné un aperçu de son utilité pour la solution de différens problèmes concernant les lignes géométriques, notamment pour le tracé de leurs tangentes et asymptotes; nous nous proposons, dans ce paragraphe, de montrer comment il peut servir à déterminer ou à construire ces lignes elles-mêmes tout entières, quand ou les suppose définies par un nombre suffisant de conditions et spécialement par leurs systèmes d'intersections avec des droites données; cela nous mettra à même de résoudre plusieurs questions ou difficultés qui se sont présentées dans le précédent §., et dont nous avons renvoyé l'examen à celui-ci pour ne pas interrompre l'exposition générale de la méthode.

Tracé des courbes données par trois de leurs systèmes d'intersections en ligne droite et un certain point multiple.

198. Afin de justifier tout d'abord ce qui a été admis, sans démonstration suffisante, dans le No. 168., proposons nous de prouver que tout système de $3m$ points, assujettis aux différentes considérations des N°s. 165. et suivans, appartient nécessairement à une certaine ligne géométrique du degré m, constructible dans toutes ses parties, ou même à une infinité de lignes pareilles, si m surpasse seulement deux unités; car, pour ce qui concerne le cas de $m=1$ et de $m=2$, nous savons déjà (§. 1.) que le système des points proposés, se trouve situé sur une droite

ou une ligne du 2e ordre, uniques et dont le tracé ne présente aucune difficulté.

Pour arriver à la proposition générale où m est quelconque, nous pourrions, en premier lieu, considérer le cas de $m=3$, où la ligne doit être du 3e ordre, puis nous élever successivement à celui de $m=4$, de $m=5$ etc. Mais, comme la marche des raisonnemens reste absolument la même pour le cas général que pour chaque cas individuel, nous supposerons tout d'abord $3m$ points sur les côtés d'un triangle abc, entre lesquels ou ait la relation métrique

$$\frac{(ap)(bq)(cr)}{(bp)(cq)(ar)}=1,$$

assujettie aux conditions déjà mentionnées.

Cela posé, prenons, sur le plan de la figure, un point quelconque s pour pôle des rayons vecteurs ou d'une suite de transversales rectilignes, telles que sd, rencontrant les côtés ab, bc, ac du triangle abc aux points d, e, f respectivement, et la courbe cherchée, si tant est qu'elle existe, aux points inconnus x, x', x'' .... supposés en nombre m. Considérons successivement cette courbe comme transversale des triangles daf, dbe, fce, nous aurons, par hypothèse et d'après le No. 165., les trois nouvelles relations

$$\frac{(ap)(dx)(fr)}{(ar)(dp)(fx)}=1,\quad \frac{(bp)(dp)(ex)}{(bp)(dx)(eq)}=1,\quad \frac{(cr)(eq)(fx)}{(cq)(ex)(fx)}=1,$$

qui reviennent aux suivantes

$$\frac{(dx)}{(fx)}=\frac{(ar)(dp)}{(ap)(fr)},\quad \frac{(cx)}{(dx)}=\frac{(bq)(cq)}{(bq)(dp)},\quad \frac{(fx)}{(cx)}=\frac{(cq)(fr)}{(cr)(eq)},$$

et dont l'une quelconque est comportée par les deux autres en vertu de l'équation précédente, ce qui les réduit à deux relations distinctes devant servir à construire les m points x, x', x'' .... au moyen de tous les points donnés.

Cette dernière circonstance annonce suffisamment que le problème restera complétement indéterminé tant qu'on ne fera pas, sur le système des points x, x', x'' ...., quelqu'autre supposition qui rende le nombre des conditions ou des relations distinctes, équivalent à celui des inconnues, en admettant, par exemple, que le point s, qui sert de pôle aux transversales variables df ou sx, soit un point multiple, de la courbe, du $(m-2)^e$ ordre, ou que $m-2$ des points x, x', x'' .... soient constamment confondus en un seul avec ce pôle, de sorte qu'il n'en reste

plus que deux, tels que x et x' par exemple, à déterminer sur chaque transversale.

199. Désignant, en effet, par (dx), (ex), (fx) les produits $dx.dx'$, $ex.ex'$, $fx.fx'$ relatifs à ces points, les dernières des relations ci-dessus deviendront

$$\frac{(dx)\overline{ds}^{m-2}}{(fx)\overline{fs}^{m-2}}=\frac{(ar)(dp)}{(ap)(fr)},\quad \frac{(ex)\overline{es}^{m-2}}{(dx)\overline{ds}^{m-2}}=\frac{(bp)(eq)}{(bq)(dp)},\quad \frac{(fx)\overline{fs}^{m-2}}{(ex)\overline{es}^{m-2}}=\frac{(cq)(fr)}{(cr)(,q)},$$

équations dont deux quelconques doivent suffire pour construire les points x' et x'' sur chaque rayon vecteur, et qu'on peut d'ailleurs mettre sous une forme plus simple, en supposant qu'on ait tracé le système des cordes ou sécantes indéfinies qr, $q'r'$, $q''r''$.... qui rencontrent en P, P', P''.... respectivement la transversale arbitraire es, puis le système des sécantes indéfinies pr, $p'r'$, $p''r''$.... rencontrant en Q, Q', Q''.... cette même transversale, enfin celui des sécantes pq, $p'q'$, $p''q''$.... qui la rencontrent aux points R, R', R''.... respectivement.

Car, en considérant ces trois systèmes distincts de sécantes comme autant de lignes, de degré m, transversales des triangles daf, dbe, fce qui leur correspondent, puis combinant les relations auxquelles ces sytèmes donnent lieu, avec les précédentes, à peu près comme on l'a fait dans le cas du No. 179., on obtiendra les nouvelles équations

$$\frac{(dx)\overline{ds}^{m-2}}{(fx)\overline{fs}^{m-2}}=\frac{(dQ)}{(fQ)},\quad \frac{(ex)\overline{es}^{m-2}}{(dx)\overline{ds}^{m-2}}=\frac{(eR)}{(dR)},\quad \frac{(fx)\overline{fs}^{m-2}}{(ex)\overline{es}^{m-2}}=\frac{(fP)}{(eP)},$$

qui indiquent que le système des points x', x'', s, s, s, ... en nombre m, combiné successivement avec le système des m points Q, Q', Q''.... celui de m points P, P', P''.... forme autant d'involutions simples (181.) par rapport aux couples de points respectifs d et f, e et d, f et e.

200. Afin d'obtenir des relations qui indiquent plus explicitement encore, la dépendance purement descriptive qui lie les points x' et x'' aux points donnés, nous chercherons à éliminer les segmens qui leur appartiennent des relations ci-dessus, en imaginant, par ces deux premiers points, une ligne du second ordre qui contienne en même tems trois quelconques p, q, r des derniers, appartenans à des côtés différens du triangle abc.

Nommons, à cet effet, p_1, q_1, r_1, les points où la ligne auxiliaire dont il s'agit rencontre, de nouveau, ces côtés respectifs, et supposant

qu'on ait prolongé indéfiniment les sécantes ou cordes $r_1 q_1$, $p_1 r_1$, $p_1 q_1$ jusqu'à leur rencontre en P_1, Q_1 et R_1, avec la transversale $s\,d\,x\,x'$, on aura évidemment, en raisonnant comme ci-dessus,

$$\frac{(dx)}{(fx)} = \frac{dQ.dQ_1}{fQ.fQ_1}, \quad \frac{(ex)}{(dx)} = \frac{eR.eR_1}{dR.dR_1}, \quad \frac{(fx)}{(ex)} = \frac{fP.fP_1}{eP.eP_1},$$

équations qui, combinées avec les précédentes, donnent celles-ci

$$\frac{dQ_1.\overline{ds}^{m-2}}{fQ_1.\overline{fs}^{m-2}} = \frac{(dQ')}{(fQ')}, \quad \frac{eR_1.\overline{es}^{m-2}}{dR_1.\overline{ds}^{m-2}} = \frac{(eR')}{(dR')}, \quad \frac{fP_1.\overline{fs}^{m-2}}{eP_1.\overline{es}^{m-2}} = \frac{(fP')}{(eP')},$$

dans lesquelles n'entrent plus les segmens relatifs aux points x, x', P, Q, R, et qui indiquent que le système des $m-1$ points Q, s, s, s, ... et des $m-1$ points Q', Q''.... sont en involution par rapport aux points d et f; que le système des $m-1$ points R, s, s, s, ... et celui des $m-1$ points R', R''.... sont pareillement en involution par rapport à e et d etc.

Il suit de là donc que chacun des points P_1, Q_1, R_1, dont dépend la ligne du second ordre qui contient x et x', pourra être construit linéairement (155. et suiv.) au moyen de tous ceux qui lui correspondent et avec lesquels il est directement en involution. Or je dis que la connaissance des trois points dont il s'agit, fixe entièrement la position des points p_1, q_1, r_1, de cette ligne du second ordre qui, devant, en outre, passer par les points donnés p, q, r est elle-même complétement déterminée de position aussi bien que x et x'.

201. Toute la question consiste évidemment à construire un triangle $p_1 q_1 r_1$ dont les sommets s'appuient respectivement sur les trois droites pp_1 ou ab, qq_1 ou bc, rr_1 ou ac prolongées indéfiniment, et dont la direction des côtés passe par les points P_1, Q_1, R_1 pris dans l'ordre assigné par les considérations qui précèdent. Supposant donc, un instant, que, l'un quelconque r_1 de ses sommets devenant *libre*, c'est-à-dire cessant d'être assujetti à demeurer sur la droite rr_1 ou ac qui lui correspond, on le fasse varier de position en l'assujettissant du reste, à toutes les autres conditions, ce sommet décrira, comme on sait, une nouvelle ligne droite passant par le point de rencontre des directrices ab, bc des deux autres sommets, et qui coupera ac au point r_1, l'un des points cherchés de l'auxiliaire du second ordre, et dont les analogues s'obtiendront sur le champ par le simple tracé des droites $r_1 Q_1$, $r_1 P_1$.

Quant à la construction définitive des points x' et x'', on l'obtiendra, soit par le tracé effectif et par points (145. et suiv.) de la ligne du second ordre auxiliaire dont il s'agit, soit en opérant directement sur les points p, q, r, p_1, q_1, r_1 qui lui appartiennent d'après la méthode générale du No. 344. du *Traité des propriétés projectives*, méthode qui, elle même, repose sur la théorie des *centres* et *axes d'homologie* des lignes du second ordre, développée dans le chap. 1er de la sect. III. de cet ouvrage.

202. Revenant maintenant à la question proposée en premier lieu: de faire passer une ligne de degré m par les 3 systèmes, de m points, p, p', p'' .... q, q', q'' .... r, r', r'', définis au No. 198., et qui ait le pôle s des rayons vecteurs pour point multiple de l'ordre $m-2$, je remarque 1° que les constructions précédentes n'assignent que deux seuls points x et x' sur chacune de ces transversales; 2° que la suite de tous ces points forme naturellement une ligne continue; 3° que cette ligne passe effectivement par les $3m$ points donnés, puisque les diverses relations qui définissent les points x et x' sur chacune des transversales sd, prouvent qu'aucun des segmens relatifs aux premiers points, ne peut devenir nul sans qu'en même tems, l'un de ceux qui correspondent aux derniers et qui a précisément la même origine, ne devienne également nul; 4° enfin que cette même ligne courbe ne peut rencontrer en aucun autre point que ceux dont il s'agit les trois droites ab, bc et ac qui les contiennent m par m puisque, par exemple, si le point x' venait à se confondre avec le point d, sur la droite ab, on aurait $dx' = 0$; ce qui exigerait, en vertu des relations dont il s'agit, que l'un, au moins, des segmens dp, dp', dp'' .... devînt nul à son tour, ou que x' se confondît avec l'un des points correspondans.

Donc, en vertu du principe de continuité (voyez *l'introduction*), la ligne tracée comme on vient de le dire, est bien une ligne du degré m seulement, ayant le pôle s pour point multiple de l'ordre $m-2$; ce qu'on prouverait également et de plusieurs autres manières, en démontrant, par exemple, que cette ligne n'a que $m-2$ branches passant par le point s etc. Donc enfin il existe une infinité de lignes pareilles contenant le système des points p, p', p'' .... q, q', q'' .... r, r', r'' ...., que définit l'équation générale du No. 165., pourvu seulement que le nombre m, qui marque le degré de la courbe, soit supérieur à 2, conformément à la remarque qui en a été faite au No. 198. ci-dessus.

Tracé des lignes dont on connaît un point multiple de l'ordre le plus élevé. Réflexions sur la nature des points multiples en général.

203. Les discussions auxquelles nous venons de nous livrer suffisent, sans doute, pour prouver que la relation fondamentale du No. 165., non seulement exprime une propriété exclusive (168.) des lignes géométriques, mais encore les définit d'une manière tellement caractéristique, que, nonobstant son universalité, elle a toute l'aptitude nécessaire pour les construire par points sous des conditions données, ainsi que nous avons déjà vu, dans les *préliminaires*, que la chose avait lieu pour les simples lignes du second ordre. Mais, afin de mettre cette conclusion dans tout son jour, il convient de ne pas s'en tenir à la solution du problème particulier qui vient de nous occuper, et de montrer, par une suite d'exemples, toute la variété des ressources que peut offrir l'analyse des transversales, soit pour la construction effective des lignes géométriques de tous les degrés, soit pour la résolution des différens problèmes qui se rapportent aux intersections de ces lignes avec des droites de position donnée.

D'abord nous remarquerons que le problème qui vient d'être traité, rentre dans la question générale où il s'agit de construire graphiquement ou par le calcul, tous les points d'une ligne plane géométrique dont on connaît un point multiple d'une certaine espèce avec un nombre suffisant de ses systèmes d'intersections par des transversales rectilignes données. Or la première en ordre, de toutes ces questions, est celle où le nombre qui indique la multiplicité du point en question est seulement inférieur d'une unité à celui qui exprime le degré de la courbe; car, il paraît assez évident, d'après la définition la plus générale des lignes géométriques ou d'après le principe de continuité, qu'une telle ligne ne saurait avoir un point multiple qui surpassât ou égalât même son degré, à moins que, dans ce dernier cas, elle ne se réduisît à un point unique on à un simple faisceau de droites qui convergent en un tel point, à peu près comme il arrive, dans certains cas, pour les simples lignes du second ordre.

En effet, toute ligne qui passe par un point multiple devant être censée rencontrer la courbe en autant de points, confondus en celui-là, qu'il est marqué par l'ordre de sa multiplicité ou par le nombre des branches réelles ou imaginaires qui elles-mêmes sont censées y passer, il est bien clair que ce nombre ne saurait excéder le degré de la courbe: et ce raisonnement fort simple peut aussi servir à faire découvrir, à l'avance, l'in-

compatibilité d'existence de certains points singuliers, ainsi que d'autres affections générales des lignes géométriques.

Ainsi, par exemple, on aperçoit, sur le champ, qu'une telle ligne ne saurait avoir deux points multiples dont la somme des indices surpassât son degré, ou, en général, plusieurs points de ce genre situés en ligne droite et dont la somme des indices excéderait ce même degré. On voit pareillement encore que toute droite, passant par un point multiple de l'ordre n, tandis que la courbe est elle-même du degré m, ne saurait rencontrer cette courbe en plus de $m-n$ autres points distincts du premier, et qu'en vertu du principe de continuité, leur nombre doit précisément être censé égal à $m-n$, etc.

204. Ces notions préliminaires étant établies ou rappelées, nous passerons à la solution du problème où il s'agit de construire les lignes géométriques, du degré m, dont un point multiple de l'ordre $m-1$, est donné, en observant qu'on ne saurait ici assujettir la courbe à passer, comme dans le cas précédent, par $3m$ points quelconques situés m par m sur trois droites arbitraires et satisfaisant d'ailleurs aux conditions du No. 165.; nous bornant donc au double système de m points, $p, p', p'' \ldots . q, q', q'' \ldots .$ situés respectivement, mais d'une manière entièrement arbitraire, sur les droites ou transversales indéfinies ab et ac qui se rencontrent en a, et nommant s le point multiple, de l'ordre $m-1$, qu'on suppose donné sur le plan de ces droites, on concevra, par s, une troisième transversale arbitraire ac rencontrant en c et b respectivement, les deux premières, et la courbe en un nouveau point x distinct de s et qu'on déterminera facilement en considérant le triangle abc comme transversal de cette courbe: on aura, en effet, en vertu principe fondamental (165.),

$$\frac{(ap)\,(cq)\,\overline{bs}^{m-1}\,bx}{(bp)\,(aq)\,\overline{cs}^{m-1}\,cx} = 1,$$

équation qui donnera immédiatement le rapport de bx à cx, et par suite (165.) la position du point inconnu x. Fesant donc varier la direction de la transversale bc autour de s comme pôle, la suite des points x ainsi déterminés sur chacune d'elles, tracera une ligne continue qui sera évidemment du degré m, passera une seule fois (202.) par chacun des $2m$ points donnés, et $m-1$ fois par le pôle s des transversales.

Parmi les différentes manières de construire linéairement (175. et suiv.), le point inconnu x, nous choisirons la suivante qui nous paraît une des plus simples et des plus symétriques.

Menons, une fois pour toutes, les droites pq, $p'q'$, $p''q''$ .... rencontrant la transversale arbitraire bc aux m points n, n', n'' qui ainsi seront connus; on aura, en considérant, à son tour, le système de ces droites comme une ligne géométrique, du degré m, transversale du triangle abc,

$$\frac{(ap)(cq)(bn)}{(bp)(aq)(cn)} = 1,$$

équation qui, étant comparée à la précédente, donne immédiatement cette autre

$$\frac{\overline{bs}^{m-1}\,bx}{\overline{cs}^{m-1}\,cx} = \frac{(bn)}{(cn)},$$

exprimant (181.) que le système de m points donnés n, n', n'' .... et celui des $m-1$ points confondus en s, joints au point x sont en *involution simple* par rapport aux deux points b et c.

Donc on obtiendra immédiatement le point x dont il s'agit, par les constructions linéaires du No. 183., en inscrivant, par exemple, dans l'angle bac, ou dans tout autre angle formé par deux droites issues de b et c, un polygone quelconque, de $2m$ sommets, dont les côtés de rang pair passent respectivement par les points n, n', n'' ...., et dont les côtés de rang impair, un seul excepté, passent de même par les $m-1$ points confondus en s, c'est-à-dire viennent tous converger en ce point; car le dernier côté ira naturellement rencontrer bc au point x demandé.

205. Telle est la solution fort simple du problème que nous nous sommes proposé en dernier lieu, et de laquelle il nous serait facile d'ailleurs de déduire un bon nombre de propriétés intéressantes concernant les lignes géométriques qui ont un point multiple d'une nature quelconque mais de l'ordre le plus élevé, s'il nous était ici permis d'insister sur de pareils corollaires.

Nous disons *point multiple d'une nature quelconque*, parcequ'il est évident, en effet, que le caractère général et purement géométrique que nous leur attribuons de représenter, sur chacune des transversales qui y passent, un nombre invariable d'intersections de la courbe, égal à celui qui exprime leur ordre ou espèce, que ce caractère général, disons-nous, comprend aussi bien les points *isolés* ou *conjugués*, dont les tangentes sont toutes imaginaires, que les points de *croisement* véritables dont les tangentes sont toutes réelles, et qu'il n'exclut, en aucune façon, soit les points dont les tangentes sont en partie réelles et en partie imaginaires, soit ceux dont les tangentes se trouvent confondues deux par

deux, trois par trois etc., ainsi qu'il arrive aux points de *rebroussement*, *d'inflexion* ou de *serpentement* de différentes espèces, points sur lesquels nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir dans le §. suivant.

Du reste, sans prétendre entamer ici cette discussion relative aux points singuliers, nous devons cependant faire remarquer qu'elle est étroitement liée avec la question qui consiste à déterminer le système total des tangentes en ces points, question qu'on pourra toujours aborder directement et sans hésitation, comme on va le voir, au moyen des principes exposés dans ce qui précède; cest à dire en cherchant à lier entre elles les intersections de certaines droites avec ces tangentes ou avec les différentes branches de la courbe, par des relations métriques ou descriptives convenables et qui permettent de construire les unes de ces intersections par les autres.

Relations qui lient les tangentes des points multiples aux systèmes d'intersections en ligne droite. Tracé des courbes au moyen de ces tangentes.

206. Supposant, par exemple, dans la première et la dernière des équations du No. 204., bx et cx respectivement égaux à bs et à cs, de sorte que la position de la transversale bc doive être telle qu'on ait

$$\frac{(ap)(cq)}{(bp)(aq)} = \frac{\overline{cs}^m}{\overline{bs}^m} = \frac{(bn)}{(cn)};$$

chacune de ses positions répondra à l'une des tangentes du point s, et cette tangente pourra être réelle ou imaginaire selon que les points b et c, qui la déterminent, seront eux mêmes possibles ou impossibles d'après la constitution des données du problème.

Mais, afin de n'avoir qu'un seul de ces points inconnus à considérer, on pourra éliminer, des relations ci-dessus, les segmens qui concernent le second de ces mêmes points, en remplaçant, par exemple, le système de m droites pq, $p'q'$, $p''q''$.... par celui de m droites sq, $s'q'$, $s''q''$.... qui rencontrent en o, o', o''.... respectivement la direction prolongée de la transversale ab. Considérant, en effet, à son tour, ce second système de droites comme une ligne du même ordre, transversale du triangle abc, il donnera lieu à la nouvelle équation

$$\frac{(ao)(cq)\overline{bs}^m}{(bo)(aq)\overline{cs}^m} = 1,$$

qui réduit la première des précédentes à celle-ci

$$\frac{(ap)}{(bp)} = \frac{(ao)}{(bo)};$$

laquelle exprime encore que le système des points donnés p, p', p''.... et celui des points o, o', o''.... sont en involution simple (181.) par rapport aux points a et b, dont le dernier est seul inconnu.

Néanmoins le point dont il s'agit ne saurait être immédiatement déterminé par les constructions linéaires qui nous ont servi précédemment (204.) à trouver x, attendu qu'ici b n'est point unique et dépend de la résolution d'un problème d'ordre supérieur au premier, ou, ce qui revient au même, du tracé d'une courbe auxiliaire qui, par ses intersections avec ab, doit donner simultanément les $m-1$ positions du point b. Or, quoique nous possédions, dès à présent même, tous les élémens de cette résolution, nous ne l'entreprendrons pas parcequ'elle se reproduira dans la seconde partie de ces recherches, où nous étudierons, d'une manière plus spéciale, les propriétés des systèmes de points en involution, et où nous aurons à traiter diverses questions qui s'y rapportent.

207. Mais on peut aborder, d'une manière plus directe encore, le problème qui nous occupe sur les tangentes des points singuliers dont la position est donnée, en se basant sur les relations générales qui ont été mentionnées dans le No. 173. du précédent §. Supposant, en effet, que le sommet c du triangle abc considéré dans les No. 171. et 172., soit amené en un point multiple s de la courbe, dont l'ordre soit marqué par le nombre $m-n$ inférieur à celui m qui représente le degré de cette courbe; on aura évidemment, en opérant comme on l'a fait (171.) pour le cas d'une seule tangente, et représentant d'ailleurs par P, P', P''.... les intersections des $m-n$ tangentes en s, avec le côté opposé ab du triangle abc devenu asb, on aura, dis-je, la relation

$$\frac{(ap)(bq)(sr)(bP)}{(bp)(sq)(ar)(aP)} = 1, \text{ ou } \frac{(bP)}{(aP)} = \frac{(bp)(sq)(ar)}{(ap)(bq)(sr)},$$

dans laquelle (bq) et (sq), (ar) et (sr) représentent les produits de segmens relatifs aux n intersections distinctes de la courbe avec les côtés respectifs as et bs du triangle, et dont on pourra se servir pour déterminer l'une quelconque des tangentes en s, au moyen des $m-n-1$ autres, mais qui sera insuffisante pour les donner toutes à la fois; de sorte qu'il sera indispensable de recourir à de nouvelles relations analogues, en remplaçant, par exemple, sb par d'autres transversales telles que sb_1, sb_2...., qui seraient également assujetties à passer par le point

multiple, et rencontreraient, je suppose, aux points b_1, b_2, ..., la base ab du triangle asb primitivement considéré.

Nommant, en effet, q_1, q'_1, q''_1, ... les $m-n$ intersections de la courbe avec bs_1; q_2, q'_2, q''_2.... ses $m-n$ intersections avec bs_2, et ainsi des autres, on aura la suite d'équations

$$\frac{(b_1P)}{(aP)} = \frac{(b_1p)(sq_1)(ar)}{(ap)(b_1q_1)(sr)}, \quad \frac{(b_2P)}{(aP)} = \frac{(b_2p)(sq_2)(ar)}{(ap)(b_1q_1)(sr)}, \quad ....$$

dont les seconds membres sont censés donnés *à priori* par la construction ou le tracé effectif de la courbe, et qu'il faudra prendre en nombre suffisant pour déterminer complètement, de position, les n tangentes inconnues sP, sP', sP'', ... Or nous aurons bientôt occasion de traiter un système d'équations absolument semblables, et de faire voir que sa résolution dépend du tracé d'une courbe auxiliaire dont le degré est précisément égal au nombre des tangentes ou des points à déterminer.

208. D'ailleurs on pourra, si on le veut, remplacer ces équations par une infinité d'autres également propres à fixer la position des tangentes, soit en en éliminant (169. et suiv.) tous les segmens relatifs aux $m-n$ points P, P', P'' ...., soit en fesant disparaître ceux qui concernent les intersections mêmes des transversales sa, sb, sb_1, sb_2....

Conduisant, par exemple, de nouvelles droites qr, $q'r'$, $q''r''$.... par les intersections qui appartiennent aux côtés sa, sb du premier des triangles ci-dessus, et nommant π, π', π''.... leurs intersections respectives avec ab; on aura, en tant que leur système peut être considéré comme une ligne, de degré n, transversale du triangle sab,

$$\frac{(ar)(sq)(b\pi)}{(sr)(bq)(a\pi)} = 1 \text{ ou } \frac{(b\pi)}{(a\pi)} = \frac{(bq)(sr)}{(sq)(ar)},$$

équation qui réduit la première de celles ci-dessus à cette autre

$$\frac{(bP)}{(aP)}\frac{(b\pi)}{(a\pi)} = \frac{(bp)}{(ap)},$$

d'une forme plus simple, et qui exprime encore (181.) que le système total de m points P, P', P''.... π, π', π'', ... et celui des m points p, p', p''.... sont en involution simple par rapport à a et b.

209. Ces dernières relations et toutes celles qu'on pourrait obtenir de transformations analogues, n'offrant aucun avantage particulier sur les précédentes, du moins quant à la solution du problème qui nous occupe, il serait assez inutile d'insister. Seulement, avant d'entamer d'autres matières, nous ferons remarquer que, lorsque $n-1$ ou que le point mul-

tiple s est de l'ordre le plus élevé, ce qui réduit effectivement à une seule les intersections de la courbe et de chacune des transversales sa, sb, sb_1, sb_2, ..., les dernières relations dont il s'agit, et qui concernent l'involution de $2m$ points, mettent en état de construire successivement et par des méthodes purement linéaires (183.), ces différentes intersections, au moyen de l'une quelconque d'entre elles, quand les $m-1$ tangentes en s et les m intersections p, p', p'' ...., relatives à la transversale ab, sont données *à priori*.

Quant au cas où la multiplicité du point s est quelconque, on peut prévoir que le tracé de la courbe, ou la construction de ses n intersections avec chacune des transversales sb, sb_1, sb_2...., se rapporterait à une question d'un ordre supérieur au premier, et dont la solution exigerait que le nombre des systèmes d'intersections données ou des relations métriques distinctes qui les lient aux intersections inconnues, fût égal à celui de ces dernières. Mais je me dispenserai de rapporter ces nouvelles relations qui sont faciles à découvrir d'après ce qui précède, et dont la constitution, absolument semblable à celles des équations considérées à la fin du No. 207. indique le même genre de solution; j'ai seulement prétendu signaler en passant, quelques-unes des questions qui se rattachent au problème général du tracé des lignes géométriques par leurs systèmes d'intersections avec des droites données; problème dont la résolution générale fait l'objet spécial de ce §., et dépend, comme on va le voir, d'un système d'équations analogues encore à celles dont il s'agit.

Relations métriques fondamentales dont dépendent les problèmes relatifs au tracé des courbes géométriques, et à la détermination de leurs systèmes d'intersections par des droites données.

210. Jusqu'ici nous n'avons encore traité que les cas élémentaires où le nombre des systèmes de points donnés en ligne droite, est simplement égal à deux ou à trois, et nous avons vu (201.) et (204.) que, dans le premier, le tracé de la courbe, supposée du degré m, ne peut s'effectuer qu'autant qu'on se donne, en outre, arbitrairement un point multiple de cette courbe dont l'indice soit $m-1$; et dans le second, un point multiple dont l'indice soit $m-2$: il est évident que des circonstances analogues auront lieu à mesure qu'augmentera le nombre des systèmes d'intersections données en ligne droite; c'est-à-dire que l'indice du point multiple devra diminuer successivement d'autant d'unités, en sorte qu'au-lieu de 1 ou de 2 points, sur chacune des transversales qui y passent,

on en aura successivement 3, 4, 5, ... ou, en général, n à considérer si l'indice de multiplicité est $m-n$ et le nombre des systèmes de points donnés $n+1$. On doit donc s'attendre encore (209.) à ce que la question se complique de plus en plus, et qu'au lieu de lignes auxiliaires du premier et du second degré à construire, ainsi qu'il arrive pour les cas précités, on soit obligé de recourir à des lignes de degrés de plus en plus élevés.

Comme le nombre n ne saurait, tout au plus, qu'être égal à m, on peut juger, d'après l'analogie, que le cas le plus général de la question qui nous occupe, est celui où le nombre des systèmes donnés d'intersections de la courbe avec des droites arbitraires, serait égal à $m+1$, c'est à dire supérieur d'une unité à celui qui marque le degré de cette courbe; en vertu de quoi la question se trouve ramenée à celle où il s'agit de construire les m intersections de cette même courbe avec une nouvelle transversale ou une suite de nouvelles transversales quelconques. Mais, comme, d'une autre part, il est toujours permis de supposer, sans rien statuer de particulier sur la nature de la courbe, que ces dernières transversales soient toutes conduites par un même point ou pôle choisi à volonté sur son contour, il est clair que nous n'ôterons rien à la généralité de la question en nous arrêtant au cas de $n = m-1$, où le nombre des transversales rectilignes, dont les intersections sont données *à priori*, est précisément égal au degré de la courbe; or ce cas est d'autant plus remarquable qu'il se rapporte à un problème que nous avons déjà implicitement résolu dans ce qui précède (202.), pour des courbes dont le degré m serait simplement le 3ème.

Du reste, on peut juger, par ce qui va suivre, que la solution des problèmes relatifs aux deux cas généraux dont il s'agit est fondée absolument sur les mêmes principes, et comprend naturellement celle de tous les cas particuliers où le nombre des systèmes de points donnés en ligne droite est inférieur à celui du degré de la courbe à tracer; nous pouvons donc borner nos investigations à ce qui concerne le problème général qui suit:

Les m^2 intersections d'une ligne plane, du degré m, avec m droites arbitraires étant données à priori, tracer cette ligne en l'assujettissant, de plus, à passer par un dernier point choisi à volonté sur son plan; ou, ce qui revient au même, déterminer successivement ses $m-1$ intersections nouvelles avec chacune des transversales arbitraires issues du point dont il s'agit?

(La suite dans le cahier prochain.)

19.

De transformatione integralis duplicis indefiniti

$$\int \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi}$$

in formam simpliciorem

$$\int \frac{\partial\eta\,\partial\vartheta}{G-G'\cos\eta\cos\vartheta-G''\sin\eta\sin\vartheta}.$$

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. Regiom.)

Introductio.

1.

Facile probatur, integrale huiusmodi

$$\int \frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi+c\sin\varphi+d\cos\varphi^2+e\cos\varphi\sin\varphi+f\sin\varphi^2},$$

in quo expressio, quae sub radicali invenitur, functio est rationalis integra secundi ordinis ipsorum $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, casu quo expressio illa pro omnibus anguli φ valoribus realibus valorem positivum servat, per substitutionem realem formae

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{m+n\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta}{1+p\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta},$$

ad hoc simplicioris formae integrale revocari posse

$$\frac{1}{M}\int \frac{\partial\eta}{\sqrt{(1-k^2\sin\eta^2)}},$$

in quo insuper $k^2<1$: qua forma hodie integralia elliptica exhiberi solent.

Ponatur enim

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = x,$$

integrale illud

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(a+b\cos\varphi+c\sin\varphi+d\cos\varphi^2+e\cos\varphi\sin\varphi+f\sin\varphi^2)}},$$

abire videmus in integrale sequentis formae:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{g+hx+ix^2+kx^3+lx^4}},$$

in quo expressio sub radicali dignitates omnes ipsius x continet integras positivas usque ad quartam; cuiusmodi integrale Eulerus olim docuit, adhibita substitutione

$$x = \frac{m+ny}{1+py},$$

in simplicius transformari posse hoc

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{(q+ry^2+sy^4)}},$$

in quo sub radicali impares dignitates variabilis non inveniuntur. Substitutionem autem adhibitam

$$x = \frac{m+ny}{1+py}$$

Cl. Legendre demonstravit omnibus casibus realem accipi posse, atque integralia ita reducta facillime revocari ad dictam formam

$$\frac{1}{M}\int \frac{\partial y}{\sqrt{(1-k^2\sin\eta^2)}},$$

idque variis modis pro indole ipsarum q, r, s. E quibus modis est substitutio

$$y = \sqrt[4]{\left(\frac{q}{s}\right)}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\eta,$$

qua adhibita prodit:

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{(q+ry^2+sy^4)}} + \frac{1}{2\sqrt[4]{(qs)}}\cdot\int \frac{\partial y}{\sqrt{\left(1-\frac{2\sqrt{(qs)}-r}{4\sqrt{(qs)}}\sin\eta^2\right)}},$$

quod integrale forma assignata gaudet. Junctis substitutionibus, quibus integrale propositum in formam illam transformatum est, invenimus, siquidem loco $n\sqrt[4]{\left(\frac{q}{s}\right)}$, $p\sqrt[4]{\left(\frac{q}{s}\right)}$ simpliciter n, p scribimus, substitutionem formae propositae:

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{m+n\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\eta}{1+p\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\eta}.$$

2.

Ut substitutio assignata realis sit, in antecedentibus supponi debet, q, s eodem signo affectas esse. Quod facile probatur locum habere, quoties expressiones sub radicali aut pro nullo aut pro quatuor valoribus realibus variabilis evanescant.

Expressiones enim binae

$$a + b\cos\varphi + c\sin\varphi + d\cos\varphi^2 + e\cos\varphi\sin\varphi + f\sin\varphi^2$$

atque

$$g + ry^2 + sy^4$$

eodem tempore evanescunt, idque pro eodem numero valorum realium et imaginariorum variabilium. Quoties vero q, s signa opposita habent, evanescit haec pro valoribus realibus ipsius y^2 uno positivo, uno negativo; unde valores variabilium y, φ, pro quibus expressiones illae evanescunt, eo casu duo reales, duo imaginarii forent.

Porro facile probatur, altero casu, quo expressio sub radicali pro nullo valore reali variabilis evanescat sive valorem semper positivum servet, modulum integralis elliptici, ad quod integrale propositum revocatur, semper realem unitate minorem effici posse.

Quem in finem observo, substitutionem nostram

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{m+n\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta}{1+p\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta}$$

formam non mutare, ubi loco $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta$ ponatur

$$\frac{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta},$$

sive loco η ponatur $90^\circ-\eta$. Quo facto integrale reductum abit in

$$\frac{1}{\sqrt{(2\sqrt{(qs)}+r)}}\int\frac{\partial\eta}{\sqrt{\left(1-\frac{r-2\sqrt{(qs)}}{r+2\sqrt{(qs)}}\sin\eta^2\right)}},$$

ita ut quadratum moduli invenias

$$\text{aut } k^2=\frac{2\sqrt{(qs)}-r}{4\sqrt{(qs)}} \quad \text{aut } k^2=\frac{r-2\sqrt{(qs)}}{r+2\sqrt{(qs)}}.$$

Quoties vero expressio sub radicali in integrali proposito valorem semper positivum habet, radices y^2 aequationis quadraticae

$$q+ry^2+sy^4=0$$

aut imaginariae fiunt, aut certe negativae. Casu primo fit $rr<4qs$, ideoque modulus

$$k=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{(qs)}-r}{4\sqrt{(qs)}}\right)}$$

realis unitate minor. Casu secundo fit $rr>4qs$ simulque r positiva, ideoque eo casu modulus

$$k=\sqrt{\left(\frac{r-2\sqrt{(qs)}}{r+2\sqrt{(qs)}}\right)}$$

realis unitate minor. Unde, quod probari debuit, siquidem expressio sub radicali valorem semper positivum habet, per dictam substitutionem omnibus casibus ad integrale ellipticum pervenire licet, cuius modulus realis unitate minor est.

Altero casu, quo denominator integralis pro quatuor valoribus realibus variabilis evanescit, fit $rr>4qs$ simulque r negativa. Quo casu ut modulus realis unitate minor existat, cum ad novas substitutiones confugiendum sit, plerumque eum casum alia ratione tractare praestat.

3.

E relatione, quae inter $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta$ obtinet,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{m + n\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta}{1 + p\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta},$$

valores ipsorum $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ fluunt huiusmodi:

$$\cos\varphi = \frac{\beta - \beta'\cos\eta - \beta''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$

$$\sin\varphi = \frac{\gamma - \gamma'\cos\eta - \gamma''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta}.$$

Quibus in expressionibus inter coëfficientes α, β etc. certae quaedam aequationes conditionales locum habere debent, cum identice fieri debeat:
$(\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta)^2 = (\beta - \beta'\cos\eta - \beta''\sin\eta)^2 + (\gamma - \gamma'\cos\eta - \gamma''\sin\eta)^2$.
Quod etiam inde patet, quod omnes a tribus m, n, p pendent. Vice versa facile probatur, quod infra videbimus, quoties per relationes, quae inter α, β etc. locum habent, identice sit:
$(\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta)^2 = (\beta - \beta'\cos\eta - \beta''\sin\eta)^2 + (\gamma - \gamma'\cos\eta - \gamma''\sin\eta)^2$,
ideoque simul ponere liceat:

$$\cos\varphi = \frac{\beta - \beta'\cos\eta - \beta''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$

$$\sin\varphi = \frac{\gamma - \gamma'\cos\eta - \gamma''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$

inde etiam relationem illam linearem inter tangentes semiarcuum demanare:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{m + n\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta}{1 + p\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta}.$$

Cui insuper videbimus formam conciliari posse ad calculum idoneam:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\eta - \eta') = \mu,$$

ubi φ', η', μ' constantes.

4.

Patet ex antecedentibus, substitutionem illam

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{m + n\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta}{1 + p\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta},$$

etiam per binas aequationes inter se iunctas repraesentari posse:

$$\cos\varphi = \frac{\beta - \beta'\cos\eta - \beta''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$

$$\sin\varphi = \frac{\gamma - \gamma'\cos\eta - \gamma''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$

in quibus inter coëfficientes certae relationes locum habent. Quae forma substitutionis non sine elegantia ad transformationem propositam adhibetur, quamvis in locum trium quantitatum m, n, p novem α, β etc. in cal-

culum introducantur, aut certe octo, cum unius ex earum numero valorem pro arbitrio assumere liceat. Id quod licet in casu paullo restrictiore, ad quem tamen generalior facile revocatur, a Cl. Gauss factum est in commentatione *Determinatio attractionis etc.*

Analysin transformationis propositae dictum in modum institutam observari olim (*Diar.* Crell. Vol. II. pag. 228.), prorsus convenire cum problemate algebraico, per substitutiones

$$x = \alpha s + \alpha' s' + \alpha'' s'',$$
$$y = \beta s + \beta' s' + \beta'' s'',$$
$$z = \gamma s + \gamma' s' + \gamma'' s'',$$

quae identice efficiant,

$$xx + yy + zz = ss + s's' + s''s'',$$

simul expressionem

$$ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2$$

in hanc simpliciorem transformare:

$$GGss + G'G's's' + G''G''s''s'';$$

quod scimus problema investigationem axium principalium ellipsoidarum concernere.

Supponamus enim in problemate illo algebraico

$$xx + yy + zz = ss + s's' + s''s'' = 0;$$

quibus statutis, siquidem $i = \sqrt{-1}$, ponere licet:

$$\frac{y}{x} = -i\cos\varphi, \qquad \frac{s'}{s} = i\cos\eta,$$
$$\frac{z}{x} = -i\sin\varphi, \qquad \frac{s''}{s} = i\sin\eta,$$

unde, ubi ut ad expressiones reales perveniamus, loco α', α'', β, γ scribamus $i\alpha'$, $i\alpha''$, $-i\beta$, $-i\gamma$, substitutiones propositae in has abeunt:

$$\cos\varphi = \frac{\beta - \beta'\cos\eta - \beta''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$
$$\sin\varphi = \frac{\gamma - \gamma'\cos\eta - \gamma''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta}.$$

Porro aequationem:

$$\frac{ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2}{xx} = \frac{GGss + G'G's's' + G''G''s''s''}{(\alpha s + \alpha' s' + \alpha'' s'')^2},$$

ubi rursus loco b, c, d, e, f scribamus ib, ic, $-d$, $-e$, $-f$, in hanc abire videmus:

$$a + b\cos\varphi + c\sin\varphi + d\cos\varphi^2 + e\cos\varphi\sin\varphi + f\sin\varphi^2 = \frac{GG - G'G'\cos\eta^2 - G''G''\sin\eta^2}{(\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta)^2}.$$

Unde cum facile probetur, esse

$$\partial\varphi = \frac{\partial\gamma}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$

sequitur transformatio illa:

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(a+b\cos\varphi+c\sin\varphi+d\cos\varphi^2+e\cos\varphi\sin\varphi+f\sin\varphi^2)}}$$
$$= \int \frac{\partial\gamma}{\sqrt{(GG-G'G'\cos\eta^2-G''G''\sin\eta^2)}} = \frac{1}{GG-G'G'}\int \frac{\partial\eta}{\sqrt{\left(1-\frac{G''G''-G'G'}{GG-G'G'}\sin\eta^2\right)}},$$

ubi integrale reductum formam assignatam habet. Hinc videmus, utriusque problematis solutiones alteram ex altera obtineri, ubi loco

$$\alpha',\ \alpha'',\ \beta,\ \gamma,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$$

scribatur respective:

$$i\alpha',\ i\alpha'',\ -i\beta,\ -i\gamma,\ ib,\ ic,\ -d,\ -e,\ -f,$$

posito $i = \sqrt{-1}$.

5.

De natura substitutionis

$$\cos\Phi = \frac{\beta - \beta'\cos\eta - \beta''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$
$$\sin\Phi = \frac{\gamma - \gamma'\cos\eta - \gamma''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$

et reductione integralis, cui inservit, fusius egi, cum per eandem substitutionem, sed binis simul variabilibus applicatam, etiam reductio proposita integralis duplicis succedat. Videbimus enim sequentibus, propositum integrale duplex

$$\int \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi}$$

per substitutiones

$$\cos\Phi = \frac{\beta - \beta'\cos\eta - \beta''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta} \qquad \cos\Psi = \frac{a' - b'\cos\vartheta - c'\sin\vartheta}{a - b\cos\vartheta - c\sin\vartheta}$$
$$\sin\Phi = \frac{\gamma - \gamma'\cos\eta - \gamma''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta} \qquad \sin\Psi = \frac{a'' - b''\cos\vartheta - c''\sin\vartheta}{a - b\cos\vartheta - c\sin\vartheta}$$

simul adhibitas transformari posse in formam simpliciorem

$$\int \frac{\partial\eta\,\partial\vartheta}{G - G'\cos\eta\cos\vartheta - G''\sin\eta\sin\vartheta}.$$

Quin adeo videbimus, ipsam hanc integralis duplicis transformationem ad eiusmodi binorum integralium simplicium reductionem, qualem supra exhibuimus, revocari.

Et haec de transformando duplici integrali quaestio, uti transformatio illa integralis simplicis, cum problemate algebraico convenit, ita ut ex

alterius solutione alterius solutionem levissimis mutationibus factis petere liceat. Quod problema algebraicum hoc est, per substitutiones

$$\begin{array}{l|l} x = \alpha s + \alpha' s' + \alpha'' s'' & w = at + bu + cv \\ y = \beta s + \beta' s' + \beta'' s'' & w' = a't + b'u + c'v \\ z = \gamma s + \gamma' s' + \gamma'' s'' & w'' = a''t + b''u + c''v, \end{array}$$

quae identice efficiant

$$\begin{aligned} xx + yy + zz &= ss + s's' + s's', \\ ww + w'w' + w''w'' &= tt + uu + vv, \end{aligned}$$

simul transformare expressionem

$$(Ax + By + Cz)w + (A'x + B'y + C'z)w' + (A''x + B''y + C''z)w''$$

in hanc simpliciorem:

$$Gst + G's'u + G''s''v.$$

Cuius problematis solutionem suscipiamus vel antequam ad transformationem integralis duplicis accedemus, atque monstremus, quomodo illa absoluta, confestim etiam hanc obtines: cum ut exemplo luculento transitum illum memorabilem ab altero ad alterum problema demonstremus, tum quia problema algebraicum elegentia quodammodo et symmetria calculi praevalet, et per se dignum est, in quod inquiratur.

6.

Expositis variis relationibus, quae in problemate algebraico inter octodecim coëfficientes substitutionum et tres quantitates G, G', G'' locum habent, invenientur primum harum quadrata GG, $G'G'$, $G''G''$ ut radices diversae aequationis cubicae:

$$\begin{aligned} x^3 &- x^2(AA + BB + CC + A'A' + B'B' + C'C' + A''A'' + B''B'' + C''C'') \\ &+ x\left\{\begin{array}{c}(B'C'' - B''C')^2 + (B''C - BC'')^2 + (BC' - B'C)^2 \\ + (C'A'' - C''A')^2 + (C''A - CA'')^2 + (CA' - C'A)^2 \\ + (A'B'' - A''B')^2 + (A''B - AB'')^2 + (AB' - A'B)^2\end{array}\right\} \\ &- \{A(B'C'' - B''C') + A'(B''C - BC'') + A''(BC' - B'C)\}^2 = 0. \end{aligned}$$

Quibus erutis, quadrata coëfficientium substitutionis nec non producta

$$\begin{array}{lll|lll} \alpha'\alpha'' & \alpha''\alpha & \alpha\alpha' & bc & ca & ab \\ \beta'\beta'' & \beta''\beta & \beta\beta' & b'c' & c'a' & a'b' \\ \gamma'\gamma'' & \gamma''\gamma & \gamma\gamma' & b''c'' & c''a'' & a''b'' \end{array}$$

per formulas rationales exhibentur. Utriusque autem substitutionis coëfficientes ope ipsarum G, G', G'' alterae per alteras idque variis modis lineariter exprimuntur.

Observabitur porro, expressiones

$$(Ax+By+Cz)^2+(A'x+B'y+C'z)^2+(A''x+By+C''z)^2,$$
$$Aw+A'w'+A''w'')^2+(Bw+B'w'+B''w'')^2+(Cw+C'w'+C''w'')^2$$

per easdem substitutiones, singulas singulis applicatas, transformari in has simpliciores:

$$GGss+G'G's's'+G''G''s''s'',$$
$$GGtt+G'G'uu+G''G''vv.$$

In utraque expressione reducta memoratu dignum est, coëfficientes GG, $G'G'$, $G''G''$ easdem esse, quod etiam inde patet, quod aequatio cubica, cuius illae radices sunt, immutata maneat, ubi constantium

$$\begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{matrix}$$

series horizontales et verticales inter se permutantur. Quod theorema geometricum suppeditat, ellipsoidas, quae ad coordinatas orthogonales relatae definiantur per aequationes

$$(Ax+By+Cz)^2+(A'x+B'y+C'z)^2+(A''x+B''y+C''z)^2=KK,$$
$$(Aw+A'w+A''w'')^2+(Bw+B'w'+B''w'')^2+(Cw+C'w'+C''w'')^2=KK,$$

easdem esse nec situ in spatio diversas, quippe utriusque inveniantur semiaxes principales $\frac{K}{G}$, $\frac{K}{G'}$, $\frac{K}{G''}$. Qua observatione problema propositum algebraicum revocatur ad indagationem axium principalium ellipsoidarum, quae aequationibus assignatis continentur.

Per easdem substitutiones invenitur, etiam expressionem

$$\begin{aligned}&[(B'C''-B''C')x+(C'A''-C''A')y+(A'B''-A''B')z]w\\+&[(B''C-BC'')x+(C''A-CA'')y+(A''B-AB'')z]w'\\+&[(BC'-B'C)x+(CA'-C'A)y+(AB'-A'B)z]w''\end{aligned}$$

abire in hanc simpliciorem

$$G'G''st+G''Gs'u+GG's''v;$$

nec non ellipsoidas, quae ad coordinatas orthogonales relatae definiantur per aequationes:

$$\begin{aligned}&[(B'C''-B''C')x+(C'A''-C''A')y+(A'B''-A''B')z]^2\\+&[(B''C-BC'')x+(C''A-CA'')y+(A''B-AB'')z]^2\\+&[(BC'-B'C)x+(CA'-C'A)y+(AB'-A'B)z]^2=KK,\\&[(B'C''-B''C')w+(B''C-BC'')w+(BC'-B'C)w'']^2\\+&[(C'A''-C''A')w+(C''A-CA'')w+(CA'-C'A)w'']^2\\+&[(A'B''-A''B')w+(A''B-AB'')w+(AB'-A'B)w'']^2=KK\end{aligned}$$

per easdem substitutiones ad axes earum principales revocari, quae cum pro utraque inveniantur

$$\frac{K}{G'G''}, \quad \frac{K}{G''G}, \quad \frac{K}{GG'},$$

et haec ellipsoidae eaedem erunt nec nisi situ diversae.

7.

Absoluto problemate algebraico, ut inde transformationem integralis duplicis propositam eruamus, ponamus rursus

$$xx + yy + zz = ss + s's' + s''s'' = 0$$

nec non

$$ww + w'w' + w''w'' = tt + uu + vv = 0,$$

atque, ut supra, statuamus:

$$\frac{y}{x} = -i\cos\varphi \qquad \frac{w'}{w} = -i\cos\psi$$

$$\frac{z}{x} = -i\sin\varphi \qquad \frac{w''}{w} = -i\sin\eta$$

$$\frac{s'}{s} = i\cos\eta \qquad \frac{u}{t} = i\cos\vartheta$$

$$\frac{s''}{s} = i\sin\eta \qquad \frac{v}{t} = i\sin\vartheta.$$

Unde, ubi rursus loco

$$\left.\begin{matrix}\alpha', & \alpha'', & \beta, & \gamma\\ b, & c, & a', & a''\end{matrix}\right\} \text{ scribatur } \left\{\begin{matrix}i\alpha', & i\alpha'', & -i\beta, & -i\gamma\\ ib, & ic, & -i\alpha, & -i\alpha''.\end{matrix}\right.$$

e substitutionibus §. 7. adhibitis prodeunt:

$$\cos\varphi = \frac{\beta - \beta'\cos\eta - \beta''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta} \qquad \cos\psi = \frac{a' - b'\cos\vartheta - c'\sin\vartheta}{a - b\cos\vartheta - c\sin\vartheta}$$

$$\sin\varphi = \frac{\gamma - \gamma'\cos\eta - \gamma''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta} \qquad \sin\psi = \frac{a'' - b''\cos\vartheta - c''\sin\vartheta}{a - b\cos\vartheta - c\sin\vartheta}.$$

Porro aequatio

$$\frac{(Ax + By + Cz)w + (A'x + B'y + C'z)w' + (A''x + B''y + C''z)w''}{wx}$$

$$= \frac{Gst + G's'u + G''s''v}{(as + a's' + a''s'')(at + bu + cv)},$$

ubi rursus loco

$$A, \quad B, \quad C, \quad A', \quad B', \quad C', \quad A'', \quad B'', \quad C''$$

scribatur:

$$A, \quad iB, \quad iC, \quad iA', \quad -B', \quad -C', \quad iA'', \quad -B'', \quad -C'',$$

in hanc abit:

$$A + B\cos\varphi + C\sin\psi + (A' + B'\cos\varphi + C'\sin\varphi)\cos\psi + (A'' + B''\cos\varphi + C''\sin\varphi)\sin\psi$$

$$= \frac{G - G'\cos\eta\cos\vartheta - G''\sin\eta\sin\vartheta}{(\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta)(a - b\cos\vartheta - c\sin\vartheta)}.$$

Unde, cum sit:

$$\partial\varphi = \frac{\partial\eta}{\alpha - \alpha' \cos\eta - \alpha'' \sin\eta}$$
$$\partial\psi = \frac{\partial\vartheta}{a - b\cos\vartheta - c\sin\vartheta},$$

prodit transformatio quaesita integralis duplicis propositi:

$$\int \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi}$$
$$= \int \frac{\partial\eta\,\partial\vartheta}{G - G'\cos\eta\cos\vartheta - G''\sin\eta\sin\vartheta}.$$

8.

Quemadmodum problema algebraicum ad aliud revocare licet, quod investigationem axium principalium ellipsoidarum concernit, ita etiam transformatio duplicis integralis, quae illi respondet, eo revocari potest, ut integralia simplicia

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{[(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^2-(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)^2-(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)^2]}},$$
$$\int \frac{\partial\psi}{\sqrt{[(A+A'\cos\psi+A''\sin\psi)^2-(B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)^2-(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)^2]}},$$

per substitutiones assignatas transformentur in haec:

$$\int \frac{\partial\eta}{\sqrt{(GG - G'G'\cos\eta^2 - G''G''\sin\eta^2)}},$$
$$\int \frac{\partial\vartheta}{\sqrt{(GG - G'G'\cos\vartheta^2 - G''G''\sin\vartheta^2)}},$$

quae videmus nonnisi argumento differre, quemadmodum in illo problemate ellipsoidae propositae nonnisi situ differebant.

Hinc solutionem problematis propositi semper realem fore sequitur, ubi expressio

$A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi$

pro nullo angulorum φ, ψ valore reali evanescat, qui casus prae ceteris applicationem invenit. Posito enim

$$\frac{A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi}{A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi} = \operatorname{tang}\varepsilon$$
$$\frac{C+C'\cos\psi+C''\sin\psi}{B+B'\cos\psi+B''\sin\psi} = \operatorname{tang}\zeta,$$

expressio illa ita repraesentari potest:

$A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+\sqrt{((A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)^2)+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)^2\cos(\psi-\varepsilon)}$

sive etiam

$A+A'\cos\psi+A''\sin\psi+\sqrt{((B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)^2+(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)^2\cos(\varphi-\zeta)}$

quae ne pro ullo valore reali ipsorum φ, ψ evanescant, expressiones
$(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^2-(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)^2-(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)^2$,
$(A+B'\cos\psi+A''\sin\psi)^2-(B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)^2-(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)^2$
semper positivo valore gaudeant, necesse est. Quo casu substitutiones assignatas reales fore probavimus.

Per easdem substitutiones, quibus aequatio
$$A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi=0$$
in hanc abit:
$$G-G'\cos\eta\cos\vartheta-G''\sin\eta\sin\vartheta=0,$$
videmus, etiam aequationem differentialem
$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{[(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)^2+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)^2-(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^2]}}+$$
$$\frac{\partial\psi}{\sqrt{[(B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)^2+(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)^2-(A+A'\cos\psi+A''\sin\psi)^2]}}=0$$
in hanc transformari:
$$\frac{\partial\eta}{\sqrt{(G'G'\cos\eta^2+G''G''\sin\eta^2-GG)}}+\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{(G'G'\cos\vartheta^2+G''G''\sin\vartheta^2-GG)}}=0.$$

Facile autem probatur, aequationes illas finitas aequationum differentialium integralia completa esse. Unde theorematum inventorum verificatio obtinetur.

Nec non observabitur, posito
$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= B'C''-B''C'-(C'A''-C''A')\cos\varphi-(A'B''-A''B')\sin\varphi\\
&-\cos\psi\,[B''C-BC''-(C''A-CA'')\cos\varphi-(A''B-AB'')\sin\varphi]\\
&-\sin\psi\,[BC'-B'C-(CA'-C'A)\cos\varphi-(AB'-A'B)\sin\varphi],\\
\Sigma &= [B'C''-B''C'-(C'A''-C''A')\cos\varphi-(A'B''-A''B')\sin\varphi]^2\\
&-[B''C-BC''-(C''A-CA'')\cos\varphi-(A''B-AB'')\sin\varphi]^2\\
&-[BC'-B'C-(CA'-C'A)\cos\varphi-(AB'-A'B)\sin\varphi]^2,\\
\mathrm{T} &= [B'C''-B''C'-(B''C-BC'')\cos\psi-(BC'-B'C)\sin\psi]^2\\
&-[C'A''-C''A'-(C''A-CA'')\cos\psi-(CA'-C'A)\sin\psi]^2\\
&-[A'B''-A''B'-(A''B-AB'')\cos\psi-(AB'-A'B)\sin\psi]^2,
\end{aligned}$$
per easdem substitutiones nostras obtineri:
$$\int\frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\mathrm{P}}=\int\frac{\partial\eta\,\partial\vartheta}{G'G''-G''G\cos\eta\cos\vartheta-GG'\sin\eta\sin\vartheta},$$
$$\int\frac{\partial\varphi}{\Sigma^{\frac{1}{2}}}=\int\frac{\partial\eta}{\sqrt{(G'^2G''^2-G''^2G^2\cos\eta^2-G^2G'^2\sin\eta^2)}},$$
$$\int\frac{\partial\psi}{\mathrm{T}^{\frac{1}{2}}}=\int\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{(G'^2G''^2-G''^2G^2\cos\vartheta^2-G^2G'^2\sin\vartheta^2)}}.$$

Quae antecedentibus iunctae sex transformationes memorabiles suppeditant, ad quas per easdem substitutiones pervenimus.

9.

Problema de duplici integrali transformando propositum etiam absque functionibus trigonometricis exhiberi potuisset. Facile enim intelligitur, eius in locum substitui posse sequens

Problema.

„Integrale duplex indefinitum

$$\int \frac{\partial x\,\partial y}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+(A'+B'x+C'x^2)y+(A''+B''x+C''x^2)y^2}},$$

per substitutiones formae

$$x = \frac{m+nt}{1+pt}, \quad y = \frac{m'+n'u}{1+p'u}$$

transformare in hoc

$$\int \frac{\partial t\,\partial u}{\sqrt{D+Et^2+Ftu+Gu^2+Ht^2u^2}},$$

cuius denominator terminis dimensionum imparum caret."

Praeplacuit tamen forma trigonometrica, quae in aliis quibusdam quaestionibus, de quibus in posterum agam, obvenit. Quamquam forma illa algebraica eo quoque nomine se commendat, quod solutione semper reali gaudet.

Jam ad solutionem quaestionum propositarum accedamus, et primum de problemate algebraico agam, e cuius deinde solutione propositam petamus duplicis integralis transformationem.

Problema I.

„Proponitur, per substitutiones lineares:

$$\begin{array}{l|l} x = \alpha s + \alpha' s' + \alpha'' s'' & w = a t + b u + c v \\ y = \beta s + \beta' s' + \beta'' s'' & w' = a' t + b' u + c' v \\ z = \gamma s + \gamma' s' + \gamma'' s'' & w'' = a'' t + b'' u + c'' v, \end{array}$$

quae identice efficiant:

$$\begin{aligned} xx + yy + zz &= ss + s's' + s''s'' \\ ww + w'w' + w''w'' &= tt + uu + vv, \end{aligned}$$

transformare expressionem

$$(Ax + By + Cz)w + (A'x + B'y + C'z)w' + (A''x + B''y + C''z)w''$$

in hanc simpliciorem

$$Gst + G's'u + G''s''v.$$"

Solutio.

10.

E theoria transformationis systematis axium coordinatarum orthogonalium in aliud ejusmodi systema notae sunt relationes, quae inter coëfficientes substitutionum

1)
$$\begin{array}{l|l} x = \alpha s + \alpha' s' + \alpha'' s'' & w = at + bu + cv \\ y = \beta s + \beta' s' + \beta'' s'' & w' = a't + b'u + c'v \\ z = \gamma s + \gamma' s' + \gamma'' s'' & w'' = a''t + b''u + c''v \end{array}$$

locum habere debent, ut identice sit:

$$2) \quad xx + yy + zz = ss + s's' + s''s''$$
$$ww + w'w' + w''w'' = tt + uu + vv,$$

sive

$$3) \quad ss + s's' + s''s'' = (\alpha s + \alpha' s' + \alpha'' s'')^2 + (\beta s + \beta' s' + \beta'' s'')^2 + (\gamma s + \gamma' s' + \gamma'' s'')^2$$
$$tt + uu + vv = (at + bu + cv)^2 + (a't + b'u + c'v)^2 + (a''t + b''u + c''v)^2;$$

id quod aequationes conditionales poscit:

4)
$$\begin{array}{l|l} \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 & aa + a'a' + a''a'' = 1 \\ \alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma' = 1 & bb + b'b' + b''b'' = 1 \\ \alpha''\alpha'' + \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'' = 1 & cc + c'c' + c''c'' = 1 \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 & bc + b'c' + b''c'' = 0 \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0 & ca + c'a' + c''a'' = 0 \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 & ab + a'b' + a''b'' = 0. \end{array}$$

Quarum relationum ope facile probantur aequationes:

5)
$$\begin{array}{l|l} s = \alpha x + \beta y + \gamma z & t = aw + a'w' + a''w'' \\ s' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z & u = bw + b'w' + b''w'' \\ s'' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z & v = cw + c'w' + c''w'', \end{array}$$

quippe quae substitutis valoribus ipsarum x, y, z et w, w', w'' e 1) petitis, propter 4) identicae fiunt. Hinc cum e 2) fiat identice:

$$6) \quad xx + yy + zz = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2$$
$$ww + w'w' + w''w'' = (aw + a'w' + a''w'')^2 + (bw + b'w' + b''w'')^2 + (cw + c'w' + c''w'')^2,$$

sequuntur etiam:

7)
$$\begin{array}{l|l} \alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' = 1 & aa + bb + cc = 1 \\ \beta\beta + \beta'\beta' + \beta''\beta'' = 1 & a'a' + b'b' + c'c' = 1 \\ \gamma\gamma + \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' = 1 & a''a'' + b''b'' + c''c'' = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0 & a'a''+b'b''+c'c''=0 \\ \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha''=0 & a''a+b''b+c''c=0 \\ \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0 & a\,a'+b\,b'+c\,c'=0. \end{array}$$

Expressiones ipsarum s, s', s'' per x, y, z atque ipsarum t, u, v per w, w', w'', quas formulae 5) suppeditant, etiam e 1) per methodum vulgarem resolutionis aequationum linearium petere licet. Expressionibus, quae inde sequuntur, cum illis comparatis, posito:

$$8)\quad \begin{aligned} \varepsilon &= \alpha(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')+\beta(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')+\gamma(\alpha'\beta''-\alpha''\beta') \\ e &= a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c), \end{aligned}$$

obtinemus:

$$9)\quad \begin{array}{l|l} \varepsilon\alpha=\beta'\gamma''-\beta''\gamma' & ea=b'c''-b''c' \\ \varepsilon\beta=\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha' & ea'=b''c-bc'' \\ \varepsilon\gamma=\alpha'\beta''-\alpha''\beta' & ea''=bc'-b'c \\ \varepsilon\alpha'=\beta''\gamma-\beta\gamma'' & eb=c'a''-c''a' \\ \varepsilon\beta'=\gamma''\alpha-\gamma\alpha'' & eb'=c''a-ca'' \\ \varepsilon\gamma'=\alpha''\beta-\alpha\beta'' & eb''=ca'-c'a \\ \varepsilon\alpha''=\beta\gamma'-\beta'\gamma & ec=a'b''-a''b' \\ \varepsilon\beta''=\gamma\alpha'-\gamma'\alpha & ec'=a''b-ab'' \\ \varepsilon\gamma''=\alpha\beta'-\alpha'\beta & ec''=ab'-a'b \end{array}$$

Ipsas ε, e invenimus e formulis identicis:

$$\begin{aligned} (\gamma''\alpha-\gamma\alpha'')(\alpha\beta'-\alpha'\beta)-(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)(\alpha''\beta-\alpha\beta'') &= a\varepsilon \\ (c''a-ca'')(ab'-a'b)-(ca'-c'a)(a''b-ab'') &= ae, \end{aligned}$$

quae e 9) in has abeunt

$$\begin{aligned} \varepsilon\varepsilon(\beta'\gamma''-\beta''\gamma') &= \varepsilon^3\alpha = \varepsilon\alpha \\ ee(b'c''-b''c') &= e^2a = ea, \end{aligned}$$

sive $\varepsilon\varepsilon=ee=1$, unde cum signum ipsarum ε, e pro arbitrio assumere liceat, statuemus:

$$10)\quad \varepsilon=1;\quad e=1.$$

Quae abunde nota, ne quid desit, hic apposuimus. Ante omnia autem tenendum est, quo in sequentibus saepe utemur,

theorema,

„naturam coëfficientium substitutionum propositarum eam esse, ut datis aequationibus linearibus:

$$\begin{array}{l|l} X=\alpha G+\alpha' G'+\alpha'' G'' & W=a\,T+b\,U+c\,V \\ Y=\beta G+\beta' G'+\beta'' G'' & W'=a'\,T+b'\,U+c'\,V \\ Z=\gamma G+\gamma' G'+\gamma'' G'' & W''=a'\,T+b''\,U+c''\,V. \end{array}$$

inde sequatur:

$$\begin{array}{l|l} G = \alpha X + \beta Y + \gamma Z & T = aW + a'W' + a''W'' \\ G' = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z & U = bW + b'W' + b''W'' \\ G'' = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z & V = cW + c'W' + c''W'', \end{array}$$

et vice versa; simulque sit:

$$XX + YY + ZZ = GG + G'G' + G''G''$$
$$WW + W'W' + W''W'' = TT + UU + VV.$$

11.

E substitutionibus 1) cum prodire debeat, quod est problema propositum:

11) $$(Ax + By + Cz)w + (A'x + B'y + C'z)w' + (A''x + B''y + C''z)w'' = Gst + G's'u + G''s''u,$$

locum habere debent aequationes conditionales:

12)
$$\begin{aligned} A &= G\alpha a + G'\alpha' b + G''\alpha'' c \\ B &= G\beta a + G'\beta' b + G''\beta'' c \\ C &= G\gamma a + G'\gamma' b + G''\gamma'' c \\ A' &= G\alpha a' + G'\alpha' b' + G''\alpha'' c' \\ B' &= G\beta a' + G'\beta' b' + G''\beta'' c' \\ C' &= G\gamma a' + G'\gamma' b' + G''\gamma'' c' \\ A'' &= G\alpha a'' + G'\alpha' b'' + G''\alpha'' c'' \\ B'' &= G\beta a'' + G'\beta' b'' + G''\beta'' c'' \\ C'' &= G\gamma a'' + G'\gamma' b'' + G''\gamma'' c''. \end{aligned}$$

Quae novem aequationes, junctae duodecim 4) unam et viginti efficiunt aequationes conditionales, quibus octodecim coëfficientes substitutionum propositarum et tres quantitates G, G', G'' satisfacere debent. Quod problema est determinatum. Jam unius et viginti incognitarum aggrediamur determinationem, atque varias, quae inter eas locum habent, relationes exponamus.

12.

Per theorema §. 10. e formulis 12) prodeunt sequentes:

13)
$$\begin{array}{l|l} Ga = \alpha A + \beta B + \gamma C & G\alpha = aA + a'A' + a''A'' \\ Ga' = \alpha A' + \beta B' + \gamma C' & G\beta = aB + a'B' + a''B'' \\ Ga'' = \alpha A'' + \beta B'' + \gamma C'' & G\gamma = aC + a'C' + a''C'' \\ G'b = \alpha' A + \beta' B + \gamma' C & G'\alpha' = bA + b'A' + b''A'' \\ G'b' = \alpha' A' + \beta' B' + \gamma' C' & G'\beta' = bB + b'B' + b''B'' \\ G'b'' = \alpha' A'' + \beta' B'' + \gamma' C'' & G'\gamma' = bC + b'C' + b''C'' \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} G''c = \alpha''A + \beta''B + \gamma''C & G''\alpha'' = cA + c'A' + c''A'' \\ G''c' = \alpha''B' + \beta''B' + \gamma''C' & G''\beta'' = cB + c'B' + c''B'' \\ G''c'' = \alpha''B'' + \beta''B'' + \gamma''C'' & G''\gamma'' = cC + c'C' + c''C''. \end{array}$$

Quibus formulis utriusque substitutionis coëfficientes ope quantitatum G, G', G'' alterae per alteras lineariter exprimuntur.

Alteram ejusmodi determinationem ex ipsis 13) per resolutionem aequationum linearium petere licet; e. g. e formulis, quibus a, a', a'' per α, β, γ exprimuntur, vice versa etiam α, β, γ per a, a', a'' determinantur. Qua ratione, posito brevitatis causa

14) $\Delta = A(B'C'' - B''C') + B(C'A'' - C''A') + C(A'B'' - A''B')$,

obtines e 13) sequens formularum systema:

15)
$$\frac{\Delta\alpha}{G} = (B'C'' - B''C')a + (B''C - BC'')a' + (BC' - B'C)a''$$
$$\frac{\Delta\beta}{G} = (C'A'' - C''A')a + (C''A - CA'')a' + (CA' - C'A)a''$$
$$\frac{\Delta\gamma}{G} = (A'B'' - A''B')a + (A''B - AB'')a' + (AB' - A'B)a''$$
$$\frac{\Delta\alpha'}{G'} = (B'C'' - B''C')b + (B''C - BC'')b' + (BC' - B'C)b''$$
$$\frac{\Delta\beta'}{G'} = (C'A'' - C''A')b + (C''A - CA'')b + (CA' - C'A)b''$$
$$\frac{\Delta\gamma'}{G'} = (A'B'' - A''B')b + (A''B - AB'')b' + (AB' - A'B)b''$$
$$\frac{\Delta\alpha''}{G''} = (B'C'' - B''C')c + (B''C - BC'')c' + (BC' - B'C)c''$$
$$\frac{\Delta\beta''}{G''} = (C'A'' - C''A')c + (C''A - CA'')c' + (CA' - C'A)c''$$
$$\frac{\Delta\gamma''}{G''} = (A'B'' - A''B')c + (A''B - AB'')c' + (AB' - A'B)c''$$
$$\frac{\Delta a}{G} = \alpha(B'C'' - B''C') + \beta(C'A'' - C''A') + \gamma(A'B'' - A''B')$$
$$\frac{\Delta a'}{G} = \alpha(B''C - BC'') + \beta(C''A - CA'') + \gamma(A''B - AB'')$$
$$\frac{\Delta a''}{G} = \alpha(BC' - B'C) + \beta(CA' - C'A) + \gamma(AB' - A'B)$$
$$\frac{\Delta b}{G'} = \alpha'(B'C'' - B''C') + \beta'(C'A'' - C''A') + \gamma'(A'B'' - A''B')$$
$$\frac{\Delta b'}{G'} = \alpha'(B''C - BC'') + \beta'(C''A - CA'') + \gamma'(A''B - B''A)$$
$$\frac{\Delta b''}{G'} = \alpha'(BC' - B'C) + \beta'(CA' - C'A) + \gamma'(AB' - A'B)$$

$$\frac{\triangle c}{G''} = \alpha''(B'C'' - B''C') + \beta''(C'A'' - C''A') + \gamma''(A'B'' - A''B')$$
$$\frac{\triangle c'}{G''} = \alpha''(B''C - BC'') + \beta''(C''A - CA'') + \gamma''(A''B - AB'')$$
$$\frac{\triangle c''}{G''} = \alpha''(BC' - B'C) + \beta''(CA' - C'A) + \gamma''(AB' - A'B).$$

E quibus formulis rursus per theorema §i 10. derivantur sequentes:

16)
$$\frac{B'C'' - B''C'}{\triangle} = \frac{\alpha a}{G} + \frac{\alpha' b}{G'} + \frac{\alpha'' c}{G''}$$
$$\frac{C'A'' - C''A'}{\triangle} = \frac{\beta a}{G} + \frac{\beta' b}{G'} + \frac{\beta'' c}{G''}$$
$$\frac{A'B'' - A''B'}{\triangle} = \frac{\gamma a}{G} + \frac{\gamma' b}{G'} + \frac{\gamma'' c}{G''}$$
$$\frac{B''C - BC''}{\triangle} = \frac{\alpha a'}{G} + \frac{\alpha' b'}{G'} + \frac{\alpha'' c'}{G''}$$
$$\frac{C''A - CA''}{\triangle} = \frac{\beta a'}{G} + \frac{\beta' b'}{G'} + \frac{\beta'' c'}{G''}$$
$$\frac{A''B - AB''}{\triangle} = \frac{\gamma a'}{G} + \frac{\gamma' b'}{G'} + \frac{\gamma'' c'}{G''}$$
$$\frac{BC' - B'C}{\triangle} = \frac{\alpha a''}{G} + \frac{\alpha' b''}{G'} + \frac{\alpha'' c''}{G''}$$
$$\frac{CA' - C'A}{\triangle} = \frac{\beta a''}{G} + \frac{\beta' b''}{G'} + \frac{\beta'' c''}{G''}$$
$$\frac{AB' - A'B}{\triangle} = \frac{\gamma a''}{G} + \frac{\gamma' b''}{G'} + \frac{\gamma'' c''}{G''}.$$

Valores ipsarum $B'C'' - B''C'$, $C'A'' - C''A'$ etc. etiam directe e 12) derivare licet. Fit exempli gratia e formulis 12):

$$B' = G\beta a' + G'\beta' b' + G''\beta'' c'$$
$$C' = G\gamma a' + G'\gamma' b' + G''\gamma'' c'$$
$$B'' = G\beta a'' + G'\beta' b'' + G''\beta'' c''$$
$$C'' = G\gamma a'' + G'\gamma' b'' + G''\gamma'' c'',$$

prima et postrema, secunda et tertia in se ductis et subductione facta:

$$B'C'' - B''C' = G'G''(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')(b'c'' - b''c')$$
$$+ G''G(\beta''\gamma - \beta\gamma'')(c'a'' - c''a')$$
$$+ GG'(\beta\gamma' - \beta'\gamma)(a'b'' - a''b'),$$

sive e 9):

$$B'C'' - B''C' = G'G''aa + G''G\alpha' b + GG'\alpha'' c;$$

qua comparata cum formula 16):

$$B'C'' - B''C' = \frac{\triangle aa}{G} + \frac{\triangle a' b}{G'} + \frac{\triangle a'' c}{G''},$$

prodit:

17) $\Delta = A(B'C''-B''C')+B(C'A''-C''A')+C(A'B''-A''B') = GG'G''.$

Iam accedamus ad alia formularum systemata.

13.

Ponatur brevitatis causa:

18)
$$\begin{array}{l|l} l = AA+A'A'+A''A'' & p = AA+BB+CC \\ m = BB+B'B'+B''B'' & p' = A'A'+B'B'+C'C' \\ n = CC+C'C'+C''C'' & p'' = A''A''+B''B''+C''C'' \\ l' = BC+B'C'+B''C'' & q = A'A''+B'B''+C'C'' \\ m' = CA+C'A'+C''A'' & q' = A''A+B''B+C''C \\ n' = AB+A'B'+A''B'' & q'' = AA'+BB'+CC'; \end{array}$$

unde etiam erit:

19)
$$\begin{aligned} mn-l'l' &= (B'C''-B''C')^2+(B''C-BC'')^2+(BC'-B'C)^2 \\ nl-m'm' &= (C'A''-C''A')^2+(C''A-CA'')^2+(CA'-C'A)^2 \\ lm-n'n' &= (A'B''-A''B')^2+(A''B-AB'')^2+(AB'-A'B)^2 \\ p'p''-qq &= (B'C''-B''C')^2+(C'A''-C''A')^2+(A'B''-A''B')^2 \\ p''p-q'q' &= (B''C-BC'')^2+(C''A-CA'')^2+(A''B-AB'')^2 \\ pp'-q''q'' &= (BC'-B'C)^2+(CA'-C'A)^2+(AB'-A'B)^2; \end{aligned}$$

porro:

20)
$$\begin{array}{l|l} m'n'-ll' = & q'q''-pq = \\ (C'A''-C''A')(A'B''-A''B')+ & (B''C-BC'')(BC'-B'C)+ \\ (C''A-CA'')(A''B-AB'')+ & (C''A-CA'')(CA'-C'A)+ \\ (CA'-C'A)(AB'-A'B) & (A''B-AB'')(AB'-A'B) \\ \hline n'l'-mm' = & q''q-p'q' = \\ (A'B''-A''B')(B'C''-B''C')+ & (BC'-B'C)(B'C''-B''C')+ \\ (A''B-AB'')(B''C-BC'')+ & (CA'-C'A)(C'A''-C''A')+ \\ (AB'-A'B)(BC'-B'C) & (AB'-A'B)(A'B''-A''B') \\ \hline l'm'-nn' = & qq'-p''q'' = \\ (B'C''-B''C')(C'A''-C''A')+ & (B'C''-B''C')(B''C-BC'')+ \\ (B''C-BC'')(C''A-CA'')+ & (C'A''-C''A')(C''A-CA'')+ \\ (BC'-B'C)(CA'-C'A) & (A'B''-A''B')(A''B-AB''); \end{array}$$

nec non:

21) $$\begin{aligned} \Delta\Delta &= lmn-ll'l'-mm'm'-nn'n'+2l'm'n' \\ &= pp'p''-pqq-p'q'q'-p''q''q''+2qq'q''. \end{aligned}$$

Quae ommia rursus per ipsas G, G', G'' et coëfficientes substitutionum exprimamus, quod ex antecedentibus sine negotio fit.

Ac primum e formulis 12) per theorema §i. 10. prodit:

22) $l = GG\alpha\alpha + G'G'\alpha'\alpha' + G''G''\alpha''\alpha''$ | $p = GGaa + G'G'bb + G''G''cc$
$m = GG\beta\beta + G'G'\beta'\beta' + G''G''\beta''\beta''$ | $p' = GGa'a' + G'G'b'b' + G''G''c'c'$
$n = GG\gamma\gamma + G'G'\gamma'\gamma' + G''G''\gamma''\gamma''$ | $p'' = GGa''a'' + G'G'b''b'' + G''G''c''c''$,

ac simili modo e 15):

23) $\frac{mn - l'l'}{\Delta\Delta} = \frac{\alpha\alpha}{GG} + \frac{\alpha'\alpha'}{G'G'} + \frac{\alpha''\alpha''}{G''G''}$ | $\frac{p'p'' - qq}{\Delta\Delta} = \frac{aa}{GG} + \frac{bb}{G'G'} + \frac{cc}{G''G''}$
$\frac{nl - m'm'}{\Delta\Delta} = \frac{\beta\beta}{GG} + \frac{\beta'\beta'}{G'G'} + \frac{\beta''\beta''}{G''G''}$ | $\frac{p''p - q'q'}{\Delta\Delta} = \frac{a'a'}{GG} + \frac{b'b'}{G'G'} + \frac{c'c'}{G''G''}$
$\frac{lm - n'n'}{\Delta\Delta} = \frac{\gamma\gamma}{GG} + \frac{\gamma'\gamma'}{G'G'} + \frac{\gamma''\gamma''}{G''G''}$ | $\frac{pp' - q''q''}{\Delta\Delta} = \frac{a''a''}{GG} + \frac{b''b''}{G'G'} + \frac{c''c''}{G''G''}$.

Porro e 12) facile derivantur sequentes:

24) $l' = GG\beta\gamma + G'G'\beta'\gamma' + G''G''\beta''\gamma''$ | $q = GGa'a'' + G'G'b'b'' + G''G''c'c''$
$m' = GG\gamma\alpha + G'G'\gamma'\alpha' + G''G''\gamma''\alpha''$ | $q' = GGa''a + G'G'b''b + G''G''c''c$
$n' = GG\alpha\beta + G'G'\alpha'\beta' + G''G''\alpha''\beta''$ | $q'' = GGaa' + G'G'bb' + G''G''cc'$,

ac simili modo e 15):

25) $\frac{m'n' - ll'}{\Delta\Delta} = \frac{\beta\gamma}{GG} + \frac{\beta'\gamma'}{G'G'} + \frac{\beta''\gamma''}{G''G''}$ | $\frac{q'q'' - pq}{\Delta\Delta} = \frac{a'a''}{GG} + \frac{b'b''}{G'G'} + \frac{c'c''}{G''G''}$
$\frac{n'l' - mm'}{\Delta\Delta} = \frac{\gamma\alpha}{GG} + \frac{\gamma'\alpha'}{G'G'} + \frac{\gamma''\alpha''}{G''G''}$ | $\frac{q''q - p'q'}{\Delta\Delta} = \frac{a''a}{GG} + \frac{b''b}{G'G'} + \frac{c''c}{G''G''}$
$\frac{l'm' - nn'}{\Delta\Delta} = \frac{\alpha\beta}{GG} + \frac{\alpha'\beta'}{G'G'} + \frac{\alpha''\beta''}{G''G''}$ | $\frac{qq' - p''q''}{\Delta\Delta} = \frac{aa'}{GG} + \frac{bb'}{G'G'} + \frac{cc'}{G''G''}$,

Sequitur porro e 22):

$$26)\quad GG + G'G' + G''G'' = ll + mm + nn = pp + p'p' + p''p'',$$

eodemque modo e 23), cum sit $\Delta = GG'G''$:

$$27)\quad G'G'G''G'' + G''G''GG + GGG'G' = mn + nl + lm - l'l' - m'm' - n'n' = p'p'' + p''p + pp' - qq - q'q' - q''q''.$$

Adnotemus adhuc, e formulis 22), 24) recte dispositis per theorema §i 10. erui sequentes:

28) $GG\alpha = l\alpha + n'\beta + m'\gamma$ | $GGa = pa + q''a' + q'a''$
$GG\beta = n'\alpha + m\beta + l'\gamma$ | $GGa' = q''a + p'a' + qa''$
$GG\gamma = m'\alpha + l'\beta + n\gamma$ | $GGa'' = q'a + qa' + p''a''$
$G'G'\alpha' = l\alpha' + n'\beta' + m'\gamma'$ | $G'G'b = pb + q''b' + q'b''$
$G'G'\beta' = n'\alpha' + m\beta' + l'\gamma'$ | $G'G'b' = q''b + p'b' + qb''$
$G'G'\gamma' = m'\alpha' + l'\beta' + n\gamma'$ | $G'G'b'' = q'b + qb' + p''b''$

$$\begin{array}{l|l} G''G''\alpha'' = l\,\alpha'' + n'\beta'' + m'\gamma'' & G''G''c = p\,c + q''c' + q'c'' \\ G''G''\beta'' = n'\alpha'' + m\,\beta'' + l'\,\gamma'' & G''G''c' = q''c + p'\,c' + q'c'' \\ G''G''\gamma'' = m'\alpha'' + l'\,\beta'' + n\gamma'' & G''G''c'' = q'\,c + q\,c' + p''c''. \end{array}$$

Quarum exempli gratia prima, quarta, septima alterius systematis per dictum theorema ex his fluunt, quas e formulis 22), 24) eligimus:

$$\begin{aligned} l &= \alpha.GG\alpha + \alpha'.G'G'\alpha' + \alpha''.G''G''\alpha'' \\ n' &= \beta.GG\alpha + \beta'.G'G'\alpha' + \beta''.G''G''\alpha'' \\ m' &= \gamma.GG\alpha + \gamma'.G'G'\alpha' + \gamma''.G''G''\alpha'', \end{aligned}$$

similique modo reliquae 28) eruuntur.

E 28) rursus per idem theorema fit:

$$\begin{aligned} 29)\quad l\,l + n'\,n' + m'm' &= G^4\,\alpha\,\alpha + G'^4\alpha'\alpha' + G''^4\alpha''\alpha'' \\ m\,m + l'\,l' + n'\,n' &= G^4\,\beta\,\beta + G'^4\beta'\beta' + G''^4\beta''\beta'' \\ n\,n + m'\,m' + l'\,l' &= G^4\,\gamma\,\gamma + G'^4\gamma'\gamma' + G''^4\gamma''\gamma'' \\ p\,p + q''\,q'' + q'\,q' &= G^4\,a\,a + G'^4\,b\,b + G''^4\,c\,c \\ p'\,p' + q\,q + q''q'' &= G^4\,a'\,a' + G'^4\,b'\,b' + G''^4\,c'\,c' \\ p''p'' + q'\,q' + q\,q &= G^4 a''a'' + G'^4 b''b'' + G''^4 c''\,c''; \end{aligned}$$

Quibus aliae variae addi possunt. Similia formularum systemata e formulis 23), 25) derivare licet. Quae tamen ex antecedentibus etiam fluunt ope theorematis generalis sequentis. Comparatis enim inter se formulis 12) et 16), quarum alterutris, advocatis insuper 4), coëfficientes substitutionum et ipsas G, G', G'' determinare licet, sponte prodit

theorema,

„e qualibet formularum propositarum derivari posse alteram, si in locum quantitatum

$$\begin{array}{lll} A, & B, & C, \\ A', & B', & C', \\ A'', & B'', & C'', \\ G, & G', & G'' \end{array}$$

substituantur respective sequentes:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{B'C''-B''C'}{\Delta}, & \dfrac{C'A''-C''A'}{\Delta}, & \dfrac{A'B''-A''B'}{\Delta} \\ \dfrac{B''C-BC''}{\Delta}, & \dfrac{C''A-CA''}{\Delta}, & \dfrac{A''B-AB''}{\Delta} \\ \dfrac{BC'-B'C}{\Delta}, & \dfrac{CA'-C'A}{\Delta}, & \dfrac{AB'-A'B}{\Delta} \\ \dfrac{1}{G}, & \dfrac{1}{G'}, & \dfrac{1}{G''}; \end{array}$$

unde e. g. etiam pro Δ ponendum $\frac{1}{\Delta}$. Quod patet reciprocum esse, id est, ubi illa in haec abeant, simul etiam haec in illa mutari."

E quo theoremate memorabili formulae inventae alteram statim ei respondentem adiungere licet. Quemadmodum formulae 22) et 23), 24) et 25) per theorema illud alterae ex alteris derivantur. Cui tamen negotio singulis casibus supersedemus.

Per substitutiones propositas e formulis 12) fit:

$$[Ax+By+Cz]w+[A'x+B'y+C'z]w'+[A''x+B''y+C''z]w'' = Gst+G's'u+G''s''v;$$

per easdem substitutiones e formulis 16) sive ex aequatione illa per dictum theorema altera sequitur aequatio ei respondens:

30) $$[(B'C''-B''C')x+(C'A''-C''A')y+(A'B''-A''B')z]w + [(B''C-BC'')x+(C''A-CA'')y+(A''B-AB'')z]w' + [(BC'-B'C)x+(CA'-C'A)y+(AB'-A'B)z]w'' = \Delta\left[\frac{st}{G}+\frac{s'u}{G'}+\frac{s''v}{G''}\right] = G'G''st+G''Gs'u+GG's''v.$$

Ita per easdem substitutiones binas simul effici videmus transformationes.

14.

Postquam antecedentibus relationes praecipuas et elegantiores, quae inter quantitates quaesitas et datas locum habent, collegimus, iam sine negotio idque variis modis ex iis ipsi incognitarum valores fluunt.

Formulis 26), 27), 17) quantitatum GG, $G'G'$, $G''G''$ summam, summam productorum e binis, ipsarumque productum exhibuimus, unde aequationem cubicam assignare possumus, cuius quantitates illae radices sint, eaeque radices diversae. Quae per formulas allegatas, advocata 21), fit:

31) $$x^3-x^2[l+m+n]+x[mn+nl+lm-l'l'-m'm'-n'n']-[lmn-ll'l'-mm'm'-nn'n'+2l'm'n'] = 0,$$

sive etiam:

32) $$x^3-x^2[p+p'+p'']+x[p'p''+p''p+pp'-qq-q'q'-q''q'']-[pp'p''-pqq-p'q'q'-p''q''q''+2qq'q''] = 0;$$

quas aequationes etiam hunc in modum repraesentare licet:

33) $$(x-l)(x-m)(x-n)-l'l'(x-l)-m'm'(x-m)-n'n'(x-n)-2l'm'n' = 0$$

34) $$(x-p)(x-p')(x-p'')-qq(x-p)-q'q'(x-p')-q''q''(x-p'')-2qq'q'' = 0.$$

Quae e formulis 18), 19), 21) in hanc abeunt:

$$35)\quad x^3 - x^2[AA+BB+CC+A'A'+B'B'+C'C'+A''A''+B''B''+C''C''] + x\begin{Bmatrix}(B'C''-B''C')^2+(C'A''-C''A')^2+(A'B''-A''B')^2+\\(B''C-BC'')^2+(C''A-CA'')^2+(A''B-AB'')^2+\\(BC'-B'C)^2+(CA'-C'A)^2+(AB'-A'B)^2\end{Bmatrix} - [A(B'C''-B''C')+B(C'A''-C''A')+C(A'B''-A''B')]^2 = 0.$$

A cuius aequationis cubicae resolutione totum maxime problema pendet; quippe cuius inventis radicibus GG, $G'G'$, $G''G''$, quadrata coëfficientium substitutionum propositarum rationaliter exprimuntur, unde ut ipsi earum eruantur valores, tantum radicis quadraticae extractione opus est.

Eligamus e. g., ut valorem ipsius $\alpha\alpha$ eruamus, e formulis 7), 22) 23) sequentes:

$$\begin{aligned}\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' &= 1\\ GG\alpha\alpha + G'G'\alpha'\alpha' + G''G''\alpha''\alpha'' &= l\\ \frac{\alpha\alpha}{GG} + \frac{\alpha'\alpha'}{G'G'} + \frac{\alpha''\alpha''}{G''G''} &= \frac{mn-l'l'}{\Delta\Delta},\end{aligned}$$

quarum postrema etiam hunc in modum repraesentari potest:

$$G'G'G''G''\alpha\alpha + G''G''GG\alpha'\alpha' + GGG'G'\alpha''\alpha'' = mn-l'l'.$$

Cui addatur prima ducta in $-GG(G'G'+G''G'')$, secunda ducta in GG; prodit:

$$[G^4-G^2(G'G'+G''G'')+G'G'G''G'']\alpha\alpha = G^2l-G^2(G'G'+G''G'')+mn-l'l',$$

unde cum sit

$$GG+G'G'+G''G'' = l+m+n,$$

obtines:

$$\alpha\alpha = \frac{(GG-m)(GG-n)-l'l'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')}.$$

In locum aequationis tertiae etiam haec substitui potest, e 23) petita:

$$G^4\alpha\alpha + G'^4\alpha'\alpha' + G''^4\alpha''\alpha'' = ll+m'm'+n'n',$$

qua iuncta primae ductae in $G'G'G''G''$ et secundae ductae in $-(G'G'-G''G'')$, obtines

$$(GG-G'G')(GG-G''G'')\alpha\alpha = (G'G'-l)(G''G''-l)+m'm'+n'n',$$

sive

$$36)\quad \alpha\alpha = \frac{(l-G'G')(l-G''G'')+m'm'+n'n'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')}.$$

Utrique autem ipsius $\alpha\alpha$ valores inventi e 26), 27) facile inter se conveniunt.

Hac ratione, cognitis ipsis GG, $G'G'$, $G''G''$, quadrata coëfficientium quaesitarum nanciscimur per formulas sequentes:

$$37)\quad \alpha\alpha = \frac{(GG-m)(GG-n)-l'l'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')} \qquad a\,a = \frac{(GG-p')(GG-p'')-qq}{(GG-G'G')(GG-G''G'')}$$

$$\alpha'\alpha' = \frac{(G'G'-m)(G'G'-n)-l'l'}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)} \qquad b\,b = \frac{(G'G'-p')(G'G'-p'')qq}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)}$$

$$\alpha''\alpha'' = \frac{(G''G''-m)(G''G''-n)-l'l'}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')} \qquad c\,c = \frac{(G''G''-p')(G''G''-p'')-qq}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')}$$

$$\beta\beta = \frac{(GG-n)(GG-l)-m'm'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')} \qquad a'a' = \frac{(GG-p'')(GG-p)-q'q'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')}$$

$$\beta'\beta' = \frac{(G'G'-n)(G'G'-l)-m'm'}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)} \qquad b'b' = \frac{(G'G'-p'')(G'G'-p)-q'q'}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)}$$

$$\beta''\beta'' = \frac{(G''G''-n)(G''G''-l)-m'm'}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')} \qquad c'c' = \frac{(G''G''-p'')(G''G''-p)-q'q'}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')}$$

$$\gamma\gamma = \frac{(GG-l)(GG-m)-n'n'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')} \qquad a''a'' = \frac{(GG-p)(GG-p')-q''q''}{(GG-G'G')(GG-G''G'')}$$

$$\gamma'\gamma' = \frac{(G'G'-l)(G'G'-m)-n'n'}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)} \qquad b''b'' = \frac{(G'G'-p)(G'G'-p')-q''q''}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)}$$

$$\gamma''\gamma'' = \frac{(G''G''-l)(G''G''-m)-n'n'}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')} \qquad c''c'' = \frac{(G''G''-p)(G''G''-p')-q''q''}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')}.$$

Uti quantitatem $\alpha\alpha$ sub alia forma 36) exhibuimus, ita etiam reliquis formam similem assignare licet, cui, cum in promtu sit, supersedemus.

His inventis, ipsas coëfficientes quaesitas per extractionem radicis quadraticae eruimus; signa autem radicum non omnia pro arbitrio assumere licet. Videbimus enim, non modo $\alpha\alpha$, sed etiam producta $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, ope ipsarum GG, $G'G'$, $G''G''$, rationaliter exprimi posse, unde patet, signo unius e quantitatibus α, β, γ pro arbitrio assumto, reliquarum signa determinata esse.

Producta illa $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ eorumque similia ex antecedentibus facile invenimus. Exempli gratia, ut eruatur productum $\beta\gamma$, eligimus e 7), 24), 25) sequentes formulas:

$$\begin{aligned}
\beta\gamma + \quad \beta'\gamma' + \quad \beta''\gamma'' &= 0\\
GG\beta\gamma + G'G'\beta'\gamma' + G''G''\beta''\gamma'' &= l'\\
\frac{\beta\gamma}{GG} + \quad \frac{\beta'\gamma'}{G'G'} + \quad \frac{\beta''\gamma''}{G''G''} &= \frac{m'n'-ll'}{\Delta},
\end{aligned}$$

quarum postremam, cum sit $\Delta = GG'G''$, rursus ita exhibemus:

$$G'G'G''G''\beta\gamma + G''G''GG\beta'\gamma' + GGG'G'\beta''\gamma'' = m'n'-ll'.$$

Qua addita primae ductae in $-GG(G'G'+G''G'')$ et secundae ductae in GG, prodit:

$$(GG-G'G')(GG-G''G'')\beta\gamma = l'(GG-l)+m'n',$$

sive $$\beta\gamma = \frac{l'(GG-l)+m'n'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')}.$$

Hac ratione sequens nanciscimur formularum systema:

38)
$$\beta\gamma = \frac{l'(GG-l)+m'n'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')} \qquad a'a'' = \frac{q(GG-p)+q'q''}{(GG-G'G')(GG-G''G'')}$$
$$\beta'\gamma' = \frac{l'(G'G'-l)+m'n'}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)} \qquad b'b'' = \frac{q(G'G'-p)+q'q''}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)}$$
$$\beta''\gamma'' = \frac{l'(G''G''-l)+m'n'}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')} \qquad c'c'' = \frac{q(G''G''-p)+q'q''}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')}$$
$$\gamma\alpha = \frac{m'(GG-m)+n'l'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')} \qquad a''a = \frac{q'(GG-p')+q''q}{(GG-G'G')(GG-G''G'')}$$
$$\gamma'\alpha' = \frac{m'(G'G'-m)+n'l'}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)} \qquad b''b = \frac{q'(G'G'-p')+q''q}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)}$$
$$\gamma''\alpha'' = \frac{m'(G''G''-m)+n'l'}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')} \qquad c''c = \frac{q'(G''G''-p')+q''q}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')}$$
$$\alpha\beta = \frac{n'(GG-n)+l'm'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')} \qquad aa' = \frac{q''(GG-p'')+qq'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')}$$
$$\alpha'\beta' = \frac{n'(G'G'-n)+l'm'}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)} \qquad bb' = \frac{q''(G'G'-p'')+qq'}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)}$$
$$\alpha''\beta'' = \frac{n'(G''G''-n)+l'm'}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')} \qquad cc' = \frac{q''(G''G''-p'')+qq'}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')}.$$

Ex his formulis videmus, determinatis signis ipsarum α, α', α'' et a, b, c, reliquarum etiam signa determinata esse. Neque illa omnino pro arbitrio assumere licet, ubi, ut supra fecimus 10), statuere placet $\varepsilon = 1$, $e = 1$; quippe quo facto etiam e quantitatibus α, α', α'' nec non e quantitatibus a, b, c unius signum per signa duarum reliquarum determinatur.

Adnotemus adhuc, quo methodorum, quibus uti licet, varietas demonstretur, omnia, quae ad resolutionem problematis necessaria sint, etiam e formulis 28) peti potuisse. Eligamus e. g. aequationes tres primas alterius systematis, quas ita exhibemus:

$$0 = (l-GG)\alpha + n'\beta + m'\gamma$$
$$0 = n'\alpha + (m-GG)\beta + l'\gamma$$
$$0 = m'\alpha + l'\beta + (n-GG)\gamma,$$

e quibus, eliminatis α, β, γ per regulas notas, primum obtinemus:

$$(l-GG)(m-GG)(n-GG) - l'l'(l-GG) - m'm'(m-GG) - n'n'(n-GG) + 2l'm'n' = 0,$$

quae aequatio cubica, e cuius resolutione GG prodit, eadem est atque illa supra inventa 33). Eadem methodo e reliquis formulis 28) inveniuntur $G'G'$, $G''G''$ eiusdem aequationis cubicae radices esse.

Porro ex aequatione secunda et tertia sequuntur proportiones:

$$\alpha:\beta:\gamma = \alpha\alpha:\alpha\beta:\alpha\gamma =$$
$$(m-GG)(n-GG)-l'l' : l'm'-n'(n-GG) : n'l'-m'(m-GG);$$

e tertia et prima:

$$\beta:\gamma:\alpha = \beta\beta:\beta\gamma:\beta\alpha =$$
$$(n-GG)(l-GG)-m'm' : m'n'-l'(l-GG) : l'm'-n'(n-GG);$$

e prima et secunda:

$$\gamma:\alpha:\beta = \gamma\gamma:\gamma\alpha:\gamma\beta =$$
$$(l-GG)(m-GG)-n'n' : n'l'-m'(m-GG) : m'n'-l'(l-GG).$$

Unde etiam:

$$\alpha\alpha:\beta\beta:\gamma\gamma =$$
$$(m-GG)(n-GG)-l'l' : (n-GG)(l-GG)-m'm' : (l-GG)(m-GG)-n'n'.$$

Jam vero est

$$(m-GG)(n-GG)+(n-GG)(l-GG)+(l-GG)(m-GG)-l'l'-m'm'-n'n'$$

aequale differentiali expressionis:

$$(x-l)(x-m)(x-n)-l'(x-l)-m'(x-m)-n'(x-n)-2l'm'n'$$
$$= (x-GG)(x-G'G')(x-G''G''),$$

secundum x sumto, siquidem post differentiationem $x = GG$ ponitur, ideoque etiam aequale expressioni

$$(GG-G'G')(GG-G''G'').$$

Unde cum sit

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma = 1,$$

eruimus:

$$\alpha\alpha = \frac{(GG-m)(GG-n)-l'l'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')},$$

quod cum 37) convenit; eademque ratione etiam reliquae formulae 37) inveniuntur.

Invento $\alpha\alpha$, e proportionibus assignatis fit:

$$\alpha\beta = \frac{n'(GG-n)+l'm'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')},$$

quod cum 38) convenit, cuius reliquae formulae eadem methodo inveniri possunt.

15.

Postquam antecedentibus completam problematis resolutionem dedimus, sequentia adiungamus, quibus quaestio nostra haud parum illustratur, eaque adeo ad problema notum et tritum de indagatione axium principalium superficiei secundi ordinis revocatur.

E substitutionibus enim propositis per formulas 13) facile probantur aequationes sequentes:

$$\begin{aligned}
39)\quad Ax + By + Cz &= Gas + G'bs' + G''cs''\\
A'x + B'y + C'z &= Ga's + G'b's' + G''c's''\\
A''x + B''y + C''z &= Ga''s + G'b''s' + G''c''s''\\
Aw + A'w' + A''w'' &= G\alpha t + G'\alpha' u + G''\alpha'' v\\
Bw + B'w' + B''w'' &= G\beta t + G'\beta' u + G''\beta'' v\\
Cw + C'w' + C''w'' &= G\gamma t + G'\gamma' u + G''\gamma'' v,
\end{aligned}$$

unde etiam per theorema §. 10:

$$\begin{aligned}
40)\quad (Ax+By+Cz)^2 + (A'x+B'y+C'z)^2 + (A''x+B''y+C''z)^2 &= GGss + G'G's's' + G''G''s''s'',\\
(Aw+A'w'+A''w'')^2 + (Bw+B'w'+B''w'')^2 + (Cw+C'w'+C''w'')^2 &= GGtt + G'G'uu + G''G''vv,
\end{aligned}$$

quas aequationes etiam ita repraesentare licet:

$$\begin{aligned}
41)\quad lxx + myy + nzz + 2l'yz + 2m'zx + 2n'xy &= GGss + G'G's's' + G''G''s''s''\\
pww + p'w'w' + p''w''w'' + 2qw'w'' + 2q'w''w + 2q''ww' &= GGtt + G'G'uu + G''G''vv.
\end{aligned}$$

Quoties vero substitutiones propositae praeter aequationes

$$\begin{aligned}
xx + yy + zz &= ss + s's' + s''s''\\
ww + w'w' + w''w'' &= tt + uu + vv,
\end{aligned}$$

etiam aequationibus 40) sive 41) satisfacere debent, substitutiones illae, sicuti quantitates GG, $G'G'$, $G''G''$ determinatae sunt. Quod cum idem sit, ac si proponeretur, ellipsoidas, quae ad axes coordinatarum orthogonales relatae per aequationes exprimuntur:

$$\begin{aligned}
(Ax+By+Cz)^2 + (A'x+B'y+C'z)^2 + (A''x+B''y+C''z)^2 &= KK\\
(Aw+A'w'+A''w'')^2 + (Bw+B'w'+B''w'')^2 + (Cw+C'w'+C''w'')^2 &= KK,
\end{aligned}$$

ad axes principales referre, problema ad indagationem axium principalium binarum ellipsoidarum revocatum est, quae in utraque ellipsoida fiunt $\frac{K}{G}$, $\frac{K}{G'}$, $\frac{K}{G''}$, et quarum situ substitutiones adhibendae indicantur.

Quo melius natura et situs ellipsoidarum perspiciatur, adnotemus, alterius tria puncta esse, quorum coordinatae respective sint, posito brevitatis causa $K=1$,

$$\text{primi:}\quad \frac{B'C''-B''C'}{\Delta},\ \frac{C'A''-C''A'}{\Delta},\ \frac{A'B''-A''B'}{\Delta},$$

$$\text{secundi:}\quad \frac{B''C-BC''}{\Delta},\ \frac{C''A-CA''}{\Delta},\ \frac{A''B-AB''}{\Delta},$$

tertii: $\frac{BC'-B'C}{\Delta}$, $\frac{CA'-C'A}{\Delta}$, $\frac{AB'-A'B}{\Delta}$;

iisque terminari diametros tres inter se coniugatas, quas patet perpendiculares esse tribus planis, quae aequationibus definiuntur:

$Ax+By+Cz=0$, $A'x+B'y+C'z=0$, $A''x+B''y+C''z=0$;

alterius superficiei tria puncta assignari posse, quorum coordinatae sunt,

primi: $\frac{B'C''-B''C'}{\Delta}$, $\frac{B''C-BC''}{\Delta}$, $\frac{BC'-B'C}{\Delta}$,

secundi: $\frac{C'A''-C''A'}{\Delta}$, $\frac{C''A-CA''}{\Delta}$, $\frac{CA'-C'A}{\Delta}$,

tertii: $\frac{A'B''-A''B'}{\Delta}$, $\frac{A''B-AB''}{\Delta}$, $\frac{AB'-A'B}{\Delta}$,

quibus punctis terminantur diametri superficiei tres inter se coniugatae, quas patet perpendiculares esse planis:

$Aw+A'w'+A''w''=0$, $Bw+B'w'+B''w''=0$, $Cw+C'w'+C''w''=0$.

Unde adeo problema revocatum est ad indagationem axium principalium superficierum, quarum diametri tres inter se coniugatae dantur.

Simili modo vel etiam e 40) — 41) per theorema §i 13. probantur aequationes:

42) $[(B'C''-B''C')x+(C'A''-C''A')y+(A'B''-A''B')z]^2+$
$[(B''C-BC'')x+(C''A-CA'')y+(A''B-AB'')z]^2+$
$[(BC'-B'C)x+(CA'-C'A)y+(AB'-A'B)z]^2$
$= G'G'G''G''ss+G''G''GGs's'+GGG'G's''s'',$

$[(B'C''-B''C')w+(B''C-BC'')w'+(BC'-B'C)w'']^2+$
$[(C'A''-C''A')w+(C''A-CA'')w'+(CA'-C'A)w'']^2+$
$[(A'B''-A''B')w+(A''B-AB'')w'+(AB'-A'B)w'']^2$
$= G'G'G''G''tt+G''G''GGuu+GGG'G'vv,$

quibus et ipsis aliarum binarum ellipsoidarum continetur reductio ad axes earum principales.

Iam transeamus ad problema initio propositum de transformatione duplicis integralis, cuius solutionem sine calculo de quaestionibus antecedentibus deducimus.

(Cont. seq. prox.)

20.

Mémoire sur la courbure des surfaces.

(Par Mr. *Poisson* à Paris.)

I.

Si l'on fait passer différents plans par un même point d'une surface courbe, les rayons de courbure relatifs à ce point, de toutes les sections planes de la surface, auront entre eux des rapports indépendants de sa forme particulière, et que l'on doit placer au rang des plus beaux théorèmes de la géométrie moderne. Parmi toutes les sections normales, il y en a deux que l'on appele *sections principales*, et qui répondent, l'une au plus grand et l'autre au plus petit rayon de courbure. Euler à fait voir que ces deux sections sont toujours perpendiculaires l'une à l'autre; en prenant pour la courbure d'une ligne, une fraction qui ait l'unité pour numérateur et son rayon de courbure pour denominateur, il a aussi démontré que la courbure d'une section normale quelconque est égale à la somme des deux courbures principales, multipliées respectivement par les carrés des cosinus des angles que leurs plans font avec celui de la section dont il s'agit; d'où l'on conclut que la somme des courbures de deux sections normales, qui se coupent à angle droit, est une quantité constante autour de chaque point de la surface. Quoique Euler eût donné l'expression générale du rayon de courbure d'une section oblique, il n'a cependant pas remarqué le rapport très-simple qui existe entre ce rayon et celui de la section normale, faite par la même tangente à la surface. C'est Meunier qui a montré que le rayon de la section oblique est la projection sur son plan, du rayon de la section normale; ensorte que le premier de ces deux rayons de courbure est égal au second, multiplié par le cosinus de l'angle des deux sections auxquelles ils répondent, et que les cercles osculateurs de toutes les sections passant par une même tangente à la surface, sont situés sur une sphère qui a pour rayon celui du cercle normal. Ce théorème joint à celui d'Euler, renferme la théorie générale de la courbure des surfaces, qui se trouve ainsi réduite à ses éléments les plus simples; car il suffit de connoitre, en chaque point d'une surface quelconque, les directions et les courbures des deux sections prin-

cipales, pour en conclure immédiatement, la courbure de toute autre section normale ou oblique.

Monge a considéré cette théorie sous un autre point de vue. Il a nommé *lignes de courbure* d'une surface, les lignes pour lesquelles les normales à cette surface, en deux points consécutifs, viennent se rencontrer, et *centres de courbure* de cette même surface, les points de rencontre des normales successives. Il a fait voir que sur toutes les surfaces, il existe deux séries de lignes de courbure qui se croisent à angle droit; les normales menées par tous les points de chacune de ces lignes, forment des surfaces développables qui se coupent aussi à angle droit et divisent l'espace en filets quadrangulaires qui ont leurs bases sur la surface donnée; les arrêtes de rebroussement forment deux surfaces distinctes, ou, plus généralement, deux nappes d'une même surface qui est le lieu de tous les centres de courbure de celle que l'on considère. Monge a determiné, pour tous les points d'une surface quelconque, les directions rectangulaires des deux lignes de courbure, lesquelles directions coincident avec celles des sections principales, de sorte que les rayons de courbure de ces deux lignes que Monge a aussi determinés, ne sont autre chose que le plus grand et le plus petit rayon des sections normales. Sur une surface donnée, il peut exister des points particuliers pour lesquels ces deux rayons, et, par conséquent, tous les autres, sont égaux entre eux; Monge a nommé ces points des *ombilics*, et il en a determiné la position sur l'ellipsoïde par exemple, où ils sont au nombre de quatre. La surface de la sphère est la seule dont tous les points jouissent de cette propriété; car on démontre que si les rayons de courbure sont tous égaux autour de chaque point d'une surface, ils ne varieront pas non plus en passant d'un point à un autre de cette même surface, qui sera parconséquent sphérique.

II.

Les théorèmes sur la courbure des surfaces que nous venons de rappeler, supposent évidemment que les tangentes à toutes les sections faites par le point que l'on considère, sont dans un même plan, ou, autrement dit, qu'il n'y a en ce point qu'un seul plan tangent; mais il existe des points sur certaines surfaces, où le plan tangent est unique et où cependant ces théorèmes n'ont pas lieu. En ces points singuliers, la direction des lignes de courbure n'est point indeterminée comme dans les ombilics; mais leur nombre est plus grand que deux: il peut être quatre, six ou

tout autre nombre pair; et le rayon de courbure d'une section normale est susceptible de plusieurs *maxima* et *minima*, dont le nombre total est toujours égal à celui des lignes de courbure.

Cette exception à la théorie générale n'avoit pas encore été remarquée; elle ne se rencontre pas dans le cas des surfaces du second degré; mais elle peut se présenter assez fréquemment dans d'autres surfaces; et pour en donner un exemple, il suffit de considérer la surface engendrée par une parabole, tournant autour de son axe, tandis que son paramètre varie par degrés insensibles, de telle sorte qu'il soit une fonction donnée de l'angle décrit à chaque instant. Cette espèce de paraboloïde aura pour plan tangent unique, au sommet de sa génératrice, le plan perpendiculaire à son axe; les sections normales en ce point seront les positions successives de cette courbe; leurs rayons de courbure varieront suivant la même loi que son paramètre, et pourront, consequemment passer par autant d'alternatives de *maximum* et de *minimum* que l'on voudra.

Mais quoique la loi de variation des courbures normales soit ainsi tout-à-fait arbitraire autour de certains points des surfaces, néanmoins les courbures obliques s'en déduiront toujours par la règle ordinaire, et le théorème de Meunier s'appliquera encore à ces points, pour lesquels celui d'Euler n'aura plus lieu.

J'ai été curieux d'examiner ce que deviennent les formules générales dans ces cas d'exception. La difficulté d'analyse qu'elles presentent alors tient à ce que les différences partielles d'une fonction de plusieurs quantités, qui répondent aux valeurs évanouissantes de ces variables, peuvent dépendre des rapports que l'on établit entre ces mêmes variables avant qu'elles s'évanouissent. Elle s'éclaircit complétement, en remplaçant deux des coordonnées rectangulaires que les formules renferment, par des coordonnées polaires; et l'on trouve, de cette manière, que ces formules sont effectivement susceptibles, dans certains cas, de plus de deux *maxima* ou *minima*, auxquels répondent un pareil nombre de lignes de courbure, qui se croisent en un même point et se coupent sous des angles aigus.

Il était nécessaire de considerer ces cas particuliers, pour completer la théorie de la courbure des surfaces; mais avant de nous en occuper, nous allons debord rappeler les formules générales et les conséquences qui en ont été déduites.

III.

Soit AMB (Pl. 3.) la section d'une surface par un plan oblique qui coupe le plan tangent au point M suivant la droite CMD; par le point M et par un point M' de la même courbe AMB, infiniment voisin de M, menons des plans normaux à cette courbe: ces deux plans se couperont suivant une droite ON perpendiculaire au plan oblique et qui rencontre ce plan au centre de courbure O de la courbe AMB. Par le point M élevons aussi une normale MN à la surface. Cette normale et la droite ON se rencontreront en un certain point N, puisqu'elles sont toutes deux comprises dans le plan perpendiculaire à la courbe AMB, qu'on a mené par le point M. Appelons ϱ la longueur de MN', ϱ_1 le rayon de courbure MO de la courbe AMB, et ε l'angle OMN, inclinaison de la normale à la surface sur le plan oblique; nous aurons

$$1. \qquad \varrho_1 = \varrho \cos\varepsilon;$$

en sorte que pour connaitre le rayon de courbure d'une section quelconque, il s'agira de calculer la valeur de ϱ, ou d'une distance comptée sur la normale.

Désignons par x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires du point M; $x+\partial x$, $y+\partial y$, $z+\partial z$, seront celles du point M'; et si l'on représente pas ∂s, l'élément MM' de la courbe AMB, et par α, β, γ, les angles que fait sa direction avec les axes des x, y, z, on aura

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \partial s^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos\alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \cos\beta, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \cos\gamma.$$

Le plan normal à cette courbe en ce point M, aura pour équation:

$$2. \qquad (x'-x)\,\partial x + (y'-y)\,\partial y + (z'-z)\,\partial z = 0,$$

x', y', z', étant les coordonnées courantes. En la différentiant par rapport à x, y, z, ∂x, ∂y, ∂z, on obtiendra une seconde équation, savoir:

$$3. \qquad (x'-x)\,\partial^2 x + (y'-y)\,\partial^2 y + (z'-z)\,\partial^2 z = \partial s^2,$$

qui appartiendra également à l'intersection ON des deux plans normaux consécutifs; ensorte que cette droite sera déterminée par les équations (2.) et (3.).

D'un autre côté, si l'on considère z comme une fonction de x et y, donnée par l'équation de la surface, et si l'on fait

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \partial z = p\,\partial x + q\,\partial y,$$

les équations de la normale MN seront

$$4. \quad x'-x+p(z'-z)=0, \quad y'-y+q(z'-z)=0;$$

x', y', z', désignant encore les coordonnées courantes. Ces équations satisfont, comme cela doit être, à l'équation (2.) du plan normal; en les combinant avec l'équation (3.), on déterminera les coordonnées x', y', z', du point N commun aux deux droites MN et ON: de cette manière, on trouve

$$x'-x=-\frac{p\partial s^2}{D}, \quad y'-y=-\frac{q\partial s^2}{D}, \quad z'-z=\frac{\partial s^2}{D},$$

en faisant, pour abréger,

$$D=\partial^2 z-p\partial^2 x-q\partial^2 y.$$

On aura, en même tems

$$\varrho^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2;$$

il en resultera donc

$$5. \quad \varrho=\frac{\partial s^2}{D}\sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

Je différentie complétement la valeur de ∂z; ce qui donne

$$\partial^2 z=p\partial^2 x+q\partial^2 y+\partial p\partial x+\partial q\partial y,$$

et, par conséquent,

$$D=\partial p\partial x+\partial q\partial y.$$

Les différentielles secondes de x, y, z, qui dépendent de la courbure de AMB, ayant disparu de la valeur de D, celle de ϱ ne contiendra plus que leurs différentielles premières, qui sont relatives à sa direction, et des fonctions de x et y, provenant des différences partielles premières et secondes de z; par conséquent, si l'on fait tourner le plan de la courbe AMB autour de sa tangente CMD, la formule (5.) ne changera pas de valeur; et la droite MN étant ainsi indépendante de l'angle ε, on voit, en faisant $\varepsilon=0$ dans l'équation (1.), que cette droite est le rayon et N le centre de courbure de la section normale. Cela posé, si l'on donne ensuite une valeur quelconque à l'angle ε dans cette équation, on voit aussi qu'elle contient le théorème de Meunier, relatif aux courbures des sections obliques, que l'on a cité plus haut.

IV.

Maintenant, faisons,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t;$$

nous aurons

$$\partial p=r\partial x+s\partial y, \quad \partial q=s\partial x+t\partial y;$$

et si l'on substitue ces valeurs dans celle de D, et celle ci dans la formule (5.), il en resultera

$$6. \quad \varrho = \frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

en ayant égard aux valeurs de $\frac{\partial x}{\partial s}$ et $\frac{\partial y}{\partial s}$. Si l'on met la valeur de ∂z dans celle de ∂s^2, on aura, en même tems

$$\partial s^2 = (1+p^2)\partial x^2 + 2pq\,\partial x\,\partial y + (1+q^2)\partial y^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$7. \quad (1+p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1+q^2)\cos^2\beta = 1.$$

Généralement, les quantités p, q, r, s, t, sont indépendantes de la direction de la tangente CMD; en excluant les cas particuliers où cela n'a pas lieu et dont il sera question ci-après, il suffira donc, pour determiner le *maximum* ou le *minimum* de ϱ, d'égaler à zéro la différentielle de son dénominateur, prise par rapport à $\cos\alpha$ et $\cos\beta$, et de joindre à cette équation, la différentielle de l'équation (7.). On aura, de cette manière,

$$(r\cos\alpha + s\cos\beta)\sin\alpha\,\partial\alpha = -(t\cos\beta + s\cos\alpha)\sin\beta\,\partial\beta,$$

$$[(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta]\sin\alpha\,\partial\alpha = -[(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha]\sin\beta\,\partial\beta;$$

d'où l'on tire

$$8. \quad \frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{t\cos\beta + s\cos\alpha} = \frac{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta}{(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha}.$$

On obtiendra donc l'équation d'où dépendent les valeurs extrèmes de ϱ, en éliminant $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ entre les équations (6.), (7.), (8.).

Pour effectuer cette élimination, je multiplie par $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, les deux membres de l'équation (8.), puis j'ajoute l'unité à chaque produit; en faisant ensuite disparoître les dénominateurs et ayant égard aux équations (6.) et (7.), il vient

$$t\cos\beta + s\cos\alpha = \frac{1}{\varrho}\sqrt{(1+p^2+q^2)}\,[(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha].$$

En opérant de même sur l'équation (8.), après avoir préalablement renversé les fractions qui forment ses deux membres, on trouve

$$r\cos\alpha + s\cos\beta = \frac{1}{\varrho}\sqrt{(1+p^2+q^2)}\,[(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta].$$

Ces deux équations sont la même chose que

$$9. \quad \begin{cases} \left(t - \frac{1+q^2}{\varrho}\sqrt{(1+p^2+q^2)}\right)\cos\beta = \left(\frac{pq}{\varrho}\sqrt{(1+p^2+q^2)} - s\right)\cos\alpha, \\ \left(r - \frac{1+p^2}{\varrho}\sqrt{(1+p^2+q^2)}\right)\cos\alpha = \left(\frac{pq}{\varrho}\sqrt{(1+p^2+q^2)} - s\right)\cos\beta. \end{cases}$$

En les multipliant membre à membre et réduisant, on a finalement

10. $(rt-s^2)\varrho^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\varrho\sqrt{(1+p^2+q^2)}+(1+p^2+q^2)^2=0.$

Cette équation étant du second degré, il s'ensuit que dans le cas général que nous examinons, le rayon de courbure d'une section normale n'est susceptible que d'un *maximum* et d'un *minimum*, qui pourront être, en grandeur absolue, deux *maxima* ou deux *minima*, lorque la courbure de la surface changera de signe autour du point donné M.

V.

En observant que

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{\partial y}{\partial x},$$

on pourra mettre l'équation (8.) sous la forme:

11. $$[(1+q^2)s-pqt]\frac{\partial y^2}{\partial x^2}+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{\partial y}{\partial x}-[(1+p^2)s-pqr]=0.$$

Elle servira à déterminer pour chaque point M de la surface, les directions de ses deux sections principales; mais si l'on veut connoître celle de ces deux sections qui répond, soit au plus grand, soit au plus petit rayon de courbure, il faudra mettre $\frac{\partial y}{\partial x}$ au lieu de $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ dans l'une des équations (9.), et y substituer successivement les deux valeurs de ϱ tirées de l'équation (10.).

Pour conclure facilement de cette équation (10.), l'angle des deux sections principales, on fera coincider le plan des x et y avec le plan tangent en M, ou seulement avec un plan parallèle; on aura alors $p=0$ et $q=0$; ce qui réduira cette équation à

12. $$\frac{\partial y^2}{\partial x^2}+\frac{r-t}{s}\frac{\partial y}{\partial x}-1=0.$$

Or, si l'on appele ζ et ζ' les angles que ces deux sections font avec le plan des x et z, les deux racines de cette équation seront $\operatorname{tang}\zeta$ et $\operatorname{tang}\zeta'$; on aura donc

$$\operatorname{tang}\zeta\operatorname{tang}\zeta'=-1;$$

ce qui montre que les deux sections principales sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Le plan des x et y étant tangent en M à la surface, les angles α et β relatifs à une section normale quelconque, seront le complément l'un de l'autre, et la formule (6.) se réduira à

$$\frac{1}{\varrho}=r\cos^2\alpha+2s\sin\alpha\cos\alpha+t\sin^2\alpha.$$

Si l'on donne les valeurs de ϱ qui répondent à trois sections particulières, elles serviront à déterminer les trois quantités r, s, t, et, par suite, la courbure d'une section normale quelconque. Mais il suffira de deux rayons de courbure pour déterminer tous les autres, lorsque ces deux rayons seront ceux des sections principales. En effet, on peut prendre les tangentes à ces deux sections rectangulaires, pour axes des x et des y; alors l'une des deux quantités $\text{tang}\zeta$ et $\text{tang}\zeta'$ sera nulle et l'autre infinie; et comme on a, d'après l'équation (12.),

$$\text{tang}\zeta + \text{tang}\zeta' = \frac{t-r}{s},$$

il s'ensuit qu'on devra avoir $s = 0$. Il en resultera donc

$$\frac{1}{\varrho} = r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha;$$

par conséquent, si l'on désigne par R et R' les rayons de courbure principaux qui répondent à $\alpha = 0$ et α égal à un angle droit, on aura

$$\frac{1}{R} = r, \quad \frac{1}{R'} = t;$$

d'ou l'on conclut, pour un angle α quelconque,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'};$$

équation qui renferme le théorème relatif aux courbures des sections normales que nous avons cité plus haut. En désignant par ϱ' le rayon de courbure d'une section perpendiculaire à celle qui répond au rayon ϱ, et changeant l'angle α en son complément, nous aurons

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{\sin^2\alpha}{R} + \frac{\cos^2\alpha}{R'};$$

et en ajoutant cette équation à la précédente, il vient

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'};$$

ce qui renferme aussi un théorème connu.

VI.

Quelle que soit la direction des axes des coordonnées, on conclura de l'équation (10.), dont R et R' sont les deux racines

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{RR'} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2};$$

d'où l'on tire

$$(1+p^2+q^2)^3\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)^2=[(1+q^2)r-(1+p^2)t]^2+4[pqr-(1+p^2)s][pqt-(1+q^2)s].$$

Pour que les deux courbures principales, et, par conséquent, celles de toutes les autres sections normales soient égales autour du point M, qui sera alors un *ombilic*, il faudra donc que le second membre de cette équation soit nul; or, je fais, pour un moment

$$pqr-(1+p^2)s=pqU,$$
$$pqt-(1+q^2)s=pqV;$$

il en résulte

$$(1+q^2)r-(1+p^2)t=(1+q^2)U-(1+p^2)V;$$

l'équation équivalente à $R=R'$ deviendra donc

$$[(1+q^2)U-(1+p^2)V]^2+4UV=0;$$

et comme on en déduit

$$U=\frac{V}{(1+q^2)^2}[\sqrt{(p^2+q^2+p^2q^2)}+\sqrt{-1}]^2,$$

il s'ensuit que la condition $R=R'$ ne peut être remplie, à moins que les quantités U et V ne soient séparément nulles. Cela étant, l'équation (11.) devient identique; ce qui devoit arriver, puisque toutes les sections normales faites par le point M sont, dans ce cas, des sections principales.

Je dis de plus qu'il n'y a que la surface de la sphère qui satisfasse en tous ses points à ces conditions. En effet, les équations $U=0$ et $V=0$ sont la même chose que

$$\frac{p}{1+p^2}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$
$$\frac{q}{1+q^2}\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

En les intégrant et désignant par X une fonction arbitraire de x, et par Y une fonction arbitraire de y, on aura

$$1+p^2=Yq^2,\quad 1+q^2=Xp^2;$$

d'où l'on tire

$$p=\sqrt{\left(\frac{1+Y}{XY-1}\right)},\quad q=\sqrt{\left(\frac{1+X}{XY-1}\right)}.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$ peut se réduire à la forme

$$\frac{1}{(1+X)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{1}{(1+Y)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Pour qu'elle subsiste, il faudra que ses deux membres soient une même

constante arbitraire que je representerai par $\frac{1}{\delta}$. On aura donc, en intégrant et désignant par a et b deux autres constantes arbitraires,

$$\frac{\delta}{\sqrt{(1+X)}} = a-x, \quad \frac{\delta}{\sqrt{(1+Y)}} = b-y.$$

Je tire de là les valeurs de X et Y; je les substitue dans celles de p et q, et celles-ci dans l'équation $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$; il vient

$$\partial z = \frac{(a-x)\,\partial x + (b-y)\,\partial y}{\sqrt{(\delta^2-(a-x)^2-(b-y)^2)}};$$

en intégrant et désignant par c une nouvelle constante arbitraire, on aura donc

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \delta^2;$$

ce qui est l'équation générale de la sphère.

VII.

Les différentielles des équations (4.), prises par rapport à x, y, z, p, q, appartiennent aux points où la normale menée par le point M, peut être rencontrée par des normales consécutives. Les équations différentielles sont

$$13. \quad \begin{cases} \partial x + p\,\partial z = (z'-z)\,\partial p, \\ \partial y + q\,\partial z = (z'-z)\,\partial q; \end{cases}$$

pour que la rencontre ait lieu, il faudra donc, en éliminant entre elles $z'-z$, que l'on ait

$$14. \quad (\partial x + p\,\partial z)\,\partial q = (\partial y + q\,\partial z)\,\partial p;$$

par conséquent, cette dernière équation est celle des lignes de courbure, que l'on a précedemment définies. Or, en y substituant pour ∂z, ∂p, ∂q leurs valeurs, elle coincide avec l'équation (11.); il en résulte donc qu'en chaque point de la surface, les directions de ces lignes sont les mêmes que celles des sections principales.

Les équations (13.) peuvent s'écrire ainsi:

$$[1+p^2-(z'-z)r]\,\partial x = [(z'-z)s-pq]\,\partial y,$$
$$[1+q^2-(z'-z)t]\,\partial y = [(z'-z)s-pq]\,\partial x;$$

en les multipliant membre à membre nous aurons donc

$$15. \quad 1+p^2+q^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t](z'-z)+(rt-s^2)(z'-z)^2=0;$$

en appelant ϱ la distance d'un centre de courbure au point M, on a d'ailleurs

$$\varrho^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2;$$

et si l'on élimine $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, entre ces deux dernières équations, jointes aux équations (4.), on obtient l'équation (10.); ce qui montre que les rayons de courbure d'une surface, suivant la définition de Monge,

sont les rayons *maximum* et *minimum* des sections principales. En éliminant x, y, z entre les équations (4.) et (15.), et l'équation de la surface donnée, on aura en x', y', z', l'équation du lieu de tous les centres de courbure.

VIII.

Lorsque le point M sera un ombilic, l'équation (14.) équivalente à l'équation (11.) sera identique; quelle que soit la direction déterminée par le rapport de ∂y à ∂x, la normale MN au point M sera donc rencontrée par la normale consécutive, et les droites menées par ce point dans le plan tangent, seront toutes tangentes à des lignes de courbure. Mais parmi toutes ces lignes en nombre infini, il y en aura une ou plusieurs qui se distingueront des autres par une propriété particulière.

Observons d'abord qu'en général, aucune normale MN n'est rencontrée rigoureusement par une autre normale M_1N_1, quel que rapprochés que soient les points de la surface M et M_1 auxquels elles répondent: en appelant $\triangle$ leur plus courte distance et σ la longueur de la droite MM_1, ces deux quantités seront du même ordre de grandeur, pour une direction quelconque de MM_1; et ce qui caractérise une ligne de courbure, c'est que, dans sa direction, le rapport de $\triangle$ à σ devient infiniment petit en même tems que σ. Or, cela aura lieu dans toutes les directions autour de M_1 si ce point est un ombilic; mais il y aura une ou plusieurs directions de MM_1, pour lesquelles le rapport dont il s'agit sera infiniment plus petit que pour toutes les autres; en sorte que, suivant ces directions particulières, il existera un rapprochement infiniment plus intime que dans tout autre sens, entre les deux normales consécutives MN et M_1N_1, sans qu'on puisse dire, cependant, que ces deux droites se rencontrent rigoureusement.

Pour le faire voir, on désignera par i une fraction qu'on supposera d'abord très-petite et ensuite infiniment petite, et l'on prendra $x + ih$, $y + ik$, pour ce que deviennent x et y relativement au point M_1; h et k étant des quantités indéterminées, dont le rapport dépendra de la directuoi de MM_1. Par les règles ordinaires, on calculera la plus courte distance $\triangle$: on pourra développer son expression et celle de σ, suivant les puissances de i; et l'on en conclura, en série convergente,

$$\frac{\triangle^2}{\sigma^2} = \varphi^2 + i\psi + i^2\omega + \text{etc.}$$

φ, ψ, ω etc., étant des quantités indépendantes de i. La première sera une fonction de h, k, p, q, r, s, t; la seconde contiendra, en outre, les différences partielles du 3me ordre; la troisième, celles du 4me ordre, etc.

Cela posé, lorsque la fraction i deviendra infiniment petite, le rapport de $\triangle$ à σ sera généralement une quantité finie, égale à φ; mais si l'on determine le rapport de k et h, de manière que l'on ait $\varphi = 0$, la valeur de $\frac{\triangle^2}{\sigma^2}$ sera infiniment petite, du même ordre que i; or, cette équation $\varphi = 0$ ne différera de l'équation (11.), qu'en ce qu'elle renfermera $\frac{k}{h}$ au lieu de $\frac{\partial y}{\partial x}$; il s'ensuit donc qu'une valeur infiniment petite du 1er ordre de $\frac{\triangle^2}{\sigma^2}$ est la propriété générale des lignes de courbure. Si, au point M, la quantité φ est nulle pour toutes les valeurs de h et k, la propriété dont il s'agit aura lieu dans toutes les directions autour de ce point; mais on pourra disposer du rapport de k à h, pour rendre nulle la quantité ψ; et pour les directions qui en resulteront, la valeur de $\frac{\triangle^2}{\sigma^2}$ sera infiniment petite du second ordre. Cette équation $\psi = 0$ sera du 3me degré par rapport à $\frac{k}{h}$; il y aura donc une ou trois directions particulières, pour lesquelles la valeur de $\frac{\triangle^2}{\sigma^2}$ sera infiniment petite par rapport à sa valeur dans toutes les autres directions. On verra de même ce qui arriveroit, si la quantité ψ s'évanouissoit pour toutes les valeurs de h et k; et ainsi de suite.

Je n'entrerai pas dans le détail de ces calculs, dont la longueur seroit toute la difficulté. J'en ai indiqué les resultats, parcequ'ils sont propres à concilier ce qu'on trouve dans l'ouvrage de Monge et dans les *développements de géométrie* de M. Dupin, sur le nombre des lignes de courbure qui passent par un ombilic. Suivant Monge, ce nombre est infini; et, en effet, toutes les lignes qui se croisent en un tel point, jouissent, comme on vient de le dire, de la propriété générale des lignes de courbure. Selon M. Dupin, ce nombre est limité; ce qu'on doit entendre seulement des lignes particulières, dont on vient d'indiquer les directions, et qu'on peut regarder plus spécialement comme des lignes de courbure, à cause du rapprochement plus intime des normales consécutives dans ces directions.

IX.

Maintenant, désignons par u le rayon vecteur de la projection du point quelconque M sur le plan des x et y, et par ϑ l'angle que ce rayon fait avec l'axe des x, de sorte qu'on ait

$$x = u\cos\vartheta, \quad y = u\sin\vartheta.$$

On conclut delà

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\cos\vartheta + q\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = qu\cos\vartheta - pu\sin\vartheta,$$

et réciproquement

$$p = \frac{\partial z}{\partial u}\cos\vartheta - \frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\sin\vartheta,$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial u}\sin\vartheta + \frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\cos\vartheta.$$

En différentiant successivement cette valeur de p par rapport à u et à ϑ, on aura de même

$$r\cos\vartheta + s\sin\vartheta = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cos\vartheta - \frac{1}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial\vartheta}\sin\vartheta + \frac{1}{u^2}\frac{\partial z}{\partial\vartheta}\sin\vartheta,$$

$$su\cos\vartheta - ru\sin\vartheta = \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial\vartheta}\cos\vartheta - \frac{1}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial\vartheta^2}\sin\vartheta - \frac{\partial z}{\partial u}\sin\vartheta - \frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial\vartheta}\cos\vartheta;$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cos^2\vartheta - \frac{2}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\vartheta^2}\sin^2\vartheta + \frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u}\sin^2\vartheta + \frac{2}{u^2}\frac{\partial z}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{1}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial\vartheta}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\vartheta^2}\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u}\sin\vartheta\cos\vartheta$$
$$- \frac{1}{u^2}\frac{\partial z}{\partial\vartheta}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).$$

En opérant de même sur la valeur de q, on retrouvera cette valeur de s, et celle de t, savoir

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\sin^2\vartheta + \frac{2}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\vartheta^2}\cos^2\vartheta + \frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u}\cos^2\vartheta - \frac{2}{u^2}\frac{\partial z}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

laquelle se déduit aussi de la valeur de r, en y augmentant ϑ d'un angle droit.

Lors donc que l'on voudra employer les coordonnées polaires dans les formules relatives à la courbure des surfaces, il suffira d'y substituer ces expressions de p, q, r, s, t, et de mettre $u\cos\vartheta$ et $u\sin\vartheta$ à la place de x et y dans l'équation de la surface donnée, qui fera connoître ensuite la valeur de z en fonction de u et ϑ.

Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point M, et que l'on prenne le plan tangent en ce point pour celui des x et y, il faudra faire $u=0$ après les différentiations relatives à u; ce qui fera évanouir z et $\frac{\partial z}{\partial u}$. Pour un point très-voisin de M, la valeur de z tirée de l'équation de la surface, pourra s'exprimer en une série convergente, ordonnée suivant les puissances de u, et que je representerai par

$$(a.) \quad z = \varphi u^2 + \varphi' u^3 + \varphi'' u^4 + \text{etc.};$$

φ, φ', φ'' etc., étant des fonctions de ϑ. Relativement au point M, on aura $p=0$ et $q=0$; et les valeurs précédentes de r, s, t, ne dépendront que de φ et deviendront

$$(b.) \quad \begin{cases} r = 2\varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} \sin^2\vartheta - 2\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \sin\vartheta\cos\vartheta, \\ s = \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} \sin\vartheta\cos\vartheta, \\ t = 2\varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} \cos^2\vartheta + 2\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \sin\vartheta\cos\vartheta. \end{cases}$$

De plus, il faudra faire

$$\cos\alpha = \cos\vartheta, \quad \cos\beta = \sin\vartheta,$$

dans la formule (6.); d'où il résultera

$$(c.) \quad \rho = \frac{1}{2\varphi},$$

pour le rayon de courbure de la section normale qui répond à l'angle ϑ. Or il peut arriver deux cas très différents que nous allons successivement examiner.

X.

Dans le cas général, l'équation de la surface étant donnée en coordonnées rectangulaires x, y, z, la valeur de z qu'on en déduit peut se développer, pour un point très voisin de leur origine, en une série ordonnée suivant les puissances de x et y; et si cette origine est un point de la surface, et que le plan des x et y soit tangent en ce point, la série commencera par des termes de seconde dimension, de sorte que l'on aura

$$z = fx^2 + gxy + hy^2 + \text{etc.};$$

f, g, h, etc. étant des coefficiens constants. En mettant dans cette série, au lieu de x et y, leurs valeurs $u\cos\vartheta$ et $u\sin\vartheta$, elle sera ordonnée suivant les puissances de u, comme la précédente; et en les comparant l'une à l'autre, on en conclura

$$(d.) \quad \varphi = f\cos^2\vartheta + g\sin\vartheta\cos\vartheta + h\sin^2\vartheta.$$

On aura donc

$$\frac{1}{2\rho} = f\cos^2\vartheta + g\sin\vartheta\cos\vartheta + h\sin^2\vartheta,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{1}{\rho} = f+h+(f-h)\cos 2\vartheta + g\sin 2\vartheta.$$

Je désigne par a un angle constant; je fais $\vartheta = a+w$, et je détermine a en égalant à zéro le coefficient de $\sin 2w$; il en résulte

$$(h-f)\sin 2a + g\cos 2a = 0,$$

$$\frac{1}{\rho} = f+h+[(f-h)\cos 2a + g\sin 2a]\cos 2w;$$

d'où l'on tire

$$\sin 2a = \frac{g}{\sqrt{(g^2+(f-h)^2)}}, \quad \cos 2a = \frac{f-h}{\sqrt{(g^2+(f-h)^2)}},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\rho} = f+h+\sqrt{(g^2+(f-h)^2)}\cos 2w,$$

c'est à dire

$$(e.) \quad \frac{1}{\rho} = F\cos^2 w + H\sin^2 w,$$

en faisant, pour abréger,

$$f+h+\sqrt{(g^2+(f-h)^2)} = F, \quad f+h-\sqrt{(g^2+(f-h)^2)} = H.$$

On conclut de là que, dans le cas que nous examinons, les courbures des sections normales sont susceptibles d'un seul *maximum* et d'un seul *minimum*, qui répondent à w nul et w égal à un angle droit, et ont pour mesure F et H. Leur direction, dans le plan tangent, est determinée par l'angle a, et la courbure d'une autre section quelconque s'en déduit par la formule (*e.*) qui coincide avec celle du No. 5.

Dans ce même cas, les valeurs de r, s, t, seront indépendantes de l'angle ϑ et se réduiront à

$$r = 2f, \quad s = g, \quad t = 2h,$$

en vertu des formules (*b.*) et (*d.*). Mais si la surface que l'on considère, est donnée directement par une équation en z, u, ϑ, et que l'on exprime la valeur de z qui s'en déduit, au moyen de la formule (*a.*), il pourra arriver que l'expression de φ soit différente de la formule (*d.*). Cette quantité sera seulement assujettie à la condition de ne pas changer, lorsqu'on augmente l'angle ϑ de quatre angles droits, et, conséquemment, elle pourra être une fonction quelconque de *cosinus* et *sinus* de ϑ et de ses multiples. Or, quand elle différera de la formule (*d.*), les valeurs de

r, s, t, relatives à l'origine des coordonnées, et déduites des formules (*b.*), dépendront de l'angle ϑ, c. à. d., de la direction de la section normale que l'on considère; et, dans ce cas singulier, le rayon de courbure ϱ, donné par la formule (*c.*), sera susceptible d'un ou plusieurs *maxima* et d'un pareil nombre de *minima*, qui ne répondront plus à des sections rectangulaires. Les lignes de courbure seront en pareil nombre; et il est facile de prouver qu'elles répondront toujours aux courbures *maxima* ou *minima*.

En effet, l'équation (14.), qui exprime la nature de ces lignes, est, comme on l'a déjà dit, équivalente à l'équation (11.), laquelle se réduit à l'équation (12.), lorsque le plan des x et y est tangent à la surface; or, en faisant $u = 0$, après avoir différentié les valeurs de x et y, on a

$$\partial x = \cos\vartheta\,\partial u, \quad \partial y = \sin\vartheta\,\partial u;$$

ce qui change l'équation (12.) en celle-ci:

$$s\sin^2\vartheta + (r-t)\sin\vartheta\cos\vartheta - s\cos^2\vartheta = 0;$$

et en y substituant les formnles (*b.*) à la place de r, s, t, elle se réduit à

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = 0;$$

d'où il résulte que les directions des lignes de courbure coincident avec les *maxima* ou *minima* de la fonction φ, ou, d'après l'équation (*c.*), avec les plus grandes ou les moindres courbures des sections normales.

XI.

Pour donner un exemple du cas singulier que nous venons de signaler, soit n un nombre entier et positif, et prenons

$$z = u^2\sin n\vartheta,$$

pour l'équation de la surface, en coordonnées polaires. Si l'on designe par i un des nombres 1, 2, 3 .... $2n$, et par π le rapport de la circonférence au diamètre, les directions des lignes de courbure passant par le point M, origine des coordonnées, seront déterminées, d'après ce qui précède, par la formule

$$a = \frac{(2i-1)\pi}{2n};$$

ensorte que deux lignes consécutives se couperont sous un angle égal à $\frac{\pi}{n}$.

Deux de ces lignes de courbure qui feront entre elles un angle égal à π, seront donc le prolongement l'une de l'autre; si n est pair, elles ne formeront qu'une seule ligne; si n est impair, on les regardera comme deux lignes distinctes, dans lesquelles les normales à la surface rencon-

treront, de deux côtés différents, la normale au point M que l'on considère; et, en ayant égard aux signes de la courbure, elle sera un *maximum* pour l'une de ces lignes et un *minimum* pour l'autre. De cette manière le nombre des *minima* sera égal à celui des *maxima*, et les lignes de courbure qui aboutissent au point M, seront en nombre pair, égal à n ou à $2n$, selon que n sera pair ou impair.

Dans le cas de $n=1$, l'équation de la surface en coordonnées rectangulaires sera

$$z = y\sqrt{(x^2+y^2)};$$

les valeurs de r, s, t, qui répondent à $x=0$ et $y=0$ se présenteront sous la forme $\frac{0}{0}$: elles dépendront du rapport qu'on établira entre x et y avant que ces deux variables s'évanouissent; et il en sera de même, dans tous les cas pareils.

XII.

Il nous reste à faire voir, pour complèter cette théorie, que lors même que les courbures des sections normales ne sont plus liées entre elles par la formule (*e.*), et qu'elles peuvent, au contraire, se succeder d'une manière quelconque, celles des sections obliques s'en déduisent néanmoins par la même règle que dans le cas général.

Pour cela, je fais tourner les axes des x et y, d'un angle α dans le plan tangent en M, de sorte que l'un de ces axes vienne coincider avec la tangente MD à la section normale que l'on considère, et l'autre, avec la perpendiculaire à cette tangente. En désignant par x' et y', les coordonnées relatives aux nouveaux axes, et supposant que MD soit celui des x', on aura

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha.$$

Je fais tourner les axes des y' et z, d'un angle ε, dans le plan perpendiculaire à MD; les nouvelles coordonnées étant désignées par z' et y_1, nous aurons

$$z' = z\cos\varepsilon + y'\sin\varepsilon,$$
$$y_1 = z\sin\varepsilon - y'\cos\varepsilon.$$

En éliminant y' entre ces quatre équations, il vient

$$x = x'\cos\alpha - y_1\sin\alpha\cos\varepsilon + z'\sin\alpha\sin\varepsilon,$$
$$y = x'\sin\alpha + y_1\cos\alpha\cos\varepsilon - z'\cos\alpha\sin\varepsilon,$$
$$z = y_1\sin\varepsilon + z'\cos\varepsilon.$$

Au moyen de ces valeurs de x, y, z, et des formules

$$u\cos\vartheta = x, \quad u\sin\vartheta = y, \quad u^2 = x^2 + y^2,$$

les quantités u, $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, qui entrent dans l'équation $(a.)$, pourront s'exprimer en fonctions de x', y_1, z', et elle deviendra l'équation de la surface rapportée aux nouveaux axes de ces coordonnées rectangulaires. En faisant $y_1 = 0$, on aura l'équation de la section oblique, tangente à MD, et dont le plan, passant par cette droite, est incliné sur le plan tangent, d'un angle égal au complément de ε. Pour cette valeur $y_1 = 0$, nous aurons

$$\begin{aligned} u\cos\vartheta &= x'\cos\alpha + z'\sin\alpha\sin\varepsilon, \\ u\sin\vartheta &= x'\sin\alpha - z'\cos\alpha\sin\varepsilon, \\ z'\cos\varepsilon &= u^2\varphi + u^3\varphi' + u^4\varphi'' + \text{etc.}; \end{aligned}$$

d'ou l'on déduira

$$z'\cos\varepsilon = \gamma x'^2 + \gamma' x'^3 + \gamma'' x'^4 + \text{etc.};$$

γ, γ', γ'' etc. étant des coefficiens constants, dont le premier sera indépendant de ε, et représentera ce que φ devient, quand on y met α au lieu de ϑ. Or, si l'on appelle ρ_1 le rayon de courbure de cette section oblique correspondant au point M, on aura, d'après la formule relative aux courbes planes,

$$\rho_1 = \frac{\left(1 + \frac{\partial z'^2}{\partial x'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}},$$

où l'on fera $x' = 0$ après les différentiations; on aura donc

$$\rho_1 = \frac{\cos\varepsilon}{2\gamma};$$

et si l'on appelle ρ le rayon de courbure de la section normale passant par la même tangente MD, ou ce que devient ρ_1 quand on fait $\varepsilon = 0$, il en résultera

$$\rho = \frac{1}{2\gamma},$$

et, par conséquent

$$\rho_1 = \rho\cos\varepsilon,$$

pour une valeur quelconque de ε; ce qui coincide avec l'équation (1.) du No. 3., comme il s'agissoit de le démontrer.

21.

Über die Function

$$\sin\varphi + \frac{1}{2^2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3^2}\sin 3\varphi + \text{etc.}$$

(Von Hrn. *Th. Clausen* zu München.)

Es sei

$$f(\varphi) = \sin\varphi + \frac{1}{2^2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3^2}\sin 3\varphi + \ldots,$$

so wird

$$\partial f(\varphi) = (\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi + \ldots.)\,\partial\varphi = -(\log 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi)\,\partial\varphi,$$

es ist folglich

$$f(\varphi) = -\varphi\log 2 - \int \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,\partial\varphi.$$

Durch die von Euler „Einl. in d. Analysis des Unendlichen, 1. Bd. p. 212." gegebene Entwickelung von $\log\sin\frac{1}{2}\varphi$ findet man, wenn man $\varphi = \mu\pi$ setzt:

$$f(\mu\pi) = -\pi\left[2\log\left(\frac{2+\mu}{2-\mu}\right) + \mu\log(2+\mu)(2-\mu)\mu\right]$$

$$\begin{aligned}
&+ 10{,}18367\ 51416\ 47425\ 7783\,\mu \\
&+ \quad 16884\ 33438\ 71681\ 3992\,\mu^3 \\
&+ \quad 161\ 64129\ 14041\ 6710\,\mu^5 \\
&+ \quad 4\ 05393\ 12590\ 1026\,\mu^7 \\
&+ \quad 13899\ 08016\ 2251\,\mu^9 \\
&+ \quad 554\ 78514\ 1157\,\mu^{11} \\
&+ \quad 24\ 19820\ 8008\,\mu^{13} \\
&+ \quad 1\ 11849\ 3601\,\mu^{15} \\
&+ \quad 5386\ 6481\,\mu^{17} \\
&+ \quad 267\ 5281\,\mu^{19} \\
&+ \quad 13\ 6101\,\mu^{21} \\
&+ \quad 7059\,\mu^{23} \\
&+ \quad 372\,\mu^{25} \\
&+ \quad 20\,\mu^{27} \\
&+ \quad 1\,\mu^{29}.
\end{aligned}$$

Ferner ist $\partial(\pi-\varphi) = \log 2\cos\frac{1}{2}\varphi\,\partial\varphi$, welches mit den Eulerschen Coefficienten folgende Reihe giebt:

$$f(1-\mu)\pi = \pi\log\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) + \pi\mu\log(1+\mu)(1-\mu)$$

$$\begin{aligned}
&- 4,10559\ 92168\ 75984\ 346\,\mu \\
&- \quad 24473\ 06438\ 15894\ 761\,\mu^3 \\
&- \quad\quad 461\ 12396\ 25688\ 857\,\mu^5 \\
&- \quad\quad\ 21\ 64821\ 59255\ 484\,\mu^7 \\
&- \quad\quad\ \ 1\ 35419\ 24607\ 264\,\mu^9 \\
&- \quad\quad\quad\ 9734\ 00380\ 887\,\mu^{11} \\
&- \quad\quad\quad\ 759\ 56000\ 699\,\mu^{13} \\
&- \quad\quad\quad\ 62\ 60461\ 695\,\mu^{15} \\
&- \quad\quad\quad\ 5\ 36777\ 080\,\mu^{17} \\
&- \quad\quad\quad\quad\ 47425\ 879\,\mu^{19} \\
&- \quad\quad\quad\quad\ 4290\ 633\,\mu^{21} \\
&- \quad\quad\quad\quad\ 395\ 701\,\mu^{23} \\
&- \quad\quad\quad\quad\ 37\ 078\,\mu^{25} \\
&- \quad\quad\quad\quad\ 3\ 521\,\mu^{27} \\
&- \quad\quad\quad\quad\quad\ 338\,\mu^{29} \\
&- \quad\quad\quad\quad\quad\ 33\,\mu^{31} \\
&- \quad\quad\quad\quad\quad\ 3\,\mu^{33}
\end{aligned}$$

Mit diesen Reihen habe ich die numerischen Werthe der Function für alle Grade mit 16 Decimalen genau berechnet; mit der ersten Reihe von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, und mit der zweiten die übrige Hälfte. Die Eigenschaft, dafs

$$f(\varphi) - f(\pi-\varphi) = \tfrac{1}{2}f(2\varphi),$$

gab dann eine völlig sichere Controlle der Rechnung.

Tabula functionis

$$z = \sin\varphi + \frac{1}{2^2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3^2}\sin 3\varphi + \frac{1}{4^2}\sin 4\varphi + \text{etc.}$$

φ	z	φ	z	φ	z	φ	z
1°	0,08810 82557 693816	46°	0,98635 68055 012737	91°	0,90984 10306 997436	136°	0,51314 22082 181999
2	15202 15535 868417	47	99048 26132 816730	92	90356 67901 354674	137	50233 35248 530008
3	20680 33346 070624	48	99425 81070 437516	93	89714 54631 518095	138	49146 48446 117842
4	25565 58496 595340	49	99769 14835 921363	94	89057 95971 125609	139	48053 76976 831790
5	30010 01867 673956	50	1,00079 06245 085728	95	88387 16975 331242	140	46955 36040 375555
6	34103 24293 220966	51	00356 31151 275813	96	87702 42294 757791	141	45851 40737 582678
7	37904 48296 248711	52	00601 62620 246885	97	87003 96188 881217	142	44742 06073 656168
8	41455 84538 383392	53	00815 71091 603273	98	86292 02538 876263	143	43627 46961 338266
9	44788 82448 133546	54	00999 24528 062885	99	85566 84859 951023	144	42507 78224 013279
10	47927 87600 752437	55	01152 88553 675050	100	84828 66313 196489	145	41383 14598 746257
11	50892 54582 478208	56	01277 26581 996413	101	84077 69716 975556	146	40253 70739 260243
12	53698 81772 587339	57	01372 99035 121934	102	83314 17557 874517	147	39119 61218 854692
13	56360 00870 333457	58	01440 67954 373551	103	82538 32001 238715	148	37981 00533 267567
14	58887 38744 640590	59	01480 88103 366062	104	81750 34901 312800	149	36838 03103 483542
15	61290 61441 556218	60	01494 16064 096536	105	80950 47811 004812	150	35690 83278 490659
16	63578 06509 276729	61	01481 05826 638956	106	80138 91091 292267	151	34539 55337 987699
17	65757 07136 467311	62	01442 09772 968533	107	79315 88420 287364	152	33384 33495 044452
18	67834 10621 110970	63	01377 78755 389387	108	78481 57801 977508	153	32225 31898 717016
19	69814 92718 517745	64	01288 62169 994148	109	77636 20574 656417	154	31062 64636 620175
20	71704 68960 853112	65	01175 08025 543869	110	76779 96919 060278	155	29896 45737 458835
21	73508 03707 498140	66	01037 63008 120751	111	75913 06766 222615	156	28726 89173 520470
22	75229 17407 927012	67	00876 72541 874170	112	75035 69805 060800	157	27554 08863 130428
23	76871 92890 636796	68	00692 80846 151755	113	74148 05489 706471	158	26378 18673 071933
24	78439 79708 739228	69	00486 30989 281536	114	73250 33046 591441	159	25199 32420 972555
25	79935 98860 001699	70	00257 64939 248056	115	72342 71481 300127	160	24017 63877 658856
26	81363 45946 743617	71	1,00007 23611 484501	116	71425 39585 198906	161	22833 26769 480904
27	82724 94162 748459	72	0,99735 46913 984148	117	70498 55941 852321	162	21646 34780 608294
28	84022 96786 042658	73	99442 73789 917486	118	69562 38933 235527	163	20457 01555 299251
29	85259 89315 174475	74	99129 42257 926051	119	68617 06745 751907	164	19265 40700 144409
30	86437 91310 538927	75	98795 89450 250142	120	67662 77376 064358	165	18071 65786 286785
31	87559 07989 967808	76	98442 51648 835026	121	66699 68636 748299	166	16875 90351 619261
32	88625 31618 264641	77	98069 64319 548802	122	65727 98161 774098	167	15678 27902 961649
33	89638 42722 915068	78	97677 62144 634752	123	64747 83411 826213	168	14478 91918 217725
34	90600 11162 336120	79	97266 79053 511523	124	63759 41679 466013	169	13277 95848 514702
35	91511 97068 370285	80	96837 48252 025917	125	62762 90094 144910	170	12075 53120 325880
36	92375 51681 005353	81	96390 02250 255169	126	61758 45627 074131	171	10871 77137 578081
37	93192 18090 301292	82	95924 72888 948467	127	60746 25095 957139	172	09666 81283 745027
38	93963 31898 073681	83	95441 91364 690848	128	59726 45169 590485	173	08460 78923 928416
39	94690 21809 900054	84	94941 88253 866654	129	58699 22372 338555	174	07253 83406 927297
40	95374 10166 388513	85	94424 93535 494182	130	57664 73088 487484	175	06046 08067 297737
41	96016 13421 306023	86	93891 36612 998123	131	56623 13566 483232	176	04837 66227 403644
42	96617 42573 051169	87	93341 46334 981743	132	55574 59923 058620	177	03628 71199 460140
43	97179 03555 029069	88	92775 51015 056496	133	54519 28147 253925	178	02419 36287 570748
44	97701 97589 710157	89	92193 78450 782809	134	53457 34104 335400	179	01209 74789 759607
45	0,98187 21510 502034	90	0,91596 55941 772190	135	0,52388 93539 615938	180	0,00000 00000 000000

München, den 3. März 1832.

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,900	0,959 7368 65	4316 76	0,957 1071 57	4369 30	9,997 3702 92	52 54
2,901	0,960 1685 41	4316 81	0,957 5440 87	4369 24	9,997 3755 46	52 43
02	60 6002 22	4316 86	57 9810 11	4369 19	3807 89	52 33
03	61 0319 08	4316 91	58 4179 30	4369 14	3860 22	52 23
04	61 4635 99	4316 96	58 8548 44	4369 09	3912 45	52 12
05	61 8952 95	4317 01	59 2917 52	4369 03	3964 57	52 01
2,906	0,962 3269 97	4317 07	0,959 7286 55	4368 98	9,997 4016 58	51 92
07	62 7587 03	4317 12	60 1655 53	4368 93	4068 50	51 81
08	63 1904 15	4317 17	60 6024 46	4368 88	4120 31	51 71
09	63 6221 32	4317 22	61 0393 34	4368 83	4172 02	51 62
10	64 0538 53	4317 27	61 4762 17	4368 77	4223 64	51 50
2,911	0,964 4855 80	4317 32	0,961 9130 94	4368 72	9,997 4275 14	51 40
12	64 9173 12	4317 37	62 3499 66	4368 67	4326 54	51 30
13	65 3490 49	4317 42	62 7868 33	4368 62	4377 84	51 19
14	65 7807 92	4317 47	63 2236 95	4368 57	4429 03	51 09
15	66 2125 39	4317 52	63 6605 51	4368 51	4480 12	51 00
2,916	0,966 6442 91	4317 58	0,964 0974 03	4368 46	9,997 4531 12	50 88
17	67 0760 49	4317 63	64 5342 49	4368 41	4582 00	50 79
18	67 5078 11	4317 68	64 9710 90	4368 36	4632 79	50 68
19	67 9395 79	4317 73	65 4079 26	4368 31	4683 47	50 57
20	68 3713 52	4317 78	65 8447 56	4368 26	4734 04	50 48
2,921	0,968 8031 30	4317 83	0,966 2815 82	4368 21	9,997 4784 52	50 39
22	69 2349 12	4317 88	66 7184 03	4368 16	4834 91	50 28
23	69 6667 00	4317 93	67 1552 19	4368 11	4885 19	50 17
24	70 0984 93	4317 98	67 5920 29	4368 06	4935 36	50 08
25	70 5302 91	4318 03	68 0288 35	4368 01	4985 44	49 99
2,926	0,970 9620 93	4318 08	0,968 4656 36	4367 96	9,997 5035 43	49 88
27	71 3939 01	4318 13	68 9024 32	4367 91	5085 31	49 78
28	71 8257 14	4318 18	69 3392 23	4367 86	5135 09	49 68
29	72 2575 31	4318 23	69 7760 08	4367 81	5184 77	49 58
30	72 6893 54	4318 27	70 2127 89	4367 76	5234 35	49 49
2,931	0,973 1211 81	4318 32	0,970 6495 65	4367 71	9,997 5283 84	49 39
32	73 5530 13	4318 37	71 0863 36	4367 66	5333 23	49 28
33	73 9848 51	4318 42	71 5231 02	4367 61	5382 51	49 18
34	74 4166 93	4318 47	71 9598 62	4367 56	5431 69	49 09
35	74 8485 40	4318 52	72 3966 18	4367 51	5480 78	48 99
2,936	0,975 2803 92	4318 57	0,972 8333 69	4367 46	9,997 5529 77	48 90
37	75 7122 48	4318 62	73 2701 15	4367 41	5578 67	48 79
38	76 1441 10	4318 67	73 7068 56	4367 36	5627 46	48 68
39	76 5759 77	4318 71	74 1435 91	4367 31	5676 14	48 60
40	77 0078 48	4318 76	74 5803 22	4367 26	5724 74	48 50
2,941	0,977 4397 24	4318 81	0,975 0170 48	4367 21	9,997 5773 24	48 41
42	77 8716 05	4318 86	75 4537 70	4367 17	5821 65	48 30
43	78 3034 91	4318 91	75 8904 86	4367 12	5869 95	48 21
44	78 7353 82	4318 95	76 3271 98	4367 07	5918 16	48 12
45	79 1672 77	4319 00	76 7639 05	4367 02	5966 28	48 02
2,946	0,979 5991 77	4319 05	0,977 2006 07	4366 97	9,997 6014 30	47 93
47	80 0310 82	4319 10	77 6373 05	4366 93	6062 23	47 82
48	80 4629 92	4319 14	78 0739 97	4366 88	6110 05	47 74
49	80 8949 06	4319 19	78 5106 85	4366 83	6157 79	47 64
50	81 3268 25		78 9473 68		6205 43	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
2,950	0,981 3268 25	4319 24	0,978 9473 68	4366 78	9,997 6205 43	47 54
2,951	0,981 7587 49	4319 29	0,979 3840 46	4366 73	9,997 6252 97	47 45
52	82 1906 78	4319 33	79 8207 20	4366 69	6300 42	47 35
53	82 6226 11	4319 38	80 2573 88	4366 64	6347 77	47 26
54	83 0545 49	4319 43	80 6940 52	4366 59	6395 03	47 16
55	83 4864 92	4319 47	81 1307 11	4366 54	6442 19	47 07
2,956	0,983 9184 39	4319 52	0,981 5673 65	4366 49	9,997 6489 26	46 98
57	84 3503 91	4319 57	82 0040 15	4366 45	6536 24	46 88
58	84 7823 48	4319 62	82 4406 60	4366 40	6583 12	46 79
59	85 2143 09	4319 66	82 8773 00	4366 35	6629 91	46 68
60	85 6462 76	4319 71	83 3139 35	4366 31	6676 59	46 60
2,961	0,986 0782 46	4319 75	0,983 7505 65	4366 26	9,997 6723 19	46 50
62	86 5102 22	4319 80	84 1871 91	4366 21	6769 69	46 42
63	86 9422 02	4319 85	84 6238 13	4366 17	6816 11	46 32
64	87 3741 86	4319 89	85 0604 29	4366 12	6862 43	46 23
65	87 8061 75	4319 94	85 4970 41	4366 08	6908 66	46 14
2,966	0,988 2381 69	4319 98	0,985 9336 49	4366 03	9,997 6954 80	46 05
67	88 6701 67	4320 03	86 3702 52	4365 98	7000 85	45 95
68	89 1021 70	4320 08	86 8068 50	4365 94	7046 80	45 86
69	89 5341 78	4320 12	87 2434 44	4365 89	7092 66	45 77
70	89 9661 90	4320 17	87 6800 33	4365 85	7138 43	45 68
2,971	0,990 3982 06	4320 21	0,988 1166 17	4365 80	9,997 7184 11	45 58
72	90 8302 28	4320 26	88 5531 97	4365 75	7229 69	45 51
73	91 2622 53	4320 30	88 9897 73	4365 71	7275 20	45 40
74	91 6942 83	4320 35	89 4263 43	4365 66	7320 60	45 31
75	92 1263 18	4320 39	89 8629 09	4365 62	7365 91	45 23
2,976	0,992 5583 57	4320 44	0,990 2994 71	4365 57	9,997 7411 14	45 13
77	92 9904 01	4320 48	90 7360 28	4365 52	7456 27	45 04
78	93 4224 49	4320 53	91 1725 80	4365 48	7501 31	44 95
79	93 8545 02	4320 57	91 6091 28	4365 43	7546 26	44 86
80	94 2865 59	4320 62	92 0456 71	4365 39	7591 12	44 77
2,981	0,994 7186 21	4320 66	0,992 4822 10	4365 34	9,997 7635 89	44 68
82	95 1506 87	4320 70	92 9187 44	4365 30	7680 57	44 60
83	95 5827 57	4320 75	93 3552 74	4365 25	7725 17	44 50
84	96 0148 32	4320 79	93 7917 99	4365 21	7769 67	44 42
85	96 4469 11	4320 84	94 2283 20	4365 17	7814 09	44 33
2,986	0,996 8789 95	4320 88	0,994 6648 37	4365 12	9,997 7858 42	44 24
87	97 3110 83	4320 92	95 1013 49	4365 08	7902 66	44 16
88	97 7431 75	4320 97	95 5378 57	4365 03	7946 82	44 06
89	98 1752 72	4321 01	95 9743 60	4364 99	7990 88	43 98
90	98 6073 73	4321 06	96 4108 59	4364 95	8034 86	43 88
2,991	0,999 0394 79	4321 10	0,996 8473 53	4364 90	9,997 8078 74	43 80
92	99 4715 89	4321 14	97 2838 43	4364 86	8122 54	43 72
93	99 9037 03	4321 19	97 7203 29	4364 81	8166 26	43 62
94	1,000 3358 22	4321 23	98 1568 10	4364 77	8209 88	43 54
95	00 7679 45	4321 28	98 5932 87	4364 72	8253 42	43 46
2,996	1,001 2000 72	4321 32	0,999 0297 60	4364 68	9,997 8296 88	43 36
97	01 6322 04	4321 36	99 4662 28	4364 64	8340 24	43 26
98	02 0643 41	4321 41	99 9026 91	4364 59	8383 50	43 19
99	02 4964 81	4321 45	1,000 3391 50	4364 55	8426 69	43 10
3,000	02 9286 26		00 7756 05		8469 79	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,000	1,002 9286 26	4321 49	1,000 7756 05	4364 51	9,997 8469 79	43 01
3,001	1,003 3607 76	4321 53	1,001 2120 56	4364 46	9,997 8512 80	42 93
02	03 7929 29	4321 58	01 6485 02	4364 42	8555 73	42 84
03	04 2250 87	4321 62	02 0849 44	4364 38	8598 57	42 77
04	04 6572 48	4321 66	02 5213 82	4364 34	8641 34	42 68
05	05 0894 14	4321 70	02 9578 16	4364 29	8684 02	42 58
3,006	1,005 5215 85	4321 74	1,003 3942 45	4364 25	9,997 8726 60	42 51
07	05 9537 59	4321 79	03 8306 70	4364 21	8769 11	42 41
08	06 3859 38	4321 83	04 2670 90	4364 16	8811 52	42 34
09	06 8181 20	4321 87	04 7035 07	4364 12	8853 86	42 26
10	07 2503 07	4321 91	05 1399 19	4364 08	8896 12	42 16
3,011	1,007 6824 99	4321 95	1,005 5763 27	4364 04	9,997 8938 28	42 08
12	08 1146 94	4322 00	06 0127 30	4364 00	8980 36	42 00
13	08 5468 94	4322 04	06 4491 30	4363 95	9022 36	41 92
14	08 9790 97	4322 08	06 8855 25	4363 91	9064 28	41 83
15	09 4113 05	4322 12	07 3219 16	4363 87	9106 11	41 74
3,016	1,009 8435 18	4322 16	1,007 7583 03	4363 83	9,997 9147 85	41 67
17	10 2757 34	4322 21	08 1946 86	4363 78	9189 52	41 58
18	10 7079 54	4322 25	08 6310 64	4363 74	9231 10	41 49
19	11 1401 79	4322 29	09 0674 38	4363 70	9272 59	41 41
20	11 5724 08	4322 33	09 5038 08	4363 66	9314 00	41 33
3,021	1,012 0046 41	4322 37	1,009 9401 74	4363 62	9,997 9355 33	41 25
22	12 4368 78	4322 41	10 3765 36	4363 58	9396 58	41 17
23	12 8691 19	4322 45	10 8128 94	4363 54	9437 75	41 08
24	13 3013 64	4322 49	11 2492 47	4363 50	9478 83	41 00
25	13 7336 14	4322 53	11 6855 97	4363 45	9519 83	40 92
3,026	1,014 1658 67	4322 58	1,012 1219 42	4363 41	9,997 9560 75	40 84
27	14 5981 24	4322 62	12 5582 83	4363 37	9601 59	40 76
28	15 0303 86	4322 66	12 9946 21	4363 33	9642 35	40 67
29	15 4626 52	4322 70	13 4309 54	4363 29	9683 02	40 60
30	15 8949 21	4322 74	13 8672 83	4363 25	9723 62	40 51
3,031	1,016 3271 95	4322 78	1,014 3036 08	4363 21	9,997 9764 13	40 43
32	16 7594 72	4322 82	14 7399 28	4363 17	9804 56	40 35
33	17 1917 54	4322 86	15 1762 45	4363 13	9844 91	40 27
34	17 6240 40	4322 90	15 6125 58	4363 09	9885 18	40 19
35	18 0563 29	4322 94	16 0488 66	4363 04	9925 37	40 11
3,036	1,018 4886 23	4322 98	1,016 4851 71	4363 00	9,997 9965 48	40 03
37	18 9209 20	4323 02	16 9214 71	4362 96	9,998 0005 51	39 94
38	19 3532 22	4323 06	17 3577 67	4362 92	0045 45	39 87
39	19 7855 27	4323 10	17 7940 60	4362 88	0085 32	39 79
40	20 2178 37	4323 14	18 2303 48	4362 85	0125 11	39 71
3,041	1,020 6501 50	4323 18	1,018 6666 33	4362 81	9,998 0164 82	39 63
42	21 0824 68	4323 21	19 1029 13	4362 77	0204 45	39 56
43	21 5147 89	4323 25	19 5391 90	4362 73	0244 01	39 47
44	21 9471 13	4323 29	19 9754 62	4362 69	0283 48	39 39
45	22 3794 44	4323 33	20 4117 31	4362 65	0322 87	39 31
3,046	1,022 8117 77	4323 37	1,020 8479 95	4362 61	9,998 0362 18	39 24
47	23 2441 14	4323 41	21 2842 56	4362 57	0401 42	39 16
48	23 6764 55	4323 45	21 7205 13	4362 53	0440 58	39 09
49	24 1087 99	4323 49	22 1567 66	4362 49	0479 67	39 00
50	24 5411 48		22 5930 15		0518 67	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,050	1,024 5411 48	4323 53	1,022 5930 15	4362 45	9,998 0518 67	38 92
3,051	1,024 9735 01	4323 57	1,023 0292 60	4362 41	9,998 0557 59	38 85
52	25 4058 57	4323 60	23 4655 01	4362 37	0596 44	38 76
53	25 8382 18	4323 64	23 9017 38	4362 33	0635 20	38 70
54	26 2705 82	4323 68	24 3379 72	4362 30	0673 90	38 61
55	26 7029 50	4323 72	24 7742 01	4362 26	0712 51	38 54
3,056	1,027 1353 22	4323 76	1,025 2104 27	4362 22	9,998 0751 05	38 46
57	27 5676 98	4323 80	25 6466 49	4362 18	0789 51	38 38
58	28 0000 78	4323 84	26 0828 67	4362 14	0827 89	38 31
59	28 4324 61	4323 87	26 5190 81	4362 10	0866 20	38 23
60	28 8648 48	4323 91	26 9552 91	4362 06	0904 43	38 15
3,061	,029 2972 39	4323 95	1,027 3914 97	4362 03	9,998 0942 58	38 07
62	29 7296 34	4323 99	27 8276 99	4361 99	0980 65	38 00
63	30 1620 33	4324 02	28 2638 98	4361 95	1018 65	37 93
64	30 5944 35	4324 06	28 7000 93	4361 91	1056 58	37 85
65	31 0268 41	4324 10	29 1362 84	4361 87	1094 43	37 78
3,066	1,031 4592 51	4324 14	1,029 5724 72	4361 84	9,998 1132 21	37 69
67	31 8916 65	4324 18	30 0086 55	4361 80	1169 90	37 62
68	32 3240 83	4324 21	30 4448 35	4361 76	1207 52	37 55
69	32 7565 04	4324 25	30 8810 11	4361 72	1245 07	37 47
70	33 1889 29	4324 29	31 3171 83	4361 68	1282 54	37 40
3,071	1,033 6213 57	4324 32	1,031 7533 51	4361 65	9,998 1319 94	37 32
72	34 0537 90	4324 36	32 1895 16	4361 61	1357 26	37 24
73	34 4862 26	4324 40	32 6256 76	4361 57	1394 50	37 18
74	34 9186 65	4324 43	33 0618 33	4361 53	1431 68	37 10
75	35 3511 09	4324 47	33 4979 87	4361 50	1468 78	37 03
3,076	1,035 7835 56	4324 51	1,033 9341 37	4361 46	9,998 1505 81	36 95
77	36 2160 07	4324 55	34 3702 83	4361 42	1542 76	36 88
78	36 6484 61	4324 58	34 8064 25	4361 39	1579 64	36 81
79	37 0809 19	4324 62	35 2425 64	4361 35	1616 45	36 73
80	37 5133 81	4324 66	35 6786 99	4361 31	1653 18	36 65
3,081	1,037 9458 47	4324 69	1,036 1148 30	4361 28	9,998 1689 83	36 58
82	38 3783 16	4324 73	36 5509 57	4361 24	1726 41	36 51
83	38 8107 89	4324 76	36 9870 81	4361 20	1762 92	36 44
84	39 2432 65	4324 80	37 4232 01	4361 16	1799 36	36 37
85	39 6757 45	4324 84	37 8593 18	4361 13	1835 73	36 29
3,086	1,040 1082 29	4324 87	1,038 2954 30	4361 09	9,998 1872 02	36 22
87	40 5407 16	4324 91	38 7315 40	4361 06	1908 24	36 15
88	40 9732 06	4324 94	39 1676 45	4361 02	1944 39	36 07
89	41 4057 01	4324 98	39 6037 47	4360 98	1980 46	36 01
90	41 8381 99	4325 02	40 0398 46	4360 95	2016 47	35 93
3,091	1,042 2707 00	4325 05	1,040 4759 40	4360 91	9,998 2052 40	35 87
92	42 7032 05	4325 09	40 9120 32	4360 88	2088 27	35 78
93	43 1357 14	4325 12	41 3481 19	4360 84	2124 05	35 72
94	43 5682 26	4325 16	41 7842 03	4360 81	2159 77	35 65
95	44 0007 42	4325 20	42 2202 84	4360 77	2195 42	35 57
3,096	1,044 4332 62	4325 23	1,042 6563 61	4360 73	9,998 2230 99	35 50
97	44 8657 85	4325 27	43 0924 34	4360 70	2266 49	35 44
98	45 2983 11	4325 30	43 5285 04	4360 66	2301 93	35 35
99	45 7308 42	4325 34	43 9645 70	4360 63	2337 28	35 28
3,100	46 1633 76		44 4006 32		2372 56	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,100	1,046 1633 76	4325 37	1,044 4006 32	4360 59	9,998 2372 56	35 22
3,101	1,046 5959 13	4325 41	1,044 8366 91	4360 56	9,998 2407 78	35 16
02	47 0284 53	4325 44	45 2727 47	4360 52	2442 94	35 08
03	47 4609 97	4325 48	45 7087 99	4360 49	2478 02	35 00
04	47 8935 45	4325 51	46 1448 47	4360 45	2513 02	34 94
05	48 3260 96	4325 55	46 5808 92	4360 42	2547 96	34 87
3,106	1,048 7586 51	4325 58	1,047 0169 34	4360 38	9,998 2582 83	34 80
07	49 1912 09	4325 62	47 4529 72	4360 35	2617 63	34 73
08	49 6237 70	4325 65	47 8890 06	4360 31	2652 36	34 66
09	50 0563 35	4325 68	48 3250 37	4360 28	2687 02	34 59
10	50 4889 04	4325 72	48 7610 65	4360 24	2721 61	34 52
3,111	1,050 9214 76	4325 75	1,049 1970 89	4360 21	9,998 2756 13	34 45
12	51 3540 51	4325 79	49 6331 09	4360 17	2790 58	34 39
13	51 7866 29	4325 82	50 0691 26	4360 14	2824 97	34 32
14	52 2192 11	4325 85	50 5051 40	4360 10	2859 29	34 24
15	52 6517 97	4325 89	50 9411 50	4360 07	2893 53	34 18
3,116	1,053 0843 86	4325 92	1,051 3771 57	4360 03	9,998 2927 71	34 11
17	53 5169 78	4325 96	51 8131 60	4360 00	2961 82	34 05
18	53 9495 73	4325 99	52 2491 60	4359 97	2995 87	33 98
19	54 3821 72	4326 03	52 6851 57	4359 93	3029 85	33 90
20	54 8147 75	4326 06	53 1211 50	4359 90	3063 75	33 84
3,121	1,055 2473 81	4326 09	1,053 5571 40	4359 87	9,998 3097 59	33 78
22	55 6799 90	4326 13	53 9931 27	4359 83	3131 37	33 70
23	56 1126 03	4326 16	54 4291 10	4359 80	3165 07	33 64
24	56 5452 19	4326 19	54 8650 90	4359 77	3198 71	33 57
25	56 9778 38	4326 23	55 3010 66	4359 73	3232 28	33 51
3,126	1,057 4104 60	4326 26	1,055 7370 39	4359 70	9,998 3265 79	33 44
27	57 8430 86	4326 29	56 1730 09	4359 66	3299 23	33 36
28	58 2757 16	4326 33	56 6089 75	4359 63	3332 59	33 31
29	58 7083 48	4326 36	57 0449 38	4359 60	3365 90	33 24
30	59 1409 84	4326 39	57 4808 98	4359 56	3399 14	33 17
3,131	1,059 5736 23	4326 42	1,057 9168 54	4359 53	9,998 3432 31	33 11
32	60 0062 65	4326 46	58 3528 07	4359 49	3465 42	33 03
33	60 4389 11	4326 49	58 7887 56	4359 46	3498 45	32 97
34	60 8715 60	4326 52	59 2247 02	4359 43	3531 42	32 90
35	61 3042 12	4326 56	59 6606 44	4359 39	3564 32	32 83
3,136	1,061 7368 68	4326 59	1,060 0965 83	4359 36	9,998 3597 15	32 77
37	62 1695 27	4326 62	60 5325 19	4359 33	3629 92	32 71
38	62 6021 89	4326 66	60 9684 52	4359 29	3662 63	32 63
39	63 0348 55	4326 69	61 4043 81	4359 26	3695 26	32 57
40	63 4675 24	4326 72	61 8403 07	4359 23	3727 83	32 51
3,141	1,063 9001 96	4326 75	1,062 2762 30	4359 20	9,998 3760 34	32 45
42	64 3328 71	4326 78	62 7121 50	4359 17	3792 79	32 38
43	64 7655 49	4326 82	63 1480 66	4359 13	3825 17	32 32
44	65 1982 31	4326 85	63 5839 80	4359 10	3857 49	32 25
45	65 6309 16	4326 88	64 0198 90	4359 07	3889 74	32 19
3,146	1,066 0636 04	4326 91	1,064 4557 97	4359 04	9,998 3921 93	32 12
47	66 4962 95	4326 94	64 8917 00	4359 01	3954 05	32 07
48	66 9289 89	4326 98	65 3276 01	4358 97	3986 12	31 99
49	67 3616 87	4327 01	65 7634 98	4358 94	4018 11	31 93
50	67 7943 88		66 1993 92		4050 04	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,150	1,067 7943 88	4327 04	1,066 1993 92	4358 91	9,998 4050 04	31 87
3,151	1,068 2270 92	4327 07	1,066 6352 83	4358 88	9,998 4081 91	31 80
52	68 6597 99	4327 10	67 0711 70	4358 85	4113 71	31 75
53	69 0925 09	4327 14	67 5070 55	4358 81	4145 46	31 68
54	69 5252 23	4327 17	67 9429 37	4358 78	4177 14	31 61
55	69 9579 40	4327 20	68 3788 15	4358 75	4208 75	31 55
3,156	1,070 3906 60	4327 23	1,069 8146 90	4358 72	9,998 4240 30	31 49
57	70 8233 82	4327 26	69 2505 61	4358 69	4271 79	31 42
58	71 2561 09	4327 29	69 6864 30	4358 65	4303 21	31 36
59	71 6888 38	4327 32	70 1222 95	4458 62	4334 57	31 30
60	72 1215 70	4327 35	70 5581 57	4358 59	4365 87	31 24
3,161	1,072 5543 05	4327 39	1,070 9940 16	4358 56	9,998 4397 11	31 17
62	72 9870 44	4327 42	71 4298 72	4358 53	4428 28	31 11
63	73 4197 86	4327 45	71 8657 25	4358 50	4459 39	31 06
64	73 8525 30	4327 48	72 3015 75	4358 47	4490 45	30 99
65	74 2852 78	4327 51	72 7374 22	4358 44	4521 44	30 92
3,166	1,074 7180 29	4327 54	1,073 1732 65	4358 41	9,998 4552 36	30 87
67	75 1507 83	4327 57	73 6091 06	4358 37	4583 23	30 80
68	75 5835 40	4327 60	74 0449 43	4358 34	4614 03	30 75
69	76 0163 00	4327 63	74 4807 78	4358 31	4644 78	30 67
70	76 4490 64	4327 66	74 9166 09	4358 28	4675 45	30 62
3,171	1,076 8818 30	4327 69	1,075 3524 37	4358 25	9,998 4706 07	30 56
72	77 3145 99	4327 72	75 7882 62	4358 22	4736 63	30 49
73	77 7473 72	4327 75	76 2240 84	4358 19	4767 12	30 44
74	78 1801 47	4327 78	76 6599 03	4358 16	4797 56	30 37
75	78 6129 26	4327 81	77 0957 18	4358 13	4827 93	30 31
3,176	1,079 0457 07	4327 84	1,077 5315 31	4358 10	9,998 4858 24	30 26
77	79 4784 91	4327 87	77 9673 41	4358 07	4888 50	30 19
78	79 9112 79	4327 90	78 4031 48	4358 04	4918 69	30 14
79	80 3440 69	4327 93	78 8389 52	4358 01	4948 83	30 07
80	80 7768 63	4327 96	79 2747 52	4357 98	4978 90	30 01
3,181	1,081 2096 59	4327 99	1,079 7105 50	4357 95	9,998 5008 91	29 96
82	81 6424 58	4328 02	80 1463 45	4357 92	5038 87	29 89
83	82 0752 61	4328 05	80 5821 36	4357 89	5068 76	29 83
84	82 5080 66	4328 08	81 0179 25	4357 86	5098 59	29 76
85	82 9408 75	4328 11	81 4537 10	4357 83	5128 35	29 72
3,186	1,083 3736 86	4328 14	1,081 8894 93	4357 80	9,998 5158 07	29 66
87	83 8065 00	4328 17	82 3252 73	4357 77	5187 73	29 59
88	84 2393 18	4328 20	82 7610 49	4357 74	5217 32	29 53
89	84 6721 38	4328 23	83 1968 23	4357 71	5246 85	29 47
90	85 1049 61	4328 26	83 6325 93	4357 68	5276 32	29 42
3,191	1,085 5377 87	4328 29	1,084 0683 61	4357 65	9,998 5305 74	29 36
92	85 9706 16	4328 32	84 5041 26	4357 62	5335 10	29 30
93	86 4034 48	4328 35	84 9398 88	4357 59	5364 40	29 24
94	86 8362 83	4328 38	85 3756 47	4357 56	5393 64	29 18
95	87 2691 21	4328 41	85 8114 03	4357 53	5422 82	29 13
3,196	1,087 7019 61	4328 44	1,086 2471 57	4357 50	9,998 5451 95	29 07
97	88 1348 05	4328 46	86 6829 07	4357 48	5481 02	29 02
98	88 5676 51	4328 49	87 1186 55	4357 45	5510 04	28 95
99	89 0005 01	4328 52	87 5543 99	4357 42	5538 99	28 89
3,200	89 4333 53		87 9901 41		5567 88	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,200	1,089 4333 53	4328 55	1,087 9901 41	4357 39	9,998 5567 88	28 84
3,201	1,089 8662 08	4328 58	1,088 4258 80	4357 36	9,998 5596 72	28 78
02	90 2990 66	4328 61	88 8616 16	4375 33	5625 50	28 72
03	90 7319 27	4328 64	89 2973 49	4357 30	5654 22	28 67
04	91 1647 90	4328 67	89 7330 79	4357 27	5682 89	28 60
05	91 5976 57	4328 70	90 1688 06	4357 24	5711 49	28 54
3,206	1,092 0305 27	4328 72	1,090 6045 30	4357 21	9,998 5740 03	28 49
07	92 4633 99	4328 75	91 0402 51	4357 18	5768 52	28 44
08	92 8962 74	4328 78	91 4759 70	4357 16	5796 96	28 37
09	93 3291 52	4328 81	91 9116 85	4357 13	5825 33	28 32
10	93 7620 33	4328 84	92 3473 98	4357 10	5853 65	28 27
3,211	1,094 1949 16	4328 86	1,092 7831 08	4357 07	9,998 5881 92	28 21
12	94 6278 02	4328 89	93 2188 15	4357 04	5910 13	28 15
13	95 0606 92	4328 92	93 6545 20	4357 02	5938 28	28 10
14	95 4935 83	4328 95	94 0902 21	4356 99	5966 38	28 04
15	95 9264 78	4328 98	94 5259 20	4356 96	5994 42	27 98
3,216	1,096 3593 76	4329 00	1,094 9616 16	4356 93	9,998 6022 40	27 93
17	96 7922 76	4329 03	95 3973 09	4356 90	6050 33	27 87
18	97 2251 79	4329 06	95 8329 99	4356 88	6078 20	27 82
19	97 6580 85	4329 09	96 2686 87	4356 85	6106 02	27 76
20	98 0909 94	4329 12	96 7043 72	4356 82	6133 78	27 71
3,221	1,098 5239 05	4329 14	1,097 1400 54	4356 79	9,998 6161 49	27 64
22	98 9568 20	4329 17	97 5757 33	4356 76	6189 13	27 59
23	99 3897 37	4329 20	98 0114 09	4356 74	6216 72	27 54
24	99 8226 56	4329 23	98 4470 83	4356 71	6244 26	27 48
25	1,100 2555 79	4329 25	98 8827 53	4356 68	6271 74	27 43
3,226	1,100 6885 04	4329 28	1,099 3184 21	4356 65	9,998 6299 17	27 37
27	01 1214 32	4329 31	99 7540 86	4356 63	6326 54	27 32
28	01 5543 63	4329 33	1,100 1897 49	4356 60	6353 86	27 27
29	01 9872 96	4329 36	00 6254 09	4356 57	6381 13	27 21
30	02 4202 32	4329 39	01 0610 66	4356 54	6408 34	27 15
3,231	1,102 8531 71	4329 41	1,101 4967 20	4356 52	9,998 6435 49	27 11
32	03 2861 12	4329 44	01 9323 72	4356 49	6462 60	27 05
33	03 7190 56	4329 47	02 3680 21	4356 46	6489 65	26 99
34	04 1520 03	4329 50	02 8036 67	4356 44	6516 64	26 95
35	04 5849 52	4329 52	03 2393 11	4356 41	6543 59	26 88
3,236	1,105 0179 05	4329 55	1,103 6749 52	4356 38	9,998 6570 47	26 83
37	05 4508 60	4329 58	04 1105 90	4356 36	6597 30	26 79
38	05 8838 17	4329 60	04 5462 26	4356 33	6624 09	26 72
39	06 3167 78	4329 63	04 9818 59	4356 30	6650 81	26 67
40	06 7497 41	4329 66	05 4174 89	4356 27	6677 48	26 61
3,241	1,107 1827 07	4329 68	1,105 8531 16	4356 25	9,998 6704 09	26 57
42	07 6156 75	4329 71	06 2887 41	4356 22	6730 66	26 51
43	08 0486 46	4329 74	06 7243 63	4356 19	6757 17	26 46
44	08 4816 20	4329 76	07 1599 83	4356 17	6783 63	26 40
45	08 9145 96	4329 79	07 5955 99	4356 14	6810 03	26 35
3,246	1,109 3475 75	4329 81	1,108 0312 13	4356 11	9,998 6836 38	26 31
47	09 7805 56	4329 84	08 4668 25	4356 09	6862 69	26 25
48	10 2135 40	4329 87	08 9024 34	4356 06	6888 94	26 19
49	10 6465 27	4329 89	09 3380 40	4356 04	6915 13	26 14
50	11 0795 16		09 7736 43		6941 27	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,250	1,111 0795 16	4329 92	1,109 7736 43	4356 01	9,998 6941 27	26 09
3,251	1,111 5125 08	4329 94	1,110 2092 44	4356 98	9,998 6967 36	26 05
52	11 9455 02	4329 9	10 6448 43	4355 96	6993 41	25 99
53	12 3784 99	4330 00	11 0804 39	4355 93	7019 40	25 93
54	12 8114 99	4330 02	11 5160 32	4355 91	7045 33	25 89
55	13 2445 01	4330 05	11 9516 23	4355 88	7071 22	25 83
3,256	1,113 6775 06	4330 07	1,112 3872 11	4355 86	9,998 7097 05	25 78
57	14 1105 13	4330 10	12 8227 96	4355 83	7122 83	25 73
58	14 5435 23	4330 13	13 2583 79	4355 80	7148 56	25 68
59	14 9765 35	4330 15	13 6939 59	4355 78	7174 24	25 63
60	15 4095 50	4330 18	14 1295 37	4355 75	7199 87	25 57
3,261	1,115 8425 68	4330 20	1,114 5651 12	4355 72	9,998 7225 44	25 53
62	16 2755 88	4330 23	15 0006 85	4355 70	7250 97	25 46
63	16 7086 11	4330 25	15 4362 54	4355 67	72 6 43	25 42
64	17 1416 37	4330 28	15 8718 22	4355 65	7301 85	25 37
65	17 5746 64	4330 30	16 3073 86	4355 62	7327 22	25 32
3,266	1,118 0076 95	4330 33	1,116 7429 49	4355 60	9,998 7352 54	25 28
67	18 4407 27	4330 35	17 1785 09	4355 57	7377 82	25 21
68	18 8737 63	4330 38	17 6140 66	4355 55	7403 03	25 17
69	19 3068 01	4330 40	18 0496 21	4355 52	7428 20	25 12
70	19 7398 41	4330 43	18 4851 73	4355 50	7453 32	25 07
3,271	1,120 1728 84	4330 45	1,118 9207 23	4355 47	9,998 7478 39	25 02
72	20 6059 29	4330 48	19 3562 70	4355 45	7503 41	24 97
73	21 0389 77	4330 50	19 7918 15	4355 42	7528 38	24 92
74	21 4720 27	4330 53	20 2273 57	4355 40	7553 30	24 87
75	21 9050 80	4330 55	20 6628 97	4355 37	7578 17	24 82
3,276	1,122 3381 35	4330 58	1,121 0984 34	4355 35	9,998 7602 99	24 77
77	22 7711 93	4330 60	21 5339 69	4355 32	7627 76	24 72
78	23 2042 53	4330 63	21 9695 01	4355 30	7652 48	24 67
79	23 6373 16	4330 65	22 4050 31	4355 27	7677 15	24 62
80	24 0703 81	4330 68	22 8405 58	4355 25	7701 77	24 57
3,281	1,124 5034 49	4330 70	1,123 2760 83	4355 22	9,998 7726 34	24 52
82	24 9365 19	4330 73	23 7116 05	4355 20	7750 86	24 47
83	25 3695 92	4330 75	24 1471 25	4355 17	7775 33	24 42
84	25 8026 67	4330 77	24 5826 42	4355 15	7799 75	24 38
85	26 2357 44	4330 80	25 0181 57	4355 12	7824 13	24 32
3,286	1,126 6688 24	4330 82	1,125 4536 69	4355 10	9,998 7848 45	24 28
87	27 1019 06	4330 85	25 8891 79	4355 08	7872 73	24 23
88	27 5349 91	4330 87	26 3246 87	4355 05	7896 96	24 18
89	27 9680 78	4330 89	26 7601 92	4355 03	7921 14	24 14
90	28 4011 67	4330 92	27 1956 95	4355 01	7945 28	24 09
3,291	1,128 8342 59	4330 94	1,127 6311 96	4354 98	9,998 7969 37	24 04
92	29 2673 53	4330 97	28 0666 94	4354 96	7993 41	23 99
93	29 7004 50	4330 99	28 5021 90	4354 93	8017 40	23 94
94	30 1335 49	4331 01	28 9376 83	4354 91	8041 34	23 90
95	30 5666 50	4331 04	29 3731 74	4354 89	8065 24	23 84
3,296	1,130 9997 54	4331 06	1,129 8086 62	4354 86	9,998 8089 08	23 80
97	31 4328 60	4331 09	30 2441 48	4354 84	8112 88	23 75
98	31 8659 69	4331 11	30 6796 32	4354 81	8136 63	23 70
99	32 2990 80	4331 14	31 1151 13	4354 79	8160 33	23 66
3,300	32 7321 93		31 5505 92		8183 99	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,300	1,132 7321 93	4331 16	1,131 5505 92	4354 77	9,998 8183 99	23 61
3,301	1,133 1653 09	4331 18	1,131 9860 69	4354 74	9,998 8207 60	23 56
02	33 5984 27	4331 20	32 4215 43	4354 72	8231 16	23 51
03	34 0315 47	4331 23	32 8570 14	4354 69	8254 67	23 47
04	34 4646 70	4331 25	33 2924 84	4354 67	8278 14	23 42
05	34 8977 95	4331 27	33 7279 51	4354 65	8301 56	23 36
3,306	1,135 3309 23	4331 30	1,134 1634 15	4354 62	9,998 8324 92	23 33
07	35 7640 53	4331 32	34 5988 78	4354 60	8348 25	23 28
08	36 1971 85	4331 34	35 0343 38	4354 58	8371 53	23 23
09	36 6303 19	4331 37	35 4697 95	4354 55	8394 76	23 20
10	37 0634 55	4331 39	35 9052 51	4354 53	8417 96	23 14
3,311	1,137 4965 94	4331 41	1,136 3407 04	4354 51	9,998 8441 10	23 09
12	37 9297 36	4331 44	36 7761 55	4354 49	8464 19	23 05
13	38 3628 79	4331 46	37 2116 03	4354 46	8487 24	23 00
14	38 7960 25	4331 48	37 6470 49	4354 44	8510 24	22 96
15	39 2291 73	4331 50	38 0824 93	4354 42	8533 20	22 92
3,316	1,139 6623 23	4331 53	1,138 5179 35	4354 39	9,998 8556 12	22 86
17	40 0954 76	4331 55	38 9533 74	4354 37	8578 98	22 82
18	40 5286 31	4331 57	39 3888 11	4354 35	8601 80	22 77
19	40 9617 89	4331 60	39 8242 46	4354 33	8624 57	22 73
20	41 3949 48	4331 62	40 2596 78	4354 30	8647 30	22 69
3,321	1,141 8281 10	4331 65	1,140 6951 09	4354 28	9,998 8669 99	22 63
22	42 2612 75	4331 66	41 1305 36	4354 26	8692 62	22 59
23	42 6944 41	4331 69	41 5659 62	4354 23	8715 21	22 54
24	43 1276 10	4331 71	42 0013 85	4354 21	8737 75	22 50
25	43 5607 81	4331 73	42 4368 06	4354 19	8760 25	22 46
3,326	1,143 9939 54	4331 75	1,142 8722 25	4354 16	9,998 8782 71	22 41
27	44 4271 30	4331 78	43 3076 41	4354 14	8805 12	22 37
28	44 8603 07	4331 80	43 7430 56	4354 12	8827 49	22 31
29	45 2934 87	4331 82	44 1784 67	4354 10	8849 80	22 28
30	45 7266 69	4331 84	44 6138 77	4354 08	8872 08	22 24
3,331	1,146 1598 53	4331 86	1,145 0492 85	4354 05	9,998 8894 32	22 18
32	46 5930 40	4331 88	45 4846 90	4354 03	8916 50	22 15
33	47 0262 28	4331 91	45 9200 93	4354 01	8938 65	22 10
34	47 4594 19	4331 93	46 3554 94	4353 99	8960 75	22 06
35	47 8926 12	4331 95	46 7908 93	4353 97	8982 81	22 01
3,336	1,148 3258 07	4331 97	1,147 2262 80	4353 94	9,998 9004 82	21 98
37	48 7590 04	4332 00	47 6616 84	4353 92	9026 80	21 92
38	49 1922 04	4332 02	48 0970 76	4353 90	9048 72	21 89
39	49 6254 05	4332 04	48 5324 66	4353 88	9070 61	21 84
40	50 0586 09	4332 06	48 9678 54	4353 86	9092 45	21 79
3,341	1,150 4918 15	4332 08	1,149 4032 39	4353 83	9,998 9114 24	21 75
42	50 9250 24	4332 10	49 8386 23	4353 81	9135 99	21 71
43	51 3582 34	4332 13	50 2740 04	4353 79	9157 70	21 66
44	51 7914 47	4332 15	50 7093 83	4353 77	9179 36	21 62
45	52 2246 62	4332 17	51 1447 60	4353 75	9200 98	21 57
3,346	1,152 6578 79	4332 19	1,151 5801 34	4353 72	9,998 9222 55	21 54
47	53 0910 98	4332 21	52 0155 07	4353 70	9244 09	21 48
48	53 5243 20	4332 23	52 4508 77	4353 68	9265 57	21 45
49	53 9575 43	4332 26	52 8862 45	4353 66	9287 02	21 40
50	54 3907 69		53 3216 11		9308 42	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,350	1,154 3907 69	4332 28	1,153 3216 11	4353 64	9,998 9308 42	21 37
3,351	1,154 8239 96	4332 30	1,153 7569 75	4353 62	9,998 9329 79	21 31
52	55 2572 26	4332 32	54 1923 36	4353 60	9351 10	21 28
53	55 6904 58	4332 34	54 6276 96	4353 57	9372 38	21 23
54	56 1236 92	4332 36	55 0630 53	4353 55	9393 61	21 20
55	56 5569 28	4332 38	55 4984 09	4353 53	9414 81	21 15
3,356	1,156 9901 66	4332 40	1,155 9337 62	4353 51	9,998 9435 96	21 10
57	57 4234 07	4332 42	56 3691 13	4353 49	9457 06	21 07
58	57 8566 49	4332 45	56 8044 62	4353 47	9478 13	21 02
59	58 2898 94	4332 47	57 2398 09	4353 45	9490 15	20 98
60	58 7231 41	4332 49	57 6751 54	4353 43	9520 13	20 95
3,361	1,159 1563 89	4332 51	1,158 1104 97	4353 41	9,998 9541 08	20 90
62	59 5896 40	4332 53	58 5458 38	4353 39	9561 98	20 85
63	60 0228 93	4332 55	58 9811 76	4353 37	9582 83	20 82
64	60 4561 48	4332 57	59 4165 13	4353 34	9603 65	20 77
65	60 8894 06	4332 59	59 8518 47	4353 32	9624 42	20 73
3,366	1,161 3226 65	4332 61	1,160 2871 80	4353 30	9,998 9645 15	20 69
67	61 7559 26	4332 64	60 7225 10	4353 28	9665 84	20 64
68	62 1891 90	4332 66	61 1578 38	4353 26	9686 48	20 61
69	62 6224 55	4332 68	61 5931 64	4353 24	9707 09	20 56
70	63 0557 23	4332 69	62 0284 88	4353 22	9727 65	20 53
3,371	1,163 4889 92	4332 72	1,162 4638 10	4353 20	9,998 9748 18	20 48
72	63 9222 64	4332 74	62 8991 29	4353 18	9768 66	20 44
73	64 3555 37	4332 76	63 3344 47	4353 16	9789 10	20 39
74	64 7888 13	4332 78	63 7697 62	4353 14	9809 49	20 36
75	65 2220 90	4332 80	64 2050 76	4353 12	9829 86	20 32
3,376	1,165 6553 70	4332 82	1,164 6403 88	4353 10	9,998 9850 18	20 27
77	66 0886 52	4332 84	65 0756 97	4353 08	9870 45	20 24
78	66 5219 35	4332 86	65 5110 05	4353 06	9890 69	20 21
79	66 9552 21	4332 88	65 9463 11	4353 04	9910 90	20 16
80	67 3885 08	4332 90	66 3816 14	4353 02	9931 06	20 12
3,381	1,167 8217 98	4332 92	1,166 8169 16	4352 99	9,998 9951 18	20 07
82	68 2550 90	4332 94	67 2522 15	4352 98	9971 25	20 04
83	68 6883 84	4332 96	67 6875 13	4352 95	9991 29	19 99
84	69 1216 80	4332 98	68 1228 08	4352 94	9,999 0011 28	19 97
85	69 5549 77	4333 00	68 5581 02	4352 91	0031 25	19 91
3,386	1,169 9882 77	4333 02	1,168 9933 93	4352 90	9,999 0051 16	19 88
87	70 4215 79	4333 04	69 4286 83	4352 87	0071 04	19 83
88	70 8548 83	4333 06	69 8639 70	4352 86	0090 87	19 80
89	71 2881 89	4333 08	70 2992 56	4352 84	0110 67	19 76
90	71 7214 96	4333 10	70 7345 39	4352 82	0130 43	19 72
3,391	1,172 1548 06	4333 12	1,171 1698 21	4352 80	9,999 0150 15	19 67
92	72 5881 18	4333 14	71 6051 00	4352 78	0169 82	19 64
93	73 0214 32	4333 15	72 0403 78	4352 76	0189 46	19 60
94	73 4547 47	4333 17	72 4756 53	4352 74	0209 06	19 57
95	73 8880 64	4333 19	72 9109 27	4352 72	0228 63	19 52
3,396	1,174 3213 84	4333 21	1,173 3461 99	4352 70	9,999 0248 15	19 49
97	74 7547 05	4333 23	73 7814 69	4352 68	0267 64	19 45
98	75 1880 28	4333 25	74 2167 37	4352 66	0287 09	19 41
99	75 6213 53	4333 27	74 6520 03	4352 64	0306 50	19 37
3,400	76 0546 80		75 0872 67		0325 87	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,400	1,176 0546 80	4333 29	1,175 0872 67	4352 62	9,999 0325 87	19 33
3,401	1,176 4880 09	4333 31	1,175 5225 29	4352 60	9,999 0345 20	19 29
02	76 9213 40	4333 33	75 9577 89	4352 58	0364 49	19 26
03	77 3546 72	4333 35	76 3930 47	4352 56	0383 75	19 21
04	77 7880 07	4333 37	76 8283 03	4352 54	0402 96	19 17
05	78 2213 44	4333 39	77 2635 57	4352 52	0422 13	19 14
3,406	1,178 6546 83	4333 41	1,177 6988 10	4352 51	9,999 0441 27	19 10
07	79 0880 23	4333 43	78 1340 60	4352 49	0460 37	19 06
08	79 5213 66	4333 44	78 5693 09	4352 47	0479 43	19 02
09	79 9547 10	4333 46	79 0045 55	4352 45	0498 45	18 98
10	80 3880 57	4333 48	79 4398 00	4352 43	0517 43	18 95
3,411	1,180 8214 05	4333 50	1,179 8750 43	4352 41	9,999 0536 38	18 91
12	81 2547 55	4333 52	80 3102 84	4352 39	0555 29	18 87
13	81 6881 07	4333 54	80 7455 23	4352 37	0574 16	18 83
14	82 1214 61	4333 56	81 1807 60	4352 35	0592 99	18 80
15	82 5548 17	4333 58	81 6159 96	4352 33	0611 79	18 76
3,416	1,182 9881 74	4333 60	1,182 0512 29	4352 32	9,999 0630 55	18 72
17	83 4215 34	4333 61	82 4864 61	4352 30	0649 27	18 68
18	83 8548 95	4333 63	82 9216 90	4352 28	0667 95	18 64
19	84 2882 59	4333 65	83 3569 18	4352 26	0686 59	18 61
20	84 7216 24	4333 67	83 7921 44	4352 24	0705 20	18 57
3,421	1,185 1549 91	4333 69	1,184 2273 68	4352 22	9,999 0723 77	18 53
22	85 5883 60	4333 71	84 6625 90	4352 20	0742 30	18 49
23	86 0217 31	4333 73	85 0978 10	4352 18	0760 79	18 46
24	86 4551 03	4333 74	85 5330 28	4352 16	0779 25	18 42
25	86 8884 78	4333 76	85 9682 45	4352 15	0797 67	18 38
3,426	1,187 3218 54	4333 78	1,186 4034 59	4352 13	9,999 0816 05	18 35
27	87 7552 32	4333 80	86 8386 72	4352 11	0834 40	18 31
28	88 1886 12	4333 82	87 2738 83	4352 09	0852 71	18 28
29	88 6219 93	4333 83	87 7090 92	4352 07	0870 99	18 24
30	89 0553 77	4333 85	88 1443 00	4352 06	0889 23	18 20
3,431	1,189 4887 62	4333 87	1,188 5795 05	4352 04	9,999 0907 43	18 17
32	89 9221 49	4333 89	89 0147 09	4352 02	0925 60	18 13
33	90 3555 38	4333 91	89 4499 11	4352 00	0943 73	18 10
34	90 7889 28	4333 92	89 8851 11	4351 98	0961 83	18 06
35	91 2223 21	4333 94	90 3203 10	4351 97	0979 89	18 02
3,436	1,191 6557 15	4333 96	1,190 7555 06	4351 95	9,999 0997 91	17 99
37	92 0891 11	4333 98	91 1907 01	4351 93	1015 90	17 95
38	92 5225 09	4334 00	91 6258 94	4351 91	1033 85	17 92
39	92 9559 09	4334 01	92 0610 86	4351 90	1051 77	17 88
40	93 3893 10	4334 03	92 4962 75	4351 88	1069 65	17 85
3,441	1,193 8227 13	4334 05	1,192 9314 63	4351 86	9,999 1087 50	17 80
42	94 2561 18	4334 07	93 3666 48	4351 84	1105 30	17 77
43	94 6895 25	4334 09	93 8018 32	4351 82	1123 07	17 73
44	95 1229 34	4334 11	94 2370 14	4351 80	1140 80	17 70
45	95 5563 45	4334 12	94 6721 95	4351 79	1158 50	17 66
3,446	1,195 9897 57	4334 14	1,195 1073 73	4351 77	9,999 1176 16	17 63
47	96 4231 71	4334 16	95 5425 50	4351 75	1193 79	17 59
48	96 8565 87	4334 18	95 9777 25	4351 73	1211 38	17 56
49	97 2900 04	4334 19	96 4128 98	4351 72	1228 94	17 52
50	97 7234 23		96 8480 69		1246 46	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,450	1,197 7234 23	4334 21	1,196 8480 69	4351 70	9,999 1246 46	17 49
3,451	1,198 1568 44	4334 23	1,197 2832 39	4351 68	9,999 1263 95	17 45
52	98 5902 67	4334 24	97 7184 07	4351 66	1281 40	17 43
53	99 0236 91	4334 26	98 1535 74	4351 65	1298 83	17 38
54	99 4571 17	4334 28	98 5887 38	4351 63	1316 21	17 35
55	99 8905 45	4334 29	99 0239 01	4351 61	1333 56	17 33
3,456	1,200 3239 74	4334 31	1,199 4590 63	4351 60	9,999 1350 89	17 28
57	00 7574 05	4334 33	99 8942 22	4351 58	1368 17	17 25
58	01 1908 38	4334 35	1,200 3293 80	4351 56	1385 42	17 21
59	01 6242 73	4334 36	00 7645 36	4351 54	1402 63	17 19
60	02 0577 09	4334 38	01 1996 91	4351 53	1419 82	17 14
3,461	1,202 4911 47	4334 40	1,201 6348 43	4351 51	9,999 1436 96	17 11
62	02 9245 87	4334 42	02 0699 94	4351 49	1454 07	17 07
63	03 3580 29	4334 43	02 5051 43	4351 47	1471 14	17 04
64	03 7914 72	4334 45	02 9402 90	4351 46	1488 18	17 01
65	04 2249 17	4334 47	03 3754 36	4351 44	1505 19	16 97
3,466	1,204 6583 64	4334 48	1,203 8105 80	4351 42	9,999 1522 16	16 94
67	05 0918 12	4334 50	04 2457 22	4351 41	1539 10	16 91
68	05 5252 62	4334 52	04 6808 63	4351 39	1556 01	16 87
69	05 9587 14	4334 54	05 1160 02	4351 37	1572 88	16 83
70	06 3921 68	4334 55	05 5511 39	4351 36	1589 70	16 81
3,471	1,206 8256 23	4334 57	1,205 9862 75	4351 34	9,999 1606 52	16 77
72	07 2590 80	4334 59	06 4214 08	4351 32	1623 29	16 74
73	07 6925 38	4334 60	06 8565 41	4351 30	1640 03	16 70
74	08 1259 99	4334 62	07 2916 71	4351 29	1656 73	16 67
75	08 5594 60	4334 63	07 7268 00	4351 27	1673 40	16 63
3,476	1,208 9929 24	4334 65	1,208 1619 27	4351 25	9,999 1690 03	16 60
77	09 4263 89	4334 67	08 5970 52	4351 24	1706 63	16 58
78	09 8598 55	4334 68	09 0321 76	4351 22	1723 21	16 53
79	10 2933 24	4334 70	09 4672 98	4351 21	1739 74	16 51
80	10 7267 93	4334 72	09 9024 18	4351 19	1756 25	16 47
3,481	1,211 1602 65	4334 73	1,210 3375 37	4351 17	9,999 1772 72	16 44
82	11 5937 38	4334 75	10 7726 54	4351 15	1789 16	16 40
83	12 0272 14	4334 77	11 2077 69	4351 14	1805 56	16 37
84	12 4606 90	4334 78	11 6428 83	4351 12	1821 93	16 33
85	12 8941 69	4334 80	12 0779 95	4351 11	1838 26	16 31
3,486	1,213 3276 48	4334 82	1,212 5131 06	4351 09	9,999 1854 57	16 27
87	13 7611 30	4334 83	12 9482 14	4351 07	1870 84	16 24
88	14 1946 13	4334 85	13 3833 22	4351 06	1887 08	16 21
89	14 6280 98	4334 86	13 8184 27	4351 04	1903 29	16 18
90	15 0615 84	4334 88	14 2535 32	4351 03	1919 47	16 15
3,491	1,215 4950 72	4334 90	1,214 6886 34	4351 01	9,999 1935 62	16 11
92	15 9285 62	4334 91	15 1237 35	4350 99	1951 73	16 08
93	16 3620 53	4334 93	15 5588 34	4350 98	1967 81	16 05
94	16 7955 46	4334 94	15 9939 32	4350 96	1983 86	16 02
95	17 2290 40	4334 96	16 4290 28	4350 95	1999 88	15 99
3,496	1,217 6625 36	4334 98	1,216 8641 23	4350 93	9,999 2015 87	15 95
97	18 0960 34	4334 99	17 2992 16	4350 91	2031 82	15 92
98	18 5295 33	4335 01	17 7343 07	4350 90	2047 74	15 89
99	18 9630 34	4335 02	18 1693 97	4350 88	2063 63	15 86
3,500	19 3965 36		18 6044 85		2079 49	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,500	1,219 3965 36	4335 04	1,218 6044 85	4350 86	9,999 2079 49	15 82
3,501	1,219 8300 40	4335 06	1,219 0395 71	4350 85	9,999 2095 31	15 79
02	20 2635 46	4335 07	19 4746 56	4350 83	2111 10	15 76
03	20 6970 53	4335 09	19 9097 39	4350 82	2126 86	15 73
04	21 1306 62	4335 10	20 3448 21	4350 80	2142 59	15 70
05	21 5640 72	4335 12	20 7799 01	4350 78	2158 29	15 66
3,506	1,122 9975 84	4335 14	1,221 2149 79	4350 77	9,999 2173 95	15 63
07	22 4310 98	4335 15	21 6500 56	4350 75	2189 58	15 60
08	22 8646 13	4335 17	22 0851 31	4350 74	2205 18	15 58
09	23 2981 29	4335 18	22 5202 05	4350 72	2220 76	15 54
10	23 7316 47	4335 20	22 9552 77	4350 71	2236 30	15 51
3,511	1,224 1651 67	4335 21	1,223 3903 48	4350 69	9,999 2251 81	15 48
12	24 5986 88	4335 23	23 8254 17	4350 68	2267 29	15 45
13	25 0322 11	4335 24	24 2604 85	4350 66	2282 74	15 42
14	25 4657 35	4335 26	24 6955 51	4350 65	2298 16	15 40
15	25 8992 60	4335 27	25 1306 16	4350 63	2313 56	15 36
3,516	1,226 3327 87	4335 29	1,225 5656 79	4350 62	9,999 2328 92	15 33
17	26 7663 16	4335 30	26 0007 41	4350 60	2344 25	15 30
18	27 1998 46	4335 32	26 4358 01	4350 59	2359 55	15 27
19	27 6333 78	4335 33	26 8708 60	4350 57	2374 82	15 24
20	28 0669 11	4335 35	27 3059 17	4350 55	2390 06	15 20
3,521	1,228 5004 46	4335 36	1,227 7409 72	4350 54	9,999 2405 26	15 18
22	28 9339 82	4335 38	28 1760 26	4350 52	2420 44	15 14
23	29 3675 20	4335 39	28 6110 78	4350 51	2435 58	15 11
24	29 8010 60	4335 41	29 0461 29	4350 49	2450 69	15 09
25	30 2346 01	4335 42	29 4811 79	4350 48	2465 78	15 05
3,526	1,230 6681 43	4335 44	1,229 9162 26	4350 46	9,999 2480 83	15 03
27	31 1016 87	4335 45	30 3512 73	4350 45	2495 86	14 99
28	31 5352 32	4335 47	30 7863 17	4350 43	2510 85	14 97
29	31 9687 79	4335 48	31 2213 61	4350 42	2525 82	14 93
30	32 4023 28	4335 50	31 6564 03	4350 40	2540 75	14 91
3,531	1,232 8358 77	4335 51	1,232 0914 43	4350 39	9,999 2555 66	14 87
32	33 2694 29	4335 53	32 5264 82	4350 37	2570 53	14 84
33	33 7029 82	4335 54	32 9615 19	4350 36	2585 37	14 82
34	34 1365 36	4335 56	33 3965 55	4350 34	2600 19	14 78
35	34 5700 92	4335 57	33 8315 89	4350 33	2614 97	14 76
3,536	1,235 0036 49	4335 59	1,234 2666 22	4350 31	9,999 2629 73	14 73
37	35 4372 08	4335 60	34 7016 54	4350 30	2644 46	14 69
38	35 8707 69	4335 62	35 1366 84	4350 28	2659 15	14 66
39	36 3043 31	4335 63	35 5717 12	4350 27	2673 81	14 64
40	36 7378 94	4335 65	36 0067 39	4350 26	2688 45	14 61
3,541	1,237 1714 58	4335 66	1,236 4417 64	4350 24	9,999 2703 06	14 58
42	37 6050 24	4335 68	36 8767 88	4350 23	2717 64	14 55
43	38 0385 92	4335 69	37 3118 11	4350 21	2732 19	14 52
44	38 4721 61	4335 71	37 7468 32	4350 20	2746 71	14 49
45	38 9057 31	4335 72	38 1818 51	4350 18	2761 20	14 46
3,546	1,239 3393 03	4335 74	1,238 6168 69	4350 17	9,999 2775 66	14 43
47	39 7728 77	4335 75	39 0518 86	4350 15	2790 09	14 40
48	40 2064 52	4335 76	39 4869 01	4350 14	2804 49	14 38
49	40 6400 28	4335 78	39 9219 15	4350 12	2818 87	14 34
50	41 0736 06		40 3569 27		2833 21	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,550	1,241 0736 06	4335 79	1,240 3569 27	4350 11	9,999 2833 21	14 32
3,551	1,241 5071 85	4335 81	1,240 7919 38	4350 10	9,999 2847 53	14 29
52	41 9407 66	4335 82	41 2269 48	4350 08	2861 82	14 26
53	42 3743 48	4335 83	41 6619 56	4350 07	2876 08	14 24
54	42 8079 31	4335 85	42 0969 63	4350 05	2890 32	14 21
55	43 2415 16	4335 86	42 5319 68	4350 04	2904 53	14 18
3,556	1,243 6751 02	4335 88	1,242 9669 73	4350 03	9,999 2918 71	14 15
57	44 1086 90	4335 89	43 4019 75	4350 01	2932 86	14 12
58	44 5422 79	4335 90	43 8369 77	4350 00	2946 98	14 09
59	44 9758 69	4335 92	44 2719 76	4349 99	2961 07	14 07
60	45 4094 61	4335 93	44 7069 75	4349 97	2975 14	14 04
3,561	1,245 8430 54	4335 95	1,245 1419 72	4349 95	9,999 2989 18	14 00
62	46 2766 49	4335 96	45 5769 67	4349 94	3003 18	13 98
63	46 7102 45	4335 98	46 0119 61	4349 93	3017 16	13 95
64	47 1438 43	4335 99	46 4469 54	4349 91	3031 11	13 93
65	47 5774 41	4336 00	46 8819 45	4349 90	3045 04	13 89
3,566	1,248 0110 42	4336 02	1,247 3169 35	4349 88	9,999 3058 93	13 87
67	48 4446 43	4336 03	47 7519 23	4349 87	3072 80	13 83
68	48 8782 47	4336 05	48 1869 10	4349 86	3086 63	13 82
69	49 3118 51	4336 06	48 6218 96	4349 84	3100 45	13 78
70	49 7454 57	4336 07	49 0568 80	4349 83	3114 23	13 76
3,571	1,250 1790 64	4336 09	1,249 4918 63	4349 81	9,999 3127 99	13 72
72	50 6126 73	4336 10	49 9268 44	4349 80	3141 71	13 70
73	51 0462 83	4336 11	50 3618 24	4349 79	3155 41	13 68
74	51 4798 94	4336 13	50 7968 03	4349 77	3169 09	13 65
75	51 9135 06	4336 14	51 2317 80	4349 76	3182 74	13 62
3,576	1,252 3471 20	4336 15	1,251 6667 56	4349 75	9,999 3196 36	13 59
77	52 7807 36	4336 16	52 1017 31	4349 74	3209 95	13 58
78	53 2143 52	4336 18	52 5367 05	4349 72	3223 53	13 54
79	53 6479 70	4336 19	52 9716 77	4349 71	3237 07	13 52
80	54 0815 89	4336 21	53 4066 48	4349 69	3250 59	13 48
3,581	1,254 5152 10	4336 22	1,253 8416 17	4349 68	9,999 3264 07	13 46
82	54 9488 32	4336 24	54 2765 85	4349 66	3277 53	13 43
83	55 3824 55	4336 25	54 7115 51	4349 65	3290 96	13 40
84	55 8160 80	4336 26	55 1465 16	4349 64	3304 36	13 38
85	56 2497 06	4336 28	55 5814 80	4349 63	3317 74	13 35
3,586	1,256 6833 34	4336 29	1,256 0164 43	4349 61	9,999 3331 09	13 32
87	57 1169 63	4336 30	56 4514 04	4349 60	3344 41	13 30
88	57 5505 93	4336 32	56 8863 64	4349 59	3357 71	13 27
89	57 9842 25	4336 33	57 3213 22	4349 57	3370 98	13 24
90	58 4178 57	4336 34	57 7562 80	4349 56	3384 22	13 21
3,591	1,258 8514 92	4336 35	1,258 1912 35	4349 55	9,999 3397 43	13 20
92	59 2851 27	4336 37	58 6261 90	4349 53	3410 63	13 16
93	59 7187 64	4336 38	59 0611 43	4349 52	3423 79	13 14
94	60 1524 02	4336 39	59 4960 95	4349 51	3436 93	13 12
95	60 5860 41	4336 41	59 9310 46	4349 49	3450 05	13 09
3,596	1,261 0196 81	4336 42	1,260 3659 95	4349 48	9,999 3463 14	13 07
97	61 4533 23	4336 43	60 8009 44	4349 47	3476 21	13 03
89	61 8869 66	4336 44	61 2358 90	4349 46	3489 24	13 01
99	62 3206 11	4336 46	61 6708 36	4349 44	3502 25	12 99
3,600	62 7542 56		62 1057 80		3515 24	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,600	1,262 7542 56	4336 47	1,262 1057 80	4349 43	9,999 3515 24	12 95
3,601	1,263 1879 04	4336 49	1,262 5407 23	4349 42	9,999 3528 19	12 93
02	63 6215 52	4336 50	62 9756 64	4349 40	3541 12	12 90
03	64 0552 02	4336 51	63 4106 05	4349 39	3554 02	12 88
04	64 4888 53	4336 52	63 8455 43	4349 38	3566 90	12 86
05	64 9225 05	4336 54	64 2804 81	4349 36	3579 76	12 83
3,606	1,265 3561 59	4336 55	1,264 7154 18	4349 35	9,999 3592 59	12 80
07	65 7898 14	4336 56	65 1503 53	4349 34	3605 39	12 77
08	66 2234 70	4336 58	65 5852 86	4349 33	3618 16	12 75
09	66 6571 28	4336 59	66 0202 19	4349 31	3630 91	12 72
10	67 0907 87	4336 60	66 4551 50	4349 30	3643 63	12 70
3,611	1,267 5244 47	4336 61	1,266 8900 80	4349 29	9,999 3656 33	12 68
12	67 9581 08	4336 63	67 3250 09	4349 28	3669 01	12 65
13	68 3917 71	4336 64	67 7599 37	4349 26	3681 66	12 63
14	68 8254 34	4336 65	68 1948 63	4349 25	3694 29	12 60
15	69 2590 99	4336 66	68 6297 88	4349 24	3706 89	12 57
3,616	1,269 6927 65	4336 67	1,269 0647 11	4349 22	9,999 3719 46	12 54
17	70 1264 33	4336 69	69 4996 33	4349 21	3732 00	12 53
18	70 5601 01	4336 70	69 9345 54	4349 20	3744 53	12 50
19	70 9937 71	4336 71	70 3694 74	4349 18	3757 03	12 48
20	71 4274 42	4336 73	70 8043 93	4349 17	3769 51	12 45
3,621	1,271 8611 14	4336 74	1,271 2393 10	4349 16	9,999 3781 96	12 42
22	72 2947 88	4336 75	71 6742 26	4349 15	3794 38	12 40
23	72 7284 63	4336 76	72 1091 41	4349 14	3806 78	12 37
24	73 1621 40	4336 78	72 5440 55	4349 12	3819 15	12 35
25	73 5958 17	4386 79	72 9789 67	4349 11	3831 50	12 32
3,626	1,274 0294 96	4336 80	1,273 4138 78	4349 10	9,999 3843 82	12 30
27	74 4631 76	4336 81	73 8487 88	4349 09	3856 12	12 28
28	74 8968 57	4336 82	74 2836 97	4349 07	3868 40	12 25
29	75 3305 39	4336 84	74 7186 04	4349 07	3880 65	12 23
30	75 7642 23	4336 85	75 1535 11	4349 05	3892 88	12 20
3,631	1,276 1979 08	4336 86	1,275 5884 16	4349 04	9,999 3905 08	12 18
32	76 6315 94	4336 87	76 0233 20	4349 02	3917 26	12 16
33	77 0652 81	4336 88	76 4582 22	4349 02	3929 42	12 13
34	77 4989 69	4336 90	76 8931 24	4349 00	3941 55	12 10
35	77 9326 59	4336 91	77 3280 24	4348 99	3953 65	12 08
3,636	1,278 3663 50	4336 92	1,277 7629 23	4348 98	9,999 3965 73	12 05
37	78 8000 42	4336 93	78 1978 20	4348 97	3977 78	12 04
38	79 2337 35	4336 94	78 6327 17	4348 95	3989 82	12 01
39	79 6674 29	4336 96	79 0676 12	4348 94	4001 83	11 98
40	80 1011 25	4336 97	79 5025 06	4348 93	4013 81	11 96
3,641	1,280 5348 22	4336 98	1,279 9373 99	4348 92	9,999 4025 77	11 93
42	80 9685 20	4336 99	80 3722 90	4348 90	4037 70	11 91
43	81 4022 19	4337 00	80 8071 80	4348 89	4049 61	11 89
44	81 8359 19	4337 02	81 2420 70	4348 88	4061 50	11 87
45	82 2696 21	4337 03	81 6769 58	4348 87	4073 37	11 84
3,646	1,282 7033 24	4337 04	1,282 1118 45	4348 86	9,999 4085 21	11 81
47	83 1370 28	4337 05	82 5467 30	4348 85	4097 02	11 80
48	83 5707 33	4337 06	82 9816 15	4348 83	4108 82	11 77
49	84 0044 39	4337 08	83 4164 98	4348 82	4120 59	11 75
50	84 4381 47		83 8513 81		4132 34	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,650	1,284 4381 47	4337 09	1,283 8513 81	4348 81	9,999 4132 34	11 72
3,651	1,284 8718 56	4337 10	1,284 2862 62	4348 80	9,999 4144 06	11 70
52	85 3055 66	4337 11	84 7211 42	4348 79	4155 76	11 67
53	85 7392 77	4337 12	85 1560 20	4348 78	4167 43	11 65
54	86 1729 89	4337 13	85 5908 98	4348 77	4179 08	11 63
55	86 6067 03	4337 15	86 0257 74	4348 75	4190 71	11 61
3,656	1,287 0404 17	4337 16	1,286 4606 50	4348 74	9,999 4202 32	11 59
57	87 4741 33	4337 17	86 8955 24	4348 73	4213 91	11 57
58	87 9078 49	4337 18	87 3303 97	4348 72	4225 48	11 54
59	88 3415 67	4337 19	87 7652 69	4348 71	4237 02	11 52
60	88 7752 86	4337 20	88 2001 40	4348 69	4248 54	11 48
3,661	1,289 2090 07	4337 21	1,288 6350 09	4348 68	9,999 4260 02	11 47
62	89 6427 28	4337 23	89 0698 77	4348 67	4271 49	11 44
63	90 0764 51	4337 24	89 5047 44	4348 66	4282 93	11 43
64	90 5101 74	4337 25	89 9396 10	4348 65	4294 36	11 40
65	90 9438 99	4337 26	90 3744 75	4348 64	4305 76	11 38
3,666	1,291 3776 25	4337 27	1,290 8093 39	4348 63	9,999 4317 14	11 36
67	91 8113 52	4337 28	91 2442 02	4348 62	4328 50	11 33
68	92 2450 80	4337 29	91 6790 63	4348 60	4339 83	11 31
69	92 6788 10	4337 30	92 1139 24	4348 59	4351 14	11 29
70	93 1125 40	4337 32	92 5487 83	4348 58	4362 43	11 26
3,671	1,293 5462 72	4337 33	1,292 9836 41	4348 57	9,999 4373 69	11 25
72	93 9800 04	4337 34	93 4184 98	4348 56	4384 94	11 22
73	94 4137 38	4337 35	93 8533 54	4348 55	4396 16	11 19
74	94 8474 73	4337 36	94 2882 08	4348 54	4407 35	11 17
75	95 2812 09	4337 37	94 7230 62	4348 52	4418 52	11 15
3,676	1,295 7149 47	4337 39	1,295 1579 14	4348 51	9,999 4429 67	11 13
77	96 1486 85	4337 40	95 5927 66	4348 50	4440 80	11 11
78	96 5824 25	4337 41	96 0276 16	4348 49	4451 91	11 08
79	97 0161 66	4337 42	96 4624 65	4348 48	4462 99	11 06
80	97 4499 07	4337 43	96 8973 12	4348 47	4474 05	11 04
3,681	1,297 8836 50	4337 44	1,297 3321 59	4348 46	9,999 4485 09	11 02
82	98 3173 94	4337 45	97 7670 05	4348 45	4496 11	11 00
83	98 7511 39	4337 46	98 2018 50	4348 44	4507 11	10 97
84	99 1848 85	4337 47	98 6366 93	4348 43	4518 08	10 95
85	99 6186 32	4337 48	99 0715 36	4348 41	4529 03	10 93
3,686	1,300 0523 81	4337 49	1,299 5063 77	4348 40	9,999 4539 96	10 92
87	00 4861 30	4337 60	99 9412 18	4348 39	4550 88	10 89
88	00 9198 80	4337 52	1,300 3760 57	4348 38	4561 77	10 86
89	01 3536 32	4337 53	00 8108 95	4348 37	4572 63	10 84
90	01 7873 85	4337 54	01 2457 32	4348 36	4583 47	10 83
3,691	1,302 2211 38	4337 55	1,301 6805 68	4348 35	9,999 4594 30	10 80
92	02 6548 93	4337 56	02 1154 03	4348 34	4605 10	10 78
93	03 0886 49	4337 57	02 5502 37	4348 33	4615 88	10 75
94	03 5224 06	4337 58	02 9850 69	4348 32	4626 63	10 74
95	03 9561 64	4337 59	03 4199 01	4348 31	4637 37	10 71
3,696	1,304 3899 23	4337 60	1,303 8547 31	4348 29	9,999 4648 08	10 70
97	04 8236 83	4337 61	04 2895 61	4348 28	4658 78	10 67
98	05 2574 44	4337 62	04 7243 89	4348 27	4669 45	10 65
99	05 6912 07	4337 63	05 1592 16	4348 26	4680 10	10 63
3,700	06 1249 70		05 5940 43		4690 73	

(Die Fortsetzung folgt.)

23.

Auflösung der Aufgabe im 2ten Bande dieses Journals S. 99. No. 14.

(Vom Herrn Prof. *W. A. Förstemann* zu Danzig.)

Aufgabe. Aus der Gleichung

$$\sqrt{(a_1+x)}+\sqrt{(a_2+x)}+\sqrt{(a_3+x)}+\sqrt{(a_4+x)}+\sqrt{(a_5+x)}+\sqrt{(a_6+x)}=0,$$

wo a_1, a_2 .... a_6 von einander verschiedene gegebene Grö-fsen sind, x zu finden.

Hat man eine Methode, Gleichungen von der Form

$$\sqrt{X_1}\pm\sqrt{X_2}\pm\sqrt{X_3}\pm\ldots\ldots=0,$$

wo X_1, X_2 .... rationale Functionen von x (oder selbst von mehreren Unbekannten) sind, rational zu machen, so kann man die obige Aufgabe als gelöset betrachten. Längst war ich im Besitz einer solchen Methode, glaubte aber nicht, dieselbe für neu halten zu dürfen. Die Auflösung, welche im vorhergehenden Hefte dieses Journals von obiger Aufgabe gegeben ist, veranlafst mich, hier meine Methode mitzutheilen.

1. Es sei zunächst die Gleichung

$$\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}=0$$

rational zu machen. In so fern jede Quadratwurzel zwei einander entgegengesetzte Werthe hat, kann man in dieser Gleichung die beiden

$$\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}=0 \quad \text{und} \quad \sqrt{X_1}-\sqrt{X_2}=0$$

begriffen denken, mit welchen die beiden

$$-\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2}=0 \quad \text{und} \quad -\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}=0$$

beziehungsweise zusammenfallen würden. Die Aufgabe, die Gleichung $\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}=0$ zu lösen, ist also in der allgemeineren Aufgabe begriffen, die Gleichung $(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}).(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2})=0$ aufzulösen. Diese nimmt aber, wegen der Formel $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, die Gestalt an

$$X_1-X_2=0,$$

und dieses ist die gesuchte rationale Gleichung. Die gewöhnliche Methode führt auf dieselbe, man mag $\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}=0$, oder $\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2}=0$ zu Grunde legen.

2. Auf gleiche Weise wird die Gleichung

$$\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}+\sqrt{X_3}=0$$

rational, wenn man statt derselben setzt:

$$(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}+\sqrt{X_3})\cdot(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}-\sqrt{X_3})\cdot(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2}+\sqrt{X_3})$$
$$\times(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2}-\sqrt{X_3})=0.$$

So kommt die Aufgabe, diese Gleichung rational zu machen, auf die Bildung des Products der vier Factoren

$$a+b+c,\quad a+b-c,\quad a-b+c,\quad a-b-c$$

zurück; und dafs die Gleichung wirklich hiedurch rational gemacht werden kann, hängt mit von dem Umstande ab, dafs das Product dieser vier Factoren nur gerade Potenzen der Buchstaben a, b, c enthält. Dies Product ist nämlich $= a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$.

Die gesuchte rationale Gleichung ist daher

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2-2X_1X_2-2X_1X_3-2X_2X_3=0,$$

wie man auch nach gewöhnlicher Methode findet.

Wendet man dies Resultat z. B. auf die Gleichung

$$\sqrt{x}+\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(3+x)}=0$$

an, so ergiebt sich die rationale Gleichung $3x^2+8x-4=0$, woher

$$x=\tfrac{2}{3}.(-2+\sqrt{7})\quad\text{oder}\quad x=\tfrac{2}{3}.(-2-\sqrt{7}).$$

Diese beiden Werthe sind beziehungsweise die Auflösungen der Gleichungen $\sqrt{x}+\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(3+x)}=0$ und $\sqrt{x}-\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(3+x)}=0$; die beiden Gleichungen $\sqrt{x}+\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(3+x)}=0$ und $\sqrt{x}-\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(3+x)}=0$ sind dagegen unauflösbar.

3. Man kann sich folgendermafsen, ohne die Multiplication auszuführen, überzeugen, dafs das Product der vier Factoren

$$a+b+c,\quad a+b-c,\quad a-b+c,\quad a-b-c$$

nur gerade Potenzen von a, b, c enthalten kann, so wie auch, dafs es symmetrisch für a, b, c sein mufs.

1) Verwandelt man b in $-b$, so gehet der erste Factor in den dritten, der zweite in den vierten über, und umgekehrt der dritte in den ersten, der vierte in den zweiten. Es hat also das Product denselben Werth, man lege dem b einen gewissen Zahlenwerth, oder den entgegengesetzten bei. Ähnliches findet sich für c, und endlich selbst für a; denn verwandelt man a in $-a$, so wird der erste Factor zum Gegentheil des vierten, und umgekehrt aus dem vierten das Gegentheil des ersten; ferner wird der zweite zum Gegentheil des dritten, und umgekehrt. Aus dieser Eigenschaft des Products und daraus, dafs nur gerade Potenzen bei Veränderung der Basis ins Gegentheil ihren Werth nicht ändern, läfst sich beweisen, jenes Product könne nur gerade Potenzen von a, b und c enthalten.

2) Auf gleiche Weise überzeugt man sich, weder die Vertauschung von a mit einem der Buchstaben b und c, noch die Vertauschung dieser letzteren unter einander könne das Product ändern, dasselbe müsse also für a, b, c symmetrisch sein.

4. Allgemein kommt das Rationalmachen einer Gleichung von der Form

$$\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}+\sqrt{X_3}\ldots. = 0,$$

sie habe links so viel Glieder als sie wolle, auf die Bildung des Products aller der Factoren zurück, die in der Form $a \pm b \pm c \ldots.$ enthalten sind, wenn nämlich die Anzahl der Buchstaben a, b .... der Anzahl von Gliedern in jener Gleichung gleich genommen wird. Von diesem Producte kann jedesmal bewiesen werden, es müsse für alle Buchstaben symmetrisch sein (nur das Product der Binome $a+b$ und $a-b$ bildet hievon eine Ausnahme), und könne dieselben nur in geraden Potenzen enthalten. Aus dieser letzteren Eigenschaft ergiebt sich, dafs wirklich, wenn man in dem Producte statt a, b, ... nach der Reihe setzt $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$, ..., die Quadratwurzeln wegfallen. Ferner erhellt, wenn die Zahl der Wurzeln in der Gleichung, und also auch die Zahl der Buchstaben in dem Polynome $a \pm b \pm \ldots. = n$ ist, so müsse das Product vom 2^{n-1}ten Grade in Bezug auf a, b .... sein.

5. Wenden wir dies jetzt auf eine Gleichung von der Gestalt

$$\sqrt{(a_1+x)}+\sqrt{(a_2+x)}+\sqrt{(a_3+x)}+\ldots. = 0$$

an, und bezeichnen die Anzahl der links stehenden Glieder mit n, so wird das nach 4. zu bildende Hülfsproduct in Bezug auf a, b, ... vom 2^{n-1}ten Grade sein, und folglich, wenn man statt a, b .... setzt $\sqrt{(a_1+x)}$, $\sqrt{(a_2+x)}$, ... eine Gleichung vom 2^{n-2}ten Grade entstehen.

So mufs sich also für die Gleichung, welche zu diesem Aufsatze Veranlassung gegeben, da sie 6 Wurzeln enthält, als Endresultat eine rationale Gleichung vom 16ten Grade finden; oder also für die 32 Gleichungen, welche in der Form

$$\sqrt{(a_1+x)} \pm \sqrt{(a_2+x)} \pm \sqrt{(a_3+x)} \pm \sqrt{(a_4+x)} \pm \sqrt{(a_5+x)} \pm \sqrt{(a_6+x)} = 0$$

begriffen sind, mufs x sechszehn Werthe haben. Hieraus kann man schliefsen, dafs im Allgemeinen 16 von jenen Gleichungen auflösbar, 16 andre unauflösbar sein werden.

Nach S. 140. des vorhergehenden Heftes soll die rationale Endgleichung nicht vom 16ten, sondern vom 22sten Grade sein. Das Räthsel dieses Widerspruchs zu lösen, möchte eine nicht uninteressante Aufgabe bilden.

Danzig, den 5. März 1832.

24.
Aufgaben.

1. Es seien a, c das eine, b und d das andre Paar gegenüberliegender Seiten, und p, q die Diagonalen eines Vierecks, welches einem Kreise eingeschrieben ist, so ist nach dem Ptolemäischen Satze bekanntlich

$$pq = ac + bd.$$

Man soll nun zeigen, dafs umgekehrt, wenn für jene sechs Linien eines Vierecks diese Gleichung Statt findet, um dasselbe ein Kreis beschrieben werden kann. Förstemann zu Danzig.

2. In einen hohlen, unten verschlossenen Cylinder, dessen Halbmesser $= r'$, sei ein massiver Cylinder von dem Halbmesser r bis zur Höhe a versenkt; beider Axen sollen zusammenfallen. Der massive Cylinder drücke mit der Kraft M auf ein in dem hohlen befindliches Fluidum. Welche Relation mufs zwischen M, a und $(r'-r)$ statt haben, damit die Capillar-Attraction dem Hindurchpressen und Ausströmen der Flüssigkeit zwischen den cylindrischen Wänden widersteht?

Data zu einem Beispiele. Das Fluidum sei Öl, beide Cylinder von polirtem Stahl, $a = 24'''$, $r' = 4'''$ Par.-Linien, $M = 70$ Pfund, und die Beobachtung habe gelehrt, dafs zwischen 2 parallelen polirten Stahl-Ebenen, deren Abstand $= 0'''.25$ ist, das Öl sich $11'''.5$ über das Niveau erhebt. v. Steinheil zu München.

Druckfehler im sechsten Bande.

S. 159. Z. 4. l. Maafs der Krümmung.
— 161. — 2. v. u. st. seine l. eine.
— — ist in der mit A) bezeichneten Gleichung auf der linken Seite des Gleichheitszeichens der Nenner: $dx\sqrt{(1+p^2+q^2)}$ hinzuzufügen.

Im siebenten Bande.

— 140. Z. 14. st. I et A l. I et D.
— 141. In dem Kettenbruche für $\sqrt{97}$ st. $2-\frac{1}{6-}$ etc. l. $2+\frac{1}{6-}$ etc.
— 217. Z. 6. v. u. l. $a^2 \cos x^4$ st. $a^2 \cos x^3$.
— 218. — 8. v. o. l. $(-\frac{1}{2}bc\sin y + \frac{1}{2}ac\sin(x+y))$ st. $(-\frac{1}{2}bc\sin y + \frac{1}{2}ac\sin(x+y)$.
— — — 10. v. o. l. $b\sin x \sin y$ st. $b\sin a \sin y$.
— 219. — 3. v. o. l. $+r\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi)$ st. $r\sin(\frac{1}{3}-\varphi)$.
— 221. — 6. v. o. l. $\frac{x}{n-r+1}$ st. $\frac{x}{n+r-1}$.
— — — 8. v. o. l. $[r-(r-2)]$ st. $[r-(r-2)$.
— 222. — 6. v. u. l. $\frac{R}{(x-w)^z}$ st. $\frac{R}{(x-v)^z}$.
— 223. —14. v. o. l. $\frac{P(x-\mu)^u}{Q}$ st. $\frac{P}{Q(x-\mu)^u}$.
— — —17. v. o. l. niedrigere st. niedrigern.

25.

De transformatione integralis duplicis indefiniti $\int \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi}$ in formam simpliciorem $\int \frac{\partial\eta\,\partial\vartheta}{G-G'\cos\eta\cos\vartheta-G''\sin\eta\sin\vartheta}$.

(Cont. dissert. 19. tom. VIII. lib. 3.)

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. Regiom.)

Problema II.

„Proponitur, integrale duplex indefinitum

$$\int \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi}$$

per substitutiones:

$$\cos\Phi = \frac{\beta-\beta'\cos\eta-\beta''\sin\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta} \qquad \cos\psi = \frac{a'-b'\cos\vartheta-c'\sin\vartheta}{a-b\cos\vartheta-c\sin\vartheta}$$

$$\sin\Phi = \frac{\gamma-\gamma'\cos\eta-\gamma''\sin\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta} \qquad \sin\psi = \frac{a''-b''\cos\vartheta-c''\sin\vartheta}{a-b\cos\vartheta-c\sin\vartheta}$$

transformare in hoc simplicius

$$\int \frac{\partial\eta\,\partial\vartheta}{G-G'\cos\eta\cos\vartheta-G''\sin\eta\sin\vartheta}.$$"

16.

In formulis paragraphi 10. in locum quantitatum

$$\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & \gamma & a & a' & a'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & b & b' & b'' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & c & c' & c'' \end{array}$$

ponamus respective:

$$\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & -i\beta & -i\gamma & a & -ia' & -ia'' \\ i\alpha' & \beta' & \gamma' & ib & b' & b'' \\ i\alpha'' & \beta'' & \gamma'' & ic & c' & c'' \end{array}$$

designante i quantitatem imaginariam $\sqrt{-1}$: prodit formularum systema sequens:

43)
$$\begin{array}{l|l} \alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma=1 & aa-a'a'-a''a''=1 \\ \alpha'\alpha'-\beta'\beta'-\gamma'\gamma'=-1 & bb-b'b'-b''b''=-1 \\ \alpha''\alpha''-\beta''\beta''-\gamma''\gamma''=-1 & cc-c'c'-c''c''=-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\alpha'\alpha''-\beta'\beta''-\gamma'\gamma'' = & 0 & bc-b'c'-b''c'' = & 0\\
\alpha''\alpha-\beta''\beta-\gamma''\gamma = & 0 & ca-c'a'-c''a'' = & 0\\
\alpha\alpha'-\beta\beta'-\gamma\gamma' = & 0 & ab-a'b'-a''b'' = & 0\\
\alpha\alpha-\alpha'\alpha'-\alpha''\alpha'' = & 1 & aa-bb-cc = & 1\\
\beta\beta-\beta'\beta'-\beta''\beta'' = & -1 & a'a'-b'b'-c'c' = & -1\\
\gamma\gamma-\gamma'\gamma'-\gamma''\gamma'' = & -1 & a''a''-b''b''-c''c'' = & -1\\
\beta\gamma-\beta'\gamma'-\beta''\gamma'' = & 0 & a'a''-b'b''-c'c'' = & 0\\
\gamma\alpha-\gamma'\alpha'-\gamma''\alpha'' = & 0 & a''a-b''b-c''c = & 0\\
\alpha\beta-\alpha'\beta'-\alpha''\beta'' = & 0 & aa'-bb'-cc' = & 0\\
\beta'\gamma''-\beta''\gamma' = & \alpha & b'c''-b''c' = & a\\
\beta''\gamma-\beta\gamma'' = & -\alpha' & c'a''-c''a' = & -b\\
\beta\gamma'-\beta'\gamma = & -\alpha'' & a'b''-a''b' = & -c\\
\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha' = & -\beta & b''c-bc'' = & -a'\\
\gamma''\alpha-\gamma\alpha'' = & \beta' & c''a-ca'' = & b'\\
\gamma\alpha'-\gamma'\alpha = & \beta'' & a''b-ab'' = & c'\\
\alpha'\beta''-\alpha''\beta' = & -\gamma & bc'-b'c = & -a''\\
\alpha''\beta-\alpha\beta'' = & \gamma' & ca'-c'a = & b''\\
\alpha\beta'-\alpha'\beta = & \gamma'' & ab'-a'b = & c''
\end{array}$$

$$\alpha(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')+\beta(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')+\gamma(\alpha'\beta''-\alpha''\beta') = 1$$
$$a(b'b''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c) = 1.$$

Quae omnes e sex primis utriusque systematis sequuntur.

Ope harum formularum nanciscimur aequationes identicas:

44) $(\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta)^2=(\beta-\beta'\cos\eta-\beta''\sin\eta)^2+(\gamma-\gamma'\cos\eta-\gamma''\sin\eta)^2$
$(a-b\cos\vartheta-c\sin\vartheta)^2=(a'-b'\cos\vartheta-c'\sin\vartheta)^2+(a''-b''\cos\vartheta-c''\sin\vartheta)^2$,

unde simul ponere licet:

45) $$\cos\varphi = \frac{\beta-\beta'\cos\eta-\beta''\sin\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta} \qquad \cos\psi = \frac{a'-b'\cos\vartheta-c'\sin\vartheta}{a-b\cos\vartheta-c\sin\vartheta}$$
$$\sin\varphi = \frac{\gamma-\gamma'\cos\eta-\gamma''\sin\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta} \qquad \sin\psi = \frac{a''-b''\cos\vartheta-c''\sin\vartheta}{a-b\cos\vartheta-c\sin\vartheta}.$$

E quibus nanciscimur per 43):

46) $$\alpha-\beta\cos\varphi-\gamma\sin\varphi = \frac{1}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta} \qquad a-a'\cos\psi-a''\sin\psi = \frac{1}{a-b\cos\vartheta-c\sin\vartheta}$$
$$\alpha'-\beta'\cos\varphi-\gamma'\sin\varphi = \frac{\cos\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta} \qquad b-b'\cos\psi-b''\sin\psi = \frac{1}{a'-b'\cos\vartheta-c'\sin\vartheta}$$
$$\alpha''-\beta''\cos\varphi-\gamma''\sin\varphi = \frac{\sin\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta} \qquad c-c'\cos\psi-c''\sin\psi = \frac{1}{a''-b''\cos\vartheta-c''\sin\vartheta},$$

unde

$$47)\quad \cos\eta = \frac{\alpha' - \beta'\cos\varphi - \gamma'\sin\varphi}{\alpha - \beta\cos\varphi - \gamma\sin\varphi} \qquad \cos\vartheta = \frac{b - b'\cos\psi - b''\sin\psi}{a - a'\cos\psi - a''\sin\psi}$$
$$\sin\eta = \frac{\alpha'' - \beta''\cos\varphi - \gamma''\sin\varphi}{\alpha - \beta\cos\varphi - \gamma\sin\varphi} \qquad \sin\vartheta = \frac{c - c'\cos\psi - c''\sin\psi}{a - a'\cos\psi - a''\sin\psi};$$

quod rursus suppeditat aequationes identicas:

$$48)\quad (\alpha - \beta\cos\varphi - \gamma\sin\varphi)^2 = (\alpha' - \beta'\cos\varphi - \gamma'\sin\varphi)^2 + (\alpha'' - \beta''\cos\varphi - \gamma''\sin\varphi)^2$$
$$(a - a'\cos\psi - a''\sin\psi)^2 = (b - b'\cos\psi - b''\sin\psi)^2 + (c - c'\cos\psi - c''\sin\psi)^2,$$

quae etiam e 43) probantur.

Formulas 45), 47) etiam e formulis 1), 5) primi problematis derivare licuisset, praeter mutationes indicatas posito ibidem:

$$x\,x + y\,y + z\,z = s\,s + s'\,s' + s''\,s'' = 0$$
$$w\,w + w'\,w' + w''\,w'' = t\,t + u\,u + v\,v = 0,$$

atque:

$$\frac{y}{x} = -i\cos\varphi, \quad \frac{z}{x} = -i\sin\varphi \qquad \frac{w'}{w} = -i\cos\psi, \quad \frac{w''}{w} = -i\sin\psi$$
$$\frac{s'}{s} = i\cos\eta, \quad \frac{s''}{s} = i\sin\eta \qquad \frac{u}{t} = i\cos\vartheta, \quad \frac{v}{t} = i\sin\vartheta.$$

Pauca adhuc, quae ad substitutionum propositarum naturam pertinent, adiiciamus, quod in altera fecisse sufficiat.

E formulis 45), advocatis 43), brevitatis causa posito:

$$49)\quad \beta\beta + \gamma\gamma = \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' = \alpha\alpha - 1 = \delta\delta,$$

sequitur:

$$50)\quad \beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi = \frac{\delta\delta - \alpha\alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta}$$
$$\gamma\cos\varphi - \beta\sin\varphi = \frac{\alpha'\sin\eta - \alpha''\cos\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$

unde posito:

$$51)\quad \beta = \delta\cos\varphi' \qquad \alpha' = \delta\cos\eta'$$
$$\gamma = \delta\sin\varphi' \qquad \alpha'' = \delta\sin\eta',$$

aequationes 50) in has abeunt:

$$52)\quad \cos(\varphi' - \varphi) = \frac{\delta - \alpha\cos(\eta - \eta')}{\alpha - \delta\cos(\eta - \eta')}$$
$$\sin(\varphi' - \varphi) = \frac{\sin(\eta - \eta')}{\alpha - \delta\cos(\eta - \eta')},$$

quibus addi possunt, quae facile sequuntur:

$$53)\quad 1 - \cos(\varphi' - \varphi) = (\alpha - \delta)\frac{1 + \cos(\eta - \eta')}{\alpha - \delta\cos(\eta - \eta')}$$
$$1 + \cos(\varphi' - \varphi) = (\alpha + \delta)\frac{1 - \cos(\eta - \eta')}{\alpha - \delta\cos(\eta - \eta')}$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\eta - \eta') = \frac{\alpha - \delta}{\alpha + \delta},$$

quarum postrema anguli η, φ alter ex altero facile computantur; e qua etiam patet, quod in introductione diximus, substitutioni illi formam creari posse:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{m + n\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta}{1 + p\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta}.$$

Ceterum ponere licet:

$$54)\quad \alpha = \sec\zeta,\quad \delta = \operatorname{tang}\zeta,\quad \alpha - \delta = \operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\zeta).$$

E 52) fit:

$$\cos\varphi = \frac{\beta - \alpha\cos\varphi'\cos(\eta-\eta') + \sin\varphi'\sin(\eta-\eta')}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta}$$

$$\sin\varphi = \frac{\gamma - \alpha\sin\varphi'\cos(\eta-\eta') - \cos\varphi'\sin(\eta-\eta')}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$

quibus comparatis cum 45), prodit:

$$55)\quad \begin{aligned} \beta' &= \alpha\cos\varphi'\cos\eta' + \sin\varphi'\sin\eta' \\ \beta'' &= \alpha\cos\varphi'\sin\eta' - \sin\varphi'\cos\eta' \\ \gamma' &= \alpha\sin\varphi'\cos\eta' - \cos\varphi'\sin\eta' \\ \gamma'' &= \alpha\sin\varphi'\sin\eta' + \cos\varphi'\cos\eta', \end{aligned}$$

quae iunctae 51) monstrant, quomodo coëfficientes illae novem substitutionis, qua utimur, per quantitates tres α, φ', η' exprimantur. Observo porro, in ellipsi, cuius excentricitas $= \frac{\delta}{\alpha} = \sin\zeta$, designare posse angulos $\eta - \eta'$ anomaliam excentricam, $\varphi + \pi - \varphi'$ anomaliam veram.

Differentiata prima ex aequationibus 46), obtinemus:

$$(\beta\sin\varphi - \gamma\cos\varphi)\,\partial\varphi = \frac{\alpha''\cos\eta - \alpha'\sin\eta}{(\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta)^2}\cdot\partial\eta$$

$$(\alpha'\sin\psi - \alpha''\cos\psi)\,\partial\psi = \frac{c\cos\vartheta - b\sin\vartheta}{a - b\cos\vartheta - c\sin\vartheta}\cdot\partial\vartheta,$$

unde cum sit:

$$\beta\sin\varphi - \gamma\cos\varphi = \frac{\alpha''\cos\eta - \alpha'\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta}$$

$$\alpha'\sin\psi - \alpha''\cos\psi = \frac{c\cos\vartheta - b\sin\vartheta}{a - b\cos\vartheta - c\sin\vartheta},$$

prodit:

$$56)\quad \partial\varphi = \frac{\partial\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},\quad \partial\psi = \frac{\partial\vartheta}{a - b\cos\vartheta - c\sin\vartheta}.$$

Observo porro, eam esse naturam coëfficientium substitutionum propositarum, ut generaliter valeat

Theorema,

„datis aequationibus:

$$y = \frac{\beta - \beta' s' - \beta'' s''}{\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s''} \qquad w' = \frac{a' - b' u - c' v}{a - b u - c v}$$

$$z = \frac{\gamma - \gamma' s' - \gamma'' s''}{\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s''} \qquad w'' = \frac{a'' - b'' u - c'' v}{a - b u - c v},$$

fieri vice versa:

$$s' = \frac{\alpha' - \beta' y - \gamma' z}{\alpha - \beta y - \gamma z} \quad \Big| \quad u = \frac{b - b' w' - b'' w''}{a - a' w' - a'' w''}$$
$$s'' = \frac{\alpha'' - \beta'' y - \gamma'' z}{\alpha - \beta y - \gamma z} \quad \Big| \quad v = \frac{c - c' w' - c'' w''}{a - a' w' - a'' w''}$$

$$(\alpha - \beta y - \gamma z)\ (\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s'') = 1$$
$$(a - a' w' - a'' w'')(a - b u - c v) = 1,$$

simulque:

$$1 - x x - y y = \frac{1 - s' s' - s'' s''}{(\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s'')^2}, \quad 1 - w' w' - w'' w'' = \frac{1 - u u - v v}{(a - b u - c v)^2};$$

porro fieri, quae sunt inter differentialia partialia relationes memorabiles:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial s'}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s''}\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial s''}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial s'}\right) = \frac{1}{(a - \alpha' s' - \alpha'' s'')^3}$$
$$\left(\frac{\partial w'}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial w''}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial w'}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial w''}{\partial u}\right) = \frac{1}{(a - b u - c v)^3}.$$"

Jam ad eas venimus relationes, quae inter coëfficientes substitutionum propositarum locum habere debent, ut transformatio integralis duplicis indicata succedat.

17.

Quem in finem in formulis paragraphi 11. in locum quantitatum, quae expressionem transformandam afficiunt,

$$A,\ B,\ C,\ A',\ B',\ C',\ A'',\ B'',\ C''$$

ponamus sequentes:

$$A,\ iB,\ iC,\ iA',\ -B',\ -C',\ iA'',\ -B'',\ -C'',$$

in quibus rursus $i = \sqrt{-1}$. Quo facto, ubi etiam, uti indicavimus, loco

$$\alpha',\ \alpha'',\ \beta,\ \gamma;\ b,\ c,\ a',\ a''$$

ponuntur

$$i\alpha',\ i\alpha'',\ -i\beta,\ -i\gamma;\ ib,\ ic,\ -ia',\ -ia'',$$

formulae 12) in has abeunt:

$$\begin{aligned}
37)\quad A &= G\alpha a - G'\alpha' b - G''\alpha'' c \\
-B &= G\beta a - G'\beta' b - G''\beta'' c \\
-C &= G\gamma a - G'\gamma' b - G''\gamma'' c \\
-A' &= G\alpha a' - G'\alpha' b' - G''\alpha'' c' \\
B' &= G\beta a' - G'\beta' b' - G''\beta'' c' \\
C' &= G\gamma a' - G'\gamma' b' - G''\gamma'' c' \\
-A'' &= G\alpha a'' - G'\alpha' b'' - G''\alpha'' c'' \\
B'' &= G\beta a'' - G'\beta' b'' - G''\beta'' c'' \\
C'' &= G\gamma a'' - G'\gamma' b'' - G''\gamma'' c'',
\end{aligned}$$

quibus aequationibus novem iunctis aequationibus duodecim, a quibus formulae 43) pendent, octodecim coëfficientes substitutionum et tres quantitates G, G', G'' determinantur.

Ope aequationum 12), adhibitis formulis 46), prodit aequatio:

$$58)\quad A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi$$
$$=\frac{G-G'\cos\eta\cos\vartheta-G''\sin\eta\sin\vartheta}{(\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta)(a-b\cos\vartheta-c\sin\vartheta)},$$

unde e 56) obtinemus transformationem quaesitam:

$$59)\quad \int\frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi}$$
$$=\int\frac{\partial\eta\,\partial\vartheta}{G-G'\cos\eta\cos\vartheta-G''\sin\eta\sin\vartheta}.$$

Aequationem 58) eadem, quam supra indicavimus, ratione etiam e formula 11) derivare licet.

Occasione data, adnotemus transformationem memorabilem integralis quadruplicis, quae prorsus eodem modo succedit. E theoremate enim paragraphi antecedentis facile probatur sequens

Theorema,

„designantibus quantitatibus α, β etc., G, G', G'' idem, quod in antecedentibus, posito:

$$y=\frac{\beta-\beta's'-\beta''s''}{\alpha-\alpha's'-\alpha''s''}\qquad w'=\frac{a'-b'u+c'v}{a-bu+cv}$$
$$z=\frac{\gamma-\gamma's'-\gamma''s''}{\alpha-\alpha's'-\alpha''s''}\qquad w''=\frac{a''-b''u-c''v}{a-bu-cv},$$

fieri

$$\int\frac{\partial y\,\partial z\,\partial w'\,\partial w''}{(1-y^2-z^2)(1-w'^2-w''^2)[A+By+Cz+(A'+B'y+C'z)w'+(A''+B''y+C''z)w'']}$$
$$=\int\frac{\partial u\,\partial v\,\partial s'\,\partial s''}{(1-s's'-s''s'')(1-uu-vv)[G-G's'u-G''s''v]}.$$"

Quod adnotare sufficiat.

Jam relationes colligamus praecipuas inter quantitates quaesitas et datas, quae e 43) et 47), quibus illae determinantur, sequantur. Quas omnes e problemate antecedente, factis, quas indicavimus, mutationibus, sine calculo desumere licet.

18.

Primum e formulis 13) derivamus sequentes, quibus coëfficientes utriusque substitutionis alterae per alteras, cognitis ipsis G, G', G'', lineariter exprimuntur:

$$
60)\quad
\begin{array}{rl|rl}
G a &= A\alpha + B\beta + C\gamma & G\alpha &= Aa + A'a' + A''a'' \\
-G a' &= A'\alpha + B'\beta + C'\gamma & -G\beta &= Ba + B'a' + B''a'' \\
-G a'' &= A''\alpha + A''\beta + C''\gamma & -G\gamma &= Ca + C'a' + C''a'' \\
G' b &= A\alpha' + B\beta' + C\gamma' & G'\alpha' &= Ab + A'b' + A''b'' \\
-G' b' &= A'\alpha' + B'\beta' + C'\gamma' & -G'\beta' &= Bb + B'b' + B''b'' \\
-G'' b'' &= A''\alpha' + B''\beta' + C''\gamma' & -G'\gamma' &= Cb + C'b' + C''b'' \\
G'' c &= A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' & G''\alpha'' &= Ac + A'c' + A''c'' \\
-G'' c' &= A'\alpha'' + B'\beta'' + C'\gamma'' & -G''\beta'' &= Bc + B'c' + B''c'' \\
-G'' c'' &= A''\alpha'' + B''\beta'' + C''\gamma'' & -G''\gamma'' &= Cc + C'c' + C''c''.
\end{array}
$$

In formulis §. 13. praeter mutationes indicatas loco

$$
\begin{array}{l|l}
l,\quad m,\quad n,\quad l',\quad m',\quad n' & p,\quad p',\quad p'',\quad q,\quad q',\quad q'' \\
\text{ponantur} & \\
l,\quad -m,\quad -n,\quad -l',\quad im',\quad in' & p,\quad -p',\quad -p'',\quad -q,\quad iq',\quad iq'',
\end{array}
$$

unde fit:

$$
61)\quad
\begin{array}{rl|rl}
l &= AA - A'A' - A''A'' & p &= AA - BB - CC \\
m &= BB - B'B' - B''B'' & p' &= A'A' - B'B' - C'C' \\
n &= CC - C'C' - C''C'' & p'' &= A''A'' - B''B'' - C''C'' \\
l' &= BC - B'C' - B''C'' & q &= A'A'' - B'B'' - C'C'' \\
m' &= CA - C'A' - C''A'' & q' &= A''A - B''B - C''C \\
n' &= AB - A'B' - A''B'' & q'' &= AA' - BB' - CC'.
\end{array}
$$

Quibus positis, e formulis 28) obtinemus:

$$
62)\quad
\begin{array}{rl|rl}
GG\alpha &= l\alpha + n'\beta + m'\gamma & GGa &= pa + q''a' + q'a'' \\
-GG\beta &= n'\alpha + m\beta + l'\gamma & -GGa' &= q''a + p'a' + qa'' \\
-GG\gamma &= m'\alpha + l'\beta + n\gamma & -GGa'' &= q'a' + qa' + p''a'' \\
G'G'\alpha' &= l\alpha' + n'\beta' + m'\gamma' & G'G'b &= pb + q''b' + q'b'' \\
-G'G'\beta' &= n'\alpha' + m\beta' + l'\gamma' & -G'G'b' &= q''b + p'b' + qb'' \\
-G'G'\gamma' &= m'\alpha' + l'\beta' + n\gamma' & -G'G'b'' &= q'b + qb' + p''b'' \\
G''G''\alpha'' &= l\alpha'' + n'\beta'' + m'\gamma'' & G''G''c &= pc + q''c' + q'c'' \\
-G''G''\beta'' &= n'\alpha'' + m\beta'' + l'\gamma'' & -G''G''c' &= q''c + p'c' + qc'' \\
-G''G''\gamma'' &= m'\alpha'' + l'\beta'' + n\gamma'' & -G''G''c'' &= q'c + qc' + p''c''.
\end{array}
$$

Formulis 57), 60), 62), quae prae ceteris memoratu dignae sunt, alias varias addere licet, quae ex illis facile sequuntur, vel etiam e problemate antecedente derivari possunt. Quibus apponendis, cum in promtu sit, supersedemus.

Addimus theorema sequens, quod e theoremate §. 13. proposito fluit:

Theorema.

„E qualibet formularum inventarum derivari potest altera ei respondens, si in locum quantitatum

$$\begin{matrix} A, & B, & C, \\ A', & B', & C', \\ A'', & B'', & C'', \\ G, & G', & G'', \end{matrix}$$

substituuntur respective sequentes:

$$\begin{matrix} \frac{B'C''-B''C'}{\Delta}, & -\frac{C'A''-C''A'}{\Delta}, & -\frac{A'B''-A''B'}{\Delta} \\ -\frac{B''C-BC''}{\Delta}, & \frac{C''A-CA''}{\Delta}, & \frac{A''B-AB''}{\Delta} \\ -\frac{BC'-B'C}{\Delta}, & \frac{CA'-C'A}{\Delta}, & \frac{AB'-A'B}{\Delta} \\ \frac{1}{G}, & \frac{1}{G'}, & \frac{1}{G''}; \end{matrix}$$

unde e. g. etiam pro Δ ponendum $\frac{1}{\Delta}$. Quod patet reciprocum esse, id est, ubi illa in haec abeant, simul etiam haec in illa mutari."

Designamus autem rursus per Δ expressionem:

$$\Delta = A(B'C''-B''C') + B(C'A''-C''A') + C(A'B''-A''B'),$$

quae per mutationes indicata immutata manet, unde etiam in hac quaestione:

$$63) \quad \Delta = GG'G''.$$

Ope theorematis propositi e formulis 57), 59), 60), 62) statim alia formularum systemata derivare licet. Ita videmus, posito:

$$\begin{aligned} P = {} & B'C''-B''C'-(C'A''-C''A')\cos\Phi-(A'B''-A''B')\sin\Phi \\ & -[B''C-BC''-(C''A-CA'')\cos\Phi-(A''B-AB'')\sin\Phi]\cos\psi \\ & -[BC'-B'C-(CA'-C'A)\cos\Phi-(AB'-A'B)\sin\Phi]\sin\psi, \end{aligned}$$

sequi e 59) hanc:

$$64) \quad \int\frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{P} = \int\frac{\partial\eta\,\partial\vartheta}{G'G''-G''G\cos\eta\cos\vartheta-GG'\sin\eta\sin\vartheta}.$$

Simili modo per theorema idem e theoremate paragraphi antecedentis alterius integralis quadruplicis transformationem obtinemus. Jam ipsos incognitarum valores adstruamus.

19.

E formulis §. 14. sequitur, GG, $G'G'$, $G''G''$ esse radices diversas aequationis cubicae sequentis:

$$65)\quad x^3 - x^2[AA - BB - CC - A'A' + B'B' + C'C' - A''A'' + B''B'' + C''C'']$$
$$+ x\begin{Bmatrix}(B'C'' - B''C')^2 - (C'A'' - C''A')^2 - (A'B'' - A''B')^2\\ -(B''C - BC'')^2 + (C''A - CA'')^2 + (A''B - AB'')^2\\ -(BC' - B'C)^2 + (CA' - C'A)^2 + (AB' - A'B)^2\end{Bmatrix}$$
$$- [A(B'C'' - B''C'') + B(C'A'' - C''A')^2 + C(A'B'' - A''B'')]^2 = 0,$$

quam etiam his binis modis repraesentare licet:

$$66)\quad (x-l)(x+m)(x+n) - l'l'(x-l) + m'm'(x+m) + n'n'(x+n) - 2l'm'n' = 0$$
$$(x-p)(x+p')(x+p'') - qq(x-p) + q'q'(x+p') + q''q''(x+p'') - 2qq'q'' = 0.$$

Inventis GG, $G'G'$, $G''G''$, nancisceris quadrata coëfficientium substitutionum quaesitarum per formulas sequentes:

$$67)\quad \alpha\alpha = \frac{(GG+m)(GG+n) - l'l'}{(GG - G'G')(GG - G''G'')} \qquad a\,a = \frac{(GG+p')(GG+p'') - qq}{(GG - G'G')(GG - G''G'')}$$
$$-\alpha'\alpha' = \frac{(G'G'+m)(G'G'+n) - l'l'}{(G'G' - G''G'')(G'G' - GG)} \qquad -b\,b = \frac{(G'G'+p')(G'G'+p'') - qq}{(G'G' - G''G'')(G'G' - GG)}$$
$$-\alpha''\alpha'' = \frac{(G''G''+m)(G''G''+n) - l'l'}{(G''G'' - GG)(G''G'' - G'G')} \qquad -c\,c = \frac{(G''G''+p')(G''G''+p'') - qq}{(G''G'' - GG)(G''G'' - G'G')}$$
$$-\beta\beta = \frac{(GG+n)(GG-l) + m'm'}{(GG - G'G')(GG - G''G'')} \qquad -a'a' = \frac{(GG+p'')(GG-p) + q'q'}{(GG - G'G')(GG - G''G'')}$$
$$\beta'\beta' = \frac{(G'G'+n)(G'G'-l) + m'm'}{(G'G' - G''G'')(G'G' - GG)} \qquad b'b' = \frac{(G'G'+p'')(G'G'-p) + q'q'}{(G'G' - G''G'')(G'G' - GG)}$$
$$\beta''\beta'' = \frac{(G''G''+n)(G''G''-l) + m'm'}{(G''G'' - GG)(G''G'' - G'G')} \qquad c'c' = \frac{(G''G''+p'')(G''G''-p) + q'q'}{(G''G'' - GG)(G''G'' - G'G')}$$
$$-\gamma\gamma = \frac{(GG-l)(GG+m) + n'n'}{(GG - G'G')(GG - G''G'')} \qquad -a''a'' = \frac{(GG-p)(GG+p') + q''q''}{(GG - G'G')(GG - G''G'')}$$
$$\gamma'\gamma' = \frac{(G'G'-l)(G'G'+m) + n'n'}{(G'G' - G''G'')(G'G' - GG)} \qquad b''b'' = \frac{(G'G'-p)(G'G'+p') + q''q''}{(G'G' - G''G'')(G'G' - GG)}$$
$$\gamma''\gamma'' = \frac{(G''G''-l)(G''G''+m) + n'n'}{(G''G'' - GG)(G''G'' - G'G')} \qquad c''c'' = \frac{(G''G''-p)(G''G''+p') + q''q''}{(G''G'' - GG)(G''G'' - G'G')}.$$

Producta porro sequentia, cognitis ipsis GG, $G'G'$, $G''G''$ rationaliter eruuntur:

$$68)\quad \beta\gamma = \frac{l'(GG-l) + m'n'}{(GG - G'G')(GG - G''G'')} \qquad a'a'' = \frac{q(GG-p) + q'q''}{(GG - G'G')(GG - G''G'')}$$
$$-\beta'\gamma' = \frac{l'(G'G'-l) + m'n'}{(G'G' - G''G'')(G'G' - GG)} \qquad -b'b'' = \frac{q(G'G'-p) + q'q''}{(G'G' - G''G'')(G'G' - GG)}$$
$$-\beta''\gamma'' = \frac{l'(G''G''-l) + m'n'}{(G''G'' - GG)(G''G'' - G'G')} \qquad -c'c'' = \frac{q(G''G''-p) + q'q''}{(G''G'' - GG)(G''G'' - G'G')}$$
$$-\gamma\alpha = \frac{m'(GG+m) - n'l'}{(GG - G'G')(GG - G''G'')} \qquad -a''a = \frac{q'(GG+p') - q''q}{(GG - G'G')(GG - G''G'')}$$

$$\gamma'\alpha' = \frac{m'(G'G'+m)-n'l'}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)} \qquad b''b = \frac{q'(G'G'+p')-q''q}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)}$$

$$\gamma''\alpha'' = \frac{m'(G''G''+m)-n'l'}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')} \qquad c''c = \frac{q'(G''G''+p')-q''q}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')}$$

$$-\alpha\beta = \frac{n'(GG+n)-l'm'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')} \qquad -aa' = \frac{q''(GG+p'')-qq'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')}$$

$$\alpha'\beta' = \frac{n'(G'G'+n)-l'm'}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)} \qquad bb' = \frac{q''(G'G'+p'')-qq'}{(G'G'-G''G'')(G'G'-GG)}$$

$$-\alpha''\beta'' = \frac{n'(G''G''+n)-l'm'}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')} \qquad cc' = \frac{q''(G''G''+p'')-qq'}{(G''G''-GG)(G''G''-G'G')}.$$

In locum formularum 67) etiam has substituere possumus:

$$69) \quad \alpha\alpha = \frac{(l-G'G')(l-G''G'')-m'm'-n'n'}{(GG-G'G')(GG-G''G'')}$$

etc. etc. etc.

E 67) ipsae coëfficientes quaesitae per extractionem radicis quadraticae proveniunt; signa ipsarum α, α', a, b pro arbitrio assumi possunt, quibus deinde reliquarum signa determinantur per 68), advocatis aequationibus:

$$\alpha(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')+\beta(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')+\gamma(\alpha'\beta''-\alpha''\beta') = 1$$
$$a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c) = 1.$$

Cognitis coëfficientibus substitutionum, ipsae G, G', G'' rationaliter exprimuntur ope formularum 60), unde de signis ipsarum G, G', G'' nihil arbitrarii restat. Quarum insuper una e reliquis determinatur per aequationem: $GG'G'' = \Delta$.

20.

Allatis, quae problematis propositi resolutionem completam concernunt, adiungimus, quae sequuntur.

E formulis 45), 60) facile fluunt sequentes:

$$70) \quad A+B\cos\varphi+C\sin\varphi = \frac{Ga-G'b\cos\eta-G''c\sin\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta}$$

$$A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi = -\frac{Ga'-G'b'\cos\eta-G''c'\sin\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta}$$

$$A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi = -\frac{Ga''-G'b''\cos\eta-G''c''\sin\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta}$$

$$A+A'\cos\psi+A''\sin\psi = \frac{G\alpha-G'\alpha'\cos\vartheta-G''\alpha''\sin\vartheta}{a-b\cos\vartheta-c\sin\vartheta}$$

$$B+B'\cos\psi+B''\sin\psi = -\frac{G\beta-G'\beta'\cos\vartheta-G''\beta''\sin\vartheta}{a-b\cos\vartheta-c\sin\vartheta}$$

$$C+C'\cos\psi+C''\sin\psi = -\frac{G\gamma-G'\gamma'\cos\vartheta-G''\gamma''\sin\vartheta}{a-b\cos\vartheta-c\sin\vartheta},$$

unde e 43):

71) $(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^2-(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)^2-(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)^2$
$$=\frac{GG-G'G'\cos^2\eta-G''G''\sin^2\eta}{(\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta)^2},$$
$$(A+A'\cos\psi+A''\sin\psi)^2-(B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)^2-(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)^2$$
$$=\frac{GG-G'G'\cos^2\vartheta-G''G''\sin^2\vartheta}{(a-b\cos\vartheta-c\sin\vartheta)}.$$

Quae formulae, cum sit

$$\partial\varphi=\frac{\partial\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta},\quad \partial\psi=\frac{\partial\vartheta}{a-b\cos\vartheta-c\sin\vartheta},$$

has suppeditant:

72) $$\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{[(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^2-(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)^2-(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)^2]}}$$
$$=\int\frac{\partial\eta}{\sqrt{(GG-G'G'\cos^2\eta-G''G''\sin^2\eta)}}$$
$$\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{[(A+A'\cos\psi+A''\sin\psi)^2-(B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)^2-(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)^2]}}$$
$$=\int\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{(GG-G'G'\cos^2\vartheta-G''G''\sin^2\vartheta}},$$

quae integralia etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(l+m\cos^2\varphi+n\sin^2\varphi+2l'\cos\varphi\sin\varphi+2m'\sin\varphi+2n'\cos\varphi)}},$$
$$\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(p+p'\cos^2\psi+p''\sin^2\psi+2q\cos\psi\sin\psi+2q'\sin\psi+2q''\cos\psi)}}.$$

Utraque videmus per 72) in eiusdem formae integralia transformari, quae nonnisi limitibus inter se differe possunt.

His addimus considerationes sequentes, quibus theorematum inventorum insignem confirmationem nanciscimur.

Sit brevitatis causa:

$$R=A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi$$
$$=A+A'\cos\psi+A''\sin\psi+(B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)\cos\varphi+(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)\sin\varphi;$$

proposita aequatione

$$R=0,$$

eruitur:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial\varphi}\right)=-(B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)\sin\varphi+(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)\cos\varphi$$
$$=\sqrt{[(B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)^2+(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)^2-(A+A'\cos\psi+A''\sin\psi)^2]}$$
$$\left(\frac{\partial R}{\partial\psi}\right)=-(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\sin\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\cos\psi$$
$$=\sqrt{[(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)^2+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)^2-(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^2]}.$$

Differentiata autem aequatione $R = 0$, prodit

$$\frac{\partial\varphi}{\left(\frac{\partial R}{\partial\psi}\right)} + \frac{\partial\psi}{\left(\frac{\partial R}{\partial\varphi}\right)} = 0,$$

sive ex antecedentibus:

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\sqrt{[(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)^2+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)^2-(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^2]}}$$
$$+\frac{\partial\psi}{\sqrt{[(B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)^2+(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)^2-(A+A'\cos\psi+A''\sin\psi)^2]}}.$$

Cuius aequationis differentialis integrale est aequatio, e cuius illa differentiatione nata est, $R = 0$, et facile patet, integrale esse completum.

Eodem modo, proposita aequatione:

$$G - G'\cos\eta\cos\vartheta - G''\sin\eta\sin\vartheta = 0,$$

fit differentiando:

$$\frac{\partial\eta}{G'\cos\eta\sin\vartheta - G''\sin\eta\cos\vartheta} + \frac{\partial\vartheta}{G'\sin\eta\cos\vartheta - G''\cos\eta\sin\vartheta} = 0;$$

ex aequatione autem proposita sequitur:

$$G'\cos\eta\sin\vartheta - G''\sin\eta\cos\vartheta = \sqrt{(G'G'\cos^2\eta + G''G''\sin^2\eta - GG)}$$
$$G'\sin\eta\cos\vartheta - G''\cos\eta\sin\vartheta = \sqrt{(G'G'\cos^2\eta + G''G''\sin^2\eta - GG)},$$

unde aequatio differentialis fit:

$$\frac{\partial\eta}{\sqrt{(G'G'\cos^2\eta + G''G''\sin^2\eta - GG)}} + \frac{\partial\vartheta}{\sqrt{(G'G'\cos^2\vartheta + G''G''\sin^2\vartheta - GG)}} = 0,$$

cuius igitur integrale est:

$$G - G'\cos\eta\cos\vartheta - G''\sin\eta\sin\vartheta = 0,$$

et facile probatur integrale completum esse. Jam quoties per certas quasdam substitutiones aequatio differentialis proposita in alteram abit, per easdem etiam integralia earum completa in se invicem abire debent, et vice versa. Videmus autem per 72), aequationes illas differentiales, adhibitis substitutionibus nostris, in se invicem abire; per easdem igitur aequatio $R = 0$ in hanc mutari debet:

$$G - G'\cos\eta\cos\vartheta - G''\sin\eta\sin\vartheta = 0,$$

quod e 58) fieri patet.

Alterum, quod adnotare placet, hoc est. E formula 53):

$$\tang\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi)\tang\tfrac{1}{2}(\eta-\eta') = \alpha - \delta,$$

sequitur, angulos $\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)$, $\frac{1}{2}(\eta-\eta')$ eodem semper tempore crescere vel decrescere, atque utrumque simul quantitate π augeri, ideoque ipsos φ, η simul quantitate 2π augeri. Idem de angulis ψ, ϑ valet. Hinc fit e 59):

$$73)\quad \int\partial\varphi\int_{\psi}^{\psi+2\pi}\frac{\partial\psi}{R}=\int\partial\eta\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi}\frac{\partial\vartheta}{G-G'\cos\eta\cos\vartheta-G''\sin\eta\sin\vartheta}$$
$$\int\partial\psi\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi}\frac{\partial\varphi}{R}=\int\partial\vartheta\int_{\eta}^{\eta+2\pi}\frac{\partial\eta}{G-G'\cos\eta\cos\vartheta-G''\sin\eta\sin\vartheta}.$$

E notis autem calculi integralis praeceptis fit:

$$74)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{\psi}^{\psi+2\pi}\frac{\partial\psi}{R}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{[(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^2-(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)^2-(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)^2]}}$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi}\frac{\partial\varphi}{R}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{[(A+A'\cos\psi+A''\sin\psi)^2-(B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)^2-(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)^2]}},$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi}\frac{\partial\vartheta}{G-G'\cos\vartheta\cos\eta-G''\sin\eta\sin\vartheta}=\frac{1}{\sqrt{(GG-G'G'\cos^2\eta-G''G''\sin^2\eta)}}$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{\eta+2\pi}\frac{\partial\eta}{G-G'\cos\eta\cos\vartheta-G''\sin\eta\sin\vartheta}=\frac{1}{\sqrt{(GG-G'G'\cos^2\vartheta-G''G''\sin^2\vartheta)}}.$$

Quibus substitutis in 73) formulae 72) proveniunt, quas igitur ambas via maxime directa de unica 59) decurrere videmus.

Ut integrale duplex propositum respectu utriusque anguli φ, ψ per totam peripheriam extendi possit, expressio R pro nullo valore reali ipsorum φ, ψ evanescere debet, quo casu substitutiones nostras semper reales fieri, a priori in introductione comprobatum est.

Per transformationem binorum integralium simplicium, quam formulae 72) suppeditant, substitutiones propositae omnino determinatae sunt, unde transformatio integralis duplicis ad illorum transformationem revocatur, quod est problema notum.

Quemadmodum per theorema §i 18. de transformatione integralis duplicis propositi alterius integralis duplicis transformationem deduximus, ita etiam de formulis 72) binorum aliorum integralium simplicium transformationem derivare licet, quam in introductione adstruximus.

Eadem ratione, qua formulae 72) demonstrantur, comprobatur sequens

Theorema.

„Posito

$$y=\frac{\beta-\beta's'-\beta''s''}{\alpha-\alpha's'-\alpha''s''}\qquad w'=\frac{a'-b'u-c'v}{a-bu-cv}$$
$$z=\frac{\gamma-\gamma's'-\gamma''s''}{\alpha-\alpha's'-\alpha''s''}\qquad w''=\frac{a''-b''u-c''v}{a-bu-cv}$$

designantibus coëfficientibus α, β etc. idem atque in antecedentibus, fit:

$$\int \frac{\partial y\,\partial z}{\sqrt{(1-y^2-z^2)[(A+By+Cz)^2-(A'+B'y+C'z)^2-(A''+B''y+C''z)^2]}}$$
$$= \int \frac{\partial s'\,\partial s''}{\sqrt{(1-s's'-s''s'')[GG-G'G's's'-G''G''s''s'']}}$$
$$\int \frac{\partial w'\,\partial w''}{\sqrt{(1-w'w'-w''w'')[(A+A'w'+A''w'')^2-(B+B'w'+B''w'')^2-(C+C'w'+C''w'')^2]}}$$
$$= \int \frac{\partial u\,\partial v}{\sqrt{(1-uu-vv)[GG-G'G'uu-G''G''vv]}},$$

quae integralia duplicia, adhibitis 61), etiam hunc in modum exhibere licet:

$$\int \frac{\partial y\,\partial z}{\sqrt{(1-yy-zz)[l+myy+nzz+2l'yz+2m'z+2n'y]}},$$
$$\int \frac{\partial w'\,\partial w''}{\sqrt{(1-w'w'-w''w'')[p+p'w'w'+p''w''w''+2qw'w''+2q'w''+2q''w']}}.$$

Utraque videmus, uti integralia 72), in eiusdem omnino formae integralia transformari, quae non nisi limitibus inter se differre possunt."

Per theorema §i 18. ex hoc theoremate duorum aliorum integralium duplicium transformationem derivare licet, quibus adscribendis supersedemus.

Dedimus antecedentibus solutionem problematis propositi completam; simul demonstravimus, eandem analysin, qua ad solutionem illam usi sumus, problemata maxime diversa amplecti, duorum integralium quadruplicium, sex integralium duplicium, quatuor integralium simplicium transformationem.

His alias paucas annectimus observationes, quae cum maxime ad quaestiones cognatas pertineant, et has nostras quaestiones aliquantulum illustrare credimus.

21.

Quaestiones antecedentes solutionem completam continent problematis, ad quod adeo problema propositum revocatur, integrale

$$\int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(l+m\cos^2\varphi+n\sin^2\varphi+2l'\cos\varphi\sin\varphi+2m'\sin\varphi+2n'\cos\varphi)}}$$

per substitutiones

$$\cos\Phi = \frac{\beta-\beta'\cos\eta-\beta''\sin\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta}$$
$$\sin\Phi = \frac{\gamma-\gamma'\cos\eta-\gamma''\sin\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta}$$

transformare in hoc simplicius

$$\int \frac{\partial \eta}{\sqrt{(L - M\cos^2\eta - N\sin^2\eta)}};$$

inveniuntur enim L, M, N ut radices aequationis cubicae 66); quibus inventis e 67), 68) coëfficientes substitutionis adhibitae determinantur.

Observare convenit, per substitutionem eiusdem formae integrale illud etiam in hanc formam transformari posse:

$$\int \frac{\partial \eta}{\sqrt{(L - M\cos\eta)}},$$

quod quibusdam casibus non sine usu fit. Transformationem illam, in introductione probavimus, realem in modum succedere, quoties expressio sub radicali

$$l + m\cos^2\varphi + n\sin^2\varphi + 2l'\cos\varphi\sin\varphi + 2m'\sin\varphi + 2n'\cos\varphi$$

aut pro nullo valore reali aut pro quatuor valoribus realibus anguli φ evanescat. Hanc autem transformationem realem in modum succedere, probatur, quoties expressio illa aut pro nullo aut pro duobus tantum valoribus realibus anguli evanescat.

22.

Porro vidimus antecedentibus, transformationem illam convenire cum problemate geometrico de axibus principalibus superficiei secundi ordinis investigandis. Quo utriusque problematis consensu fit quidem, ut utrique idem sit calculi decursus, eadem, levi mutatione facta, expressionum analyticarum, quibus incognitae exhibentur, formatio; quae tamen ea est mutatio, ut nullo modo valores numerici incognitarum alterius problematis ex altero desumi possint, cum adeo, quae in altero reales sunt quantitates, in altero imaginariae existant. Aliud autem exstat problema geometricum, quod analytice tractatum cum illo ita convenit, ut nulla omnino mutatione facta, eadem analysis, eaedem formulae utrumque absolvant, iidem incognitarum valores prodeant. Quod problema, e perspectiva sive proiectione centrali petitum, hoc est:

„datis in eodem plano duabus sectionibus conicis, de-
„terminare situm oculi (centri proiectionis) et tabulae
„(plani, in quod proiicitur), ut sectiones conicae pro-
„iectae fiant concentricae atque insuper altera circulus."

Simili modo alteri problemati de transformando integrali proposito in formam

$$\int \frac{\partial \eta}{\sqrt{(L - M\cos\eta)}}$$

respondet problema geometricum hoc:

„datis in eodem plano duabus sectionibus conicis, determinare situm oculi et tabulae, ut utraque proiecta fiat „circulus."

Quorum problematum solutionem geometricam apud Cl. Poncelet, virum mirifice in quaestionibus geometricis versatum, videre licet in opere celeberrimo „*De proprietatibus figurarum, quae figuris proiectis manent.*"

Problemata autem illa geometrica cum nostris convenire, facile hunc in modum patet.

Sint y, z coordinatae puncti in plano figurae propositae, s', s'' coordinatae puncti proiecti in plano tabulae, facile probatur, inter utrasque coordinatas obtinere relationes sequentis formae:

$$y = \frac{\beta - \beta' s' - \beta'' s''}{\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s''}$$

$$z = \frac{\gamma - \gamma' s' - \gamma'' s''}{\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s''};$$

quarum coëfficientes a situ oculi et tabulae pendent. Ponamus, in plano ipsarum y, z datum esse circulum, cuius aequatio sit

$$1 - yy - zz = 0,$$

simulque sectionem conicam, cuius aequatio:

$$l + myy + nzz + 2l'yz + 2m'z + 2n'y = 0.$$

Quibus in aequationibus substitutis valoribus ipsarum y, z, quos apposuimus, prodeunt aequationes sectionum conicarum, in quas datae proiiciuntur. Sint coëfficientes α, β etc. eaedem, quas in quaestionibus antecedentibus determinavimus, fit:

$$1 - yy - zz = \frac{1 - s's' - s''s''}{(\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s'')^2},$$

$$l + myy + nzz + 2l'yz + 2m'z + 2n'y = \frac{GG - G'G's's' - G''G''s''s''}{(\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s'')^2},$$

unde figurae proiectae aequationibus definiuntur:

$$1 - s's' - s''s'' = 0, \quad GG - G'G's's' - G''G''s''s'' = 0,$$

quae sunt aequationes circuli et sectionis conicae ei concentricae, ad axes principales sectionis conicae relatae.

Sint rursus coëfficientes substitutionis α, β etc. ita determinatae, ut fiat

$$1 - yy - zz = \frac{1 - s's' - s''s''}{(\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s'')^2},$$

ideoque, ut antea, circulus proiectus renascatur circulus; iam vero ponamus, etiam alterius sectionis conicae proiectionem circulum fieri; cuius ae-

quatio, siquidem axis ipsarum s' per utriusque circuli centrum ponitur forma gaudebit:

$$P - Q(s'+a)^2 - Qs''s'' = 0,$$

unde obtineri debet aequatio:

$$l + myy + nzz + 2l'yz + 2m'z + 2n'y = \frac{P - Q(s'+a)^2 - Qs''s''}{(\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s'')^2}.$$

Iam quia $1 - yy - zz$, $1 - s's' - s''s''$ simul evanescunt, ubi ponitur $y = \cos\varphi$, $z = \sin\varphi$, simul ponere licet, $s' = \cos\eta$, $s'' = \sin\eta$, unde aequatio proposita in hanc abit:

$$l + m\cos^2\varphi + n\sin^2\varphi + 2l'\cos\varphi\sin\varphi + 2m'\sin\varphi + 2n'\cos\varphi = \frac{L - M\cos\eta}{(\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta)^2},$$

siquidem:

$$P - Q(1 + aa) = L, \quad 2Qa = M.$$

Hinc, cum ex aequationibus, in quas substitutiones propositae abeunt:

$$\cos\varphi = \frac{\beta - \beta'\cos\eta - \beta''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta}$$

$$\sin\varphi = \frac{\gamma - \gamma'\cos\eta - \gamma''\sin\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$

sequatur

$$\partial\varphi = \frac{\partial\eta}{\alpha - \alpha'\cos\eta - \alpha''\sin\eta},$$

obtinemus:

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(l + m\cos^2\varphi + n\sin^2\varphi + 2l'\cos\varphi\sin\varphi + 2m'\sin\varphi + 2n'\cos\varphi)}} = \int \frac{\partial\eta}{\sqrt{(L - M\cos\eta)}},$$

quae igitur transformatio et ipsa e solutione problematis geometrici statim provenit.

Neque consensus ille quaestionis geometricae et analyticae tam singularis videri debet. Nam cum certis quibusdam configurationibus certae expressiones analyticae respondeant, ubi per proiectionem sive aliud quodlibet instrumentum geometricum configurationem datam ad simpliciorem vel magis regularem revocas, simul expressiones analyticas, quibus configuratio continetur, per substitutiones idoneas, quae instrumenti geometrici locum tenent, in simpliciores transformatas habere debes. E qua observatione haud raro ab elementis geometricis ad graviores quaestiones analyticas transitum petere licet, qualem antecedentibus indigitavimus. Ita universas de proiectione centrali quaestiones, quales Cl. Poncelet in opere laudato instituit, adhibere poteris ad transformationem functionum duarum variabilium y, z, quae per substitutiones

$$y = \frac{\beta - \beta' s' - \beta'' s''}{\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s''}, \quad z = \frac{\gamma - \gamma' s' - \gamma'' s''}{\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s''}$$

obtineri possit. Nec non vice versa eiusmodi transformationem, uti vidimus, ad quaestionem geometricam transferre licet.

Quod cum nec usu nec elegantia careat, generaliter coëfficientium substitutionum significationem geometricam, qua in proiectione centrali gaudent, quam breviter licet, exponamus. Unde singulis casibus sine negotio constructiones geometricas, quae calculo respondent, eruis, sicuti in altero problemate geometrico exempli causa monstrabimus, quod via analytica construendi, negotium inextricabile videbatur. (Cf. Poncelet *Traité des propriétés projectives etc. pag.* 60. *notam.*)

Theoria analytica generalis projectionis centralis.

23.

Sint igitur, ut supra, y, z coordinatae puncti in plano figurae propositae, s', s'' coordinatae puncti proiecti in plano tabulae; datis aequationibus, quae inter utriusque puncti coordinatas obtinent:

$$y = \frac{\beta - \beta' s' - \beta'' s''}{\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s''}, \quad z = \frac{\gamma - \gamma' s' - \gamma'' s''}{\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s''},$$

determinandi sunt per coëfficientes α, β etc. 1) situs tabulae, 2) situs centri proiectionis s. oculi, 3) situs axium coordinatarum in plano tabulae. Situm tabulae determinabimus per intersectionem eius cum plano figurae et angulum inclinationis utriusque plani. Oculum determinabimus per intersectionem plani figurae cum plano tabulae parallelo, quod ex oculo ducitur, per punctum, quo perpendicularis ex oculo in hanc lineam ducta ei obvenit, et per ipsam hanc perpendicularem. Axes coordinatarum in plano tabulae determinabuntur per puncta et angulos, quibus illae intersectioni tabulae et plani figurae occurrunt.

Aequationes inter coordinatas puncti propositi et proiecti cum immutatae maneant, coëfficientibus α, β etc. omnibus in constantem arbitrariam ductis, statuere placet:

$$\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \beta(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') = 1;$$

sit porro brevitatis causa:

$$\begin{array}{lll} \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = a, & \beta''\gamma - \beta\gamma'' = -a', & \beta\gamma' - \beta'\gamma = -a'' \\ \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha' = -b, & \gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = b', & \gamma\alpha' - \gamma'\alpha = b'' \\ \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = -c, & \alpha''\beta - \alpha\beta'' = c', & \alpha\beta' - \alpha'\beta = c'', \end{array}$$

unde vice versa etiam:

$$b'c''-b''c' = \alpha, \quad b''c-bc'' = -\alpha', \quad bc'-b'c = -\alpha''$$
$$c'a''-c''a' = -\beta, \quad c''a-ca'' = \beta', \quad ca'-c'a = \beta''$$
$$a'b''-a''b' = -\gamma, \quad a''b-ab'' = \gamma', \quad ab'-a'b = \gamma''$$
$$a(b'c''-b''c')+b(c'a''-c''a')+c(a'b''-a''b') = 1.$$

Quibus statutis, ex aequationibus

$$y = \frac{\beta-\beta's'-\beta''s''}{\alpha-\alpha's'-\alpha''s''}, \quad z = \frac{\gamma-\gamma's'-\gamma''s''}{\alpha-\alpha's'-\alpha''s''}$$

sequitur:

$$a-by-cz = \frac{1}{\alpha-\alpha's'-\alpha''s''}$$
$$a'-b'y-c'z = \frac{s'}{\alpha-\alpha's'-\alpha''s''}$$
$$a''-b''y-c''z = \frac{s''}{\alpha-\alpha's'-\alpha''s''},$$

ideoque vice versa:

$$s' = \frac{a'-b'y-c'z}{a-by-cz}, \quad s'' = \frac{a''-b''y-c''z}{a-by-cz}.$$

Construatur in plano figurae triangulum $AA'A''$, cuius latera $A'A''$, $A''A$, AA' dantur per aequationes:

$$a-by-cz = 0, \quad a'-b'y-c'z = 0, \quad \alpha''-b''y-c''z = 0,$$

unde inveniuntur coordinatae

ipsius A .... $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$

ipsius A' .... $\frac{\beta'}{\alpha'}$, $\frac{\gamma'}{\alpha'}$

ipsius A'' .... $\frac{\beta''}{\alpha''}$, $\frac{\gamma''}{\alpha''}$.

Facile patet, axes ipsarum s', s'' esse proiectiones linearum AA', AA'', ideoque initium coordinatarum in plano tabulae esse proiectionem puncti A. Porro, lineam $A'A''$ proiectam in infinitum abire, sive designante O centrum projectionis, planum $OA'A''$ esse tabulae parallelum.

Hinc sequitur, axes coordinatarum s', s'' lineis OA', OA'' parallelas esse, ideoque, ubi illas orthogonales statuimus, angulum $A'OA''$ esse rectum, sive oculum in sphaera positum esse, cuius diameter $A'A''$.

Contemplemur intersectionem communem plani tabulae et figurae propositae. Quae cum sit lineae $A'A''$ parallela, aequatione exhibetur formae:

$$a-by-cz = d.$$

Quae aequatio, substitutis ipsarum y, z valoribus, in hanc abit:

$$d(\alpha - \alpha' s' - \alpha'' s'') = 1,$$

quae est aequatio eiusdem lineae, in plano tabulae ad axes coordinatarum s', s'' relatae. Sint B', B'' puncta, quibus haec linea axibus coordinatarum s', s'' occurrit, sit porro P initium coordinatarum s', s'', fit:

$$PB' = \frac{\alpha d - 1}{d\alpha'}, \quad PB'' = \frac{\alpha d - 1}{d\alpha''}, \quad \frac{PB'}{PB''} = \frac{\alpha''}{\alpha'},$$

unde etiam, cum triangula OAA', PBB' similia sint:

$$\frac{OA'}{OA''} = \frac{\alpha''}{\alpha'}.$$

A puncto O ducatur perpendicularis OA''' in lineam $A'A''$, fit:

$$A'A''' : A''A''' = OA'^2 : OA''^2 = \alpha''\alpha'' : \alpha'\alpha',$$

unde cum coordinatae ipsorum A', A'' sint

$$\frac{\beta'}{\alpha'}, \quad \frac{\gamma'}{\alpha'}; \quad \frac{\beta''}{\alpha''}, \quad \frac{\gamma''}{\alpha''},$$

prodeunt puncti A''' coordinatae:

$$\frac{\alpha'\beta' + \alpha''\beta''}{\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha''}, \quad \frac{\alpha'\gamma' + \alpha''\beta''}{\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha''}.$$

Porro nanciscimur:

$$A'A'' = \frac{\sqrt{(bb+cc)}}{\alpha'\alpha''}, \quad OA''' = \frac{\sqrt{(bb+cc)}}{\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha''}.$$

Determinatis puncto A''' et linea OA''', iam videmus, oculum O in peripheria circuli situm esse, cuius centrum A''', radius OA''', planum lineae $A'A''$ perpendiculare.

Puncta B', B'' in plano figurae propositae etiam considerari possunt ut intersectiones lineae $B'B''$ cum lineis AA', AA''; unde inveniuntur in plano figurae propositae coordinatae

$$\text{ipsius } B' \ldots\ \frac{\beta' - c''d}{\alpha'}, \quad \frac{\gamma' + b''d}{\alpha'}$$

$$\text{ipsius } B'' \ldots\ \frac{\beta'' + c'd}{\alpha''}, \quad \frac{\gamma'' - b'd}{\alpha''},$$

unde, cum sit: $\alpha' c' + \alpha'' c'' = \alpha c, \quad \alpha' b' + \alpha'' b'' = \alpha b,$

fit:

$$B'B'' = \sqrt{(bb+cc)} \cdot \frac{\alpha d - 1}{\alpha'\alpha''}.$$

Alia autem via invenitur:

$$B'B'' = \sqrt{(PB'^2 + PB''^2)} = \frac{\alpha d - 1}{d\alpha'\alpha''}\sqrt{(\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'')},$$

quibus valoribus inter se comparatis, obtinemus:

$$d = \sqrt{\left(\frac{\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha''}{bb+cc}\right)}.$$

Inventa d, linea $B'B''$ sive intersectio tabulae et plani figurae propositae omnino determinata est. Unde iam omnia, quae proposita erant, determinata sunt praeter angulum inclinationis tabulae et plani figurae propositae. Observo autem, per coordinatas punctorum A, A', A'', quae sunt quantitates sex, per punctum A''' in linea $A'A''$ positum, cuius determinatio quantitatem septimam requirit, atque per distantiam OA''' oculi a linea $A'A''$, quantitates novem α, β, etc., inter quas iam aequatio, quae arbitraria erat, statuta est:

$$\alpha(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')+\beta(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')+\gamma(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')=1,$$

prorsus determinatas esse. Unde angulus inclinationis tabulae et plani figurae propositae arbitrarius manet, quippe a quo coëfficientes α, β etc. non pendent. Quod etiam facili consideratione geometrica patet. Hinc simul sequitur, ex ipsa natura projectionis situm oculi absolute determinatum non esse; sed locum eius fore peripheriam circuli, cuius centrum in linea $A'A''$ positum et cuius planum ipsi $A'A''$ perpendiculare, vel etiam superficiem curvam, quae rotatione curvae circa lineam $A'A''$ generatur.

Jam antecedentium applicationem monstremus exemplo sequente.

24.

Problema.

„Datis in eodem plano duabus sectionibus conicis, determinare situm oculi et tabulae, ut utraque proiecta fiat circulus."

Solutio.

Antequam ipsam problematis propositi solutionem aggrediamur, pauca de chordis idealibus, quas Cl. Poncelet appellavit, antemittamus, necesse est.

Data linea in plano per dua eius puncta, saepius fit, ut puncta imaginaria fiant, linea realis maneat. Quod semper accidit, quoties coordinatae

alterius: $p+iq$, $p'+iq'$

alterius: $p-iq$, $p'-iq'$,

designante i rursus $\sqrt{-1}$. Quippe ex aequatione lineae per utrumque punctum ductae quantitates imaginariae abeunt, quae per regulas notas invenitur:

$$q'y-qz=pq'-p'q.$$

Nec non utriusque puncti centrum invenitur reale, quippe cuius coordina-

tae erunt p, p'. Quadratum autem distantiae invenitur aequale quantitati negativae

$$-4(qq+q'q').$$

Proponantur iam in eodem plano duae curvae algebraicae, quae n puncta sive realia sive imaginaria communia habent; e regulis notissimis algebraicis puncta imaginaria semper bina inter se coniuncta erunt, ita ut, quoties alterius coordinatae sunt $p+iq$, $p'+iq'$, alterius sint $p-iq$, $p'-iq'$, ideoque linea utrumque iungens realis sit. Quam lineam realem, omnibus chordae communis proprietatibus gaudentem, neque tamen realiter puncta communia iungentem, Cl. Poncelet chordam idealem communem vocavit. Nec non ex iis, quae supra diximus, centrum chordae idealis reale fieri vidimus, quippe cuius coordinatae sunt p, q. Quantitatem autem $\sqrt{(qq+q'q')}$ Cl. Poncelet semichordam idealem vocavit, quippe cuius quadratum negative sumtum quadratum semidistantiae binorum punctorum imaginariorum constituit.

His antemissis, ad problema propositum accedamus. Sint aequationes sectionum conicarum propositarum:

$$l+myy+nzz+2l'yz+2m'z+2n'y=0$$
$$\lambda+\mu yy+\nu zz+2\lambda'yz+2\mu'z+2\nu'y=0.$$

Quibus in aequationibus substitutis ipsarum y, z valoribus:

$$y=\frac{\beta-\beta's'-\beta''s''}{\alpha-\alpha's'-\alpha''s''},\quad z=\frac{\gamma-\gamma's'-\gamma''s''}{\alpha-\alpha's'-\alpha''s''}$$

aequationes duorum circulorum prodire debent. Ut altera proiectio circulus evadat, aequationes conditionales obtinemus:

$$l\alpha'\alpha'+m\beta'\beta'+n\gamma'\gamma'+2l'\beta'\gamma'+2m'\gamma'\alpha'+2n'\alpha'\beta'=$$
$$l\alpha''\alpha''+m\beta''\beta''+n\gamma''\gamma''+2l'\beta''\gamma''+2m'\gamma''\alpha''+2n'\alpha''\beta'',$$
$$l\alpha'\alpha''+m\beta'\beta''+n\gamma'\gamma''+l'(\beta'\gamma''+\beta''\gamma')+m'(\gamma'\alpha''+\gamma''\alpha')+n'(\alpha'\beta''+\alpha''\beta')=0.$$

Quarum in locum sequentes duas substituere licet:

$$0=l(\alpha'+i\alpha'')^2+m(\beta'+i\beta'')^2+n(\gamma'+i\gamma'')^2$$
$$+2l'(\beta'+i\beta'')(\gamma'+i\gamma'')+2m'(\gamma'+i\gamma'')(\alpha'+i\alpha'')+2n'(\alpha'+i\alpha'')(\beta'+i\beta'')$$
$$0=l(\alpha'-i\alpha'')^2+m(\beta'-i\beta'')^2+n(\gamma'-i\gamma'')^2$$
$$+2l'(\beta'-i\beta'')(\gamma'-i\gamma'')+2m'(\gamma'-i\gamma'')(\alpha'-i\alpha'')+2n'(\alpha'-i\alpha'')(\beta'-i\beta'').$$

E quibus patet curvae propositae, cuius aequatio:

$$0=l+myy+nzz+2l'yz+2m'z+2n'y,$$

bina puncta imaginaria esse, quorum coordinatae sunt

$$\text{alterius: } \frac{\beta' + i\beta''}{\alpha' + i\alpha''}, \quad \frac{\gamma' + i\gamma''}{\alpha' + i\alpha''},$$
$$\text{alterius: } \frac{\beta' - i\beta''}{\alpha' - i\alpha''}, \quad \frac{\gamma' - i\gamma''}{\alpha' - i\alpha''}.$$

Aequatio lineae, quae per illa transit, fit:

$$(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')y + (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')z + \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = 0,$$

sive e denominationibus supra adhibitis:

$$a - by - cz = 0,$$

quae erat aequatio lineae $A'A''$, quam igitur videmus necessario chordam idealem curvae propositae fieri. Simul centrum chordae coordinatas habet:

$$\frac{\alpha'\beta' + \alpha''\beta''}{\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha''}, \quad \frac{\alpha'\gamma' + \alpha''\gamma''}{\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha''},$$

quod igitur videmus esse punctum A'''. Semichordam idealem nanciscimur:

$$\frac{\sqrt{[(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')^2 + (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')^2]}}{\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha''} = \frac{\sqrt{(bb + cc)}}{\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha''},$$

quae ex antecedentibus est linea OA'''. Unde videmus, ut curva proiecta fiat circulus, oculum in peripheria circuli statui debere, cuius centrum est centrum certae cuiusdam chordae idealis, cuius radius est semichorda idealis, et cuius planum chordae ideali perpendiculare; tabulam autem accipiendam esse parallelam plano per oculum et chordam idealem ducto.

Eadem etiam de altera sectione conica proposita valent, cuius proiectio ut circulus fiat, puncta illa imaginaria in hac quoque sita esse debent, unde linea per illa transiens fit utriusque sectionis conicae chorda communis idealis. Quae est constructio quaesita, a Cl. Poncelet loco citato exhibita.

Jam ad observationes alias transeamus.

25.

Dedi olim in Commentatione de singulari quadam duplicis integralis transformatione (v. Diarium Crellianum, Vol. II. pag. 234 sqq.), theorema memorabile, designante ϱ functionem quamlibet integram rationalem secundi ordinis quantitatum $\cos\psi$, $\sin\psi\cos\varphi$, $\sin\psi\sin\varphi$ huiusmodi:

$$\begin{aligned}\varrho = {} & a + a'\cos\psi^2 + a''\sin\psi^2\cos\varphi^2 + a'''\sin\psi^2\sin\varphi^2 \\ & + 2b'\cos\psi + 2b''\sin\psi\cos\varphi + 2b'''\sin\psi\sin\varphi \\ & + 2c'\sin\psi^2\cos\varphi\sin\varphi + 2c''\cos\psi\sin\psi\sin\varphi + 2c'''\cos\psi\sin\psi\cos\varphi,\end{aligned}$$

integrale duplex indefinitum

$$\int \frac{\sin\psi\,\partial\psi\,\partial\varphi}{\varrho}$$

transformari posse in hoc simplicius:

$$\int \frac{\sin\eta\,\partial\eta\,\partial\vartheta}{\sqrt{G+G'\cos\eta^2+G''\sin\eta^2\cos\vartheta^2+G'''\sin\eta^2\sin\vartheta^2}},$$

idque per substitutiones formae

$$\cos\eta = \frac{\alpha+\alpha'\cos\psi+\alpha''\sin\psi\cos\varphi+\alpha'''\sin\psi\sin\varphi}{\delta+\delta'\cos\psi+\delta''\sin\psi\cos\varphi+\delta'''\sin\psi\sin\varphi},$$

$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{\beta+\beta'\cos\psi+\beta''\sin\psi\cos\varphi+\beta'''\sin\psi\sin\varphi}{\delta+\delta'\cos\psi+\delta''\sin\psi\cos\varphi+\delta'''\sin\psi\sin\varphi},$$

$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{\gamma+\gamma'\cos\psi+\gamma''\sin\psi\cos\varphi+\gamma'''\sin\psi\sin\varphi}{\delta+\delta'\cos\psi+\delta''\sin\psi\cos\varphi+\delta'''\sin\psi\sin\varphi}.$$

De quo theoremate, observo, prodire theorema §. 20. propositum, ponendo

$$\sin\psi\cos\varphi = y,\quad \sin\psi\sin\varphi = z,\quad \sin\eta\cos\vartheta = s',\quad \sin\eta\sin\vartheta = s'',$$

atque insuper in expressione ipsius ϱ:

$$a' = b' = c'' = c''' = 0,$$

quo casu e formulis loco citato traditis fit:

$$G' = 0,\quad \beta' = \gamma' = \delta' = \alpha = \alpha'' = \alpha''' = 0.$$

Pauca hoc loco de substitutionibus illis, de quibus loco citato brevius actum est, addamus. Quemadmodum enim substitutionem:

$$\cos\Phi = \frac{\beta-\beta'\cos\eta-\beta''\sin\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta},\quad \sin\Phi = \frac{\gamma-\gamma'\cos\eta-\gamma''\sin\eta}{\alpha-\alpha'\cos\eta-\alpha''\sin\eta}$$

ad relationem simplicissimam inter tangentes arcuum $\frac{1}{2}(\Phi-\Phi')$, $\frac{1}{2}(\eta-\eta')$ revocavimus, ita illis quoque multo complicatioribus reductionem similem, eadem simplicitate gaudentem, applicari posse videbimus. Porro monstrabimus, quomodo sedecim substitutionis coëfficientes, inter quas decem relationes locum habent, per quantitates sex commode exprimantur. Relationes inter coëfficientes, quibus cum in finem utemur, loco citato demonstratas invenis *).

Statuatur

$$MM = \delta\delta-1 = \delta'\delta'+\delta''\delta''+\delta'''\delta''' = \alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma,$$

atque eligantur sex quantitates novae ε', ε'', ε''', ζ', ζ'', ζ''' tales ut fiat:

$$\left[\frac{\delta'}{M}\cos\psi+\frac{\delta''}{M}\sin\psi\cos\varphi+\frac{\delta'''}{M}\sin\psi\sin\varphi\right]^2$$
$$+\left[\varepsilon'\cos\psi+\varepsilon''\sin\psi\cos\varphi+\varepsilon'''\sin\psi\sin\varphi\right]^2$$
$$+\left[\zeta'\cos\psi+\zeta''\sin\psi\cos\varphi+\zeta'''\sin\psi\sin\varphi\right]^2 = 1,$$

unde cum inter coëfficientes novem relationes sex notissimae locum habere debeant, e quarum numero uni

---

*) Quantitatem arbitrariam, loco citato per k designatam, hic ponemus $= 1$.

$$\frac{\delta'\delta'}{MM} + \frac{\delta''\delta''}{MM} + \frac{\delta'''\delta'''}{MM} = 1$$

iam satisfactum est, e quantitatibus sex assumtis ε', ε'' etc. unam pro arbitrio determinare licet, quo facto reliquae etiam determinatae erunt.

Statuatur porro:

$$\begin{aligned}
\varepsilon'\alpha' + \varepsilon''\alpha'' + \varepsilon'''\alpha''' &= \alpha_1 \\
\varepsilon'\beta' + \varepsilon''\beta'' + \varepsilon'''\beta''' &= \beta_1 \\
\varepsilon'\gamma' + \varepsilon''\gamma'' + \varepsilon'''\gamma''' &= \gamma_1 \\
\zeta'\alpha' + \zeta''\alpha'' + \zeta'''\alpha''' &= \alpha_2 \\
\zeta'\beta' + \zeta''\beta'' + \zeta'''\beta''' &= \beta_2 \\
\zeta'\gamma' + \zeta''\gamma'' + \zeta'''\gamma''' &= \gamma_2,
\end{aligned}$$

unde, cum etiam sit:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta'}{M}\alpha' + \frac{\delta''}{M}\alpha'' + \frac{\delta'''}{M}\alpha''' &= \frac{\delta}{M}\alpha \\
\frac{\delta'}{M}\beta' + \frac{\delta''}{M}\beta'' + \frac{\delta'''}{M}\beta''' &= \frac{\delta}{M}\beta \\
\frac{\delta'}{M}\gamma' + \frac{\delta''}{M}\gamma'' + \frac{\delta'''}{M}\gamma''' &= \frac{\delta}{M}\gamma,
\end{aligned}$$

fit, ternarum quadratarum summatione facta:

$$\alpha\alpha + 1 = \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \alpha'''\alpha''' = \frac{\delta\delta}{MM}\alpha\alpha + \alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2$$

$$\beta\beta + 1 = \beta'\beta' + \beta''\beta'' + \beta'''\beta''' = \frac{\delta\delta}{MM}\beta\beta + \beta_1\beta_1 + \beta_2\beta_2$$

$$\gamma\gamma + 1 = \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' + \gamma'''\gamma''' = \frac{\delta\delta}{MM}\gamma\gamma + \gamma_1\gamma_1 + \gamma_2\gamma_2,$$

ideoque:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\alpha\alpha}{MM} + \alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 \\
1 &= \frac{\beta\beta}{MM} + \beta_1\beta_1 + \beta_2\beta_2 \\
1 &= \frac{\gamma\gamma}{MM} + \gamma_1\gamma_1 + \gamma_2\gamma_2.
\end{aligned}$$

Porro fit:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\delta}{MM}\beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 &= \beta\gamma \\
\frac{\delta\delta}{MM}\gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 &= \gamma\alpha \\
\frac{\delta\delta}{MM}\alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 &= \alpha\beta,
\end{aligned}$$

ideoque:

$$0 = \frac{\beta\gamma}{MM} + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2$$
$$0 = \frac{\gamma\alpha}{MM} + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2$$
$$0 = \frac{\alpha\beta}{MM} + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2.$$

De quibus formulis sequitur aequatio identica:

$$\left[\frac{\alpha}{M}\cos\eta + \frac{\beta}{M}\sin\eta\cos\vartheta + \frac{\gamma}{M}\sin\eta\sin\vartheta\right]^2$$
$$+ [\alpha_1\cos\eta + \beta_1\sin\eta\cos\vartheta + \gamma_1\sin\eta\sin\vartheta]^2$$
$$+ [\alpha_2\cos\eta + \beta_2\sin\eta\cos\vartheta + \gamma_2\sin\eta\sin\vartheta]^2 = 1.$$

Substitutiones propositae etiam hunc in modum repraesentantur (l. c. p. 240.):

$$\cos\psi = -\frac{\delta' - \alpha'\cos\eta - \beta'\sin\eta\cos\vartheta - \gamma'\sin\eta\sin\vartheta}{\delta - \alpha\cos\eta - \beta\sin\eta\cos\vartheta - \gamma\sin\eta\sin\vartheta}$$
$$\sin\psi\cos\varphi = -\frac{\delta'' - \alpha''\cos\eta - \beta''\sin\eta\cos\vartheta - \gamma''\sin\eta\cos\vartheta}{\delta - \alpha\cos\eta - \beta\sin\eta\cos\vartheta - \gamma\sin\eta\sin\vartheta}$$
$$\sin\psi\sin\varphi = -\frac{\delta''' - \alpha'''\cos\eta - \beta'''\sin\eta\cos\vartheta - \gamma'''\sin\eta\sin\vartheta}{\delta - \alpha\cos\eta - \beta\sin\eta\cos\vartheta - \gamma\sin\eta\sin\vartheta};$$

de quibus per formulas traditas derivantur sequentes:

$$M + \delta'\cos\psi + \delta''\sin\psi\cos\varphi + \delta'''\sin\psi\sin\varphi =$$
$$(\delta - M)\frac{M + \alpha\cos\eta + \beta\sin\eta\cos\vartheta + \gamma\sin\eta\sin\vartheta}{\delta - \alpha\cos\eta - \beta\sin\eta\cos\vartheta - \gamma\sin\eta\sin\vartheta},$$
$$\varepsilon'\cos\psi + \varepsilon''\sin\psi\cos\varphi + \varepsilon'''\sin\psi\sin\varphi =$$
$$\frac{\alpha_1\cos\eta + \beta_1\sin\eta\cos\vartheta + \gamma_1\sin\eta\sin\vartheta}{\delta - \alpha\cos\eta - \beta\sin\eta\cos\vartheta - \gamma\sin\eta\sin\vartheta},$$
$$\zeta'\cos\psi + \zeta''\sin\psi\cos\varphi + \zeta'''\sin\psi\sin\varphi =$$
$$\frac{\alpha_2\cos\eta + \beta_2\sin\eta\cos\vartheta + \gamma_2\sin\eta\sin\vartheta}{\delta - \alpha\cos\eta - \beta\sin\eta\cos\vartheta - \gamma\sin\eta\sin\vartheta}.$$

Iam ponere licet:

$$\frac{\delta'}{M}\cos\psi + \frac{\delta''}{M}\sin\psi\cos\varphi + \frac{\delta'''}{M}\sin\psi\sin\varphi = \frac{1 - tt - uu}{1 + tt + uu}$$
$$\varepsilon'\cos\psi + \varepsilon''\sin\psi\cos\varphi + \varepsilon'''\sin\psi\sin\varphi = \frac{2t}{1 + tt + uu}$$
$$\zeta'\cos\psi + \zeta''\sin\psi\cos\varphi + \zeta'''\sin\psi\sin\varphi = \frac{2u}{1 + tt + uu};$$

quippe in utraque aequationum parte summa quadratorum fit $= 1$. Similiter ponere licet:

$$\frac{\alpha}{M}\cos\eta + \frac{\beta}{M}\sin\eta\cos\vartheta + \frac{\gamma}{M}\sin\eta\sin\vartheta = \frac{1 - t't' - u'u'}{1 + t't' + u'u'}$$
$$\alpha_1\cos\eta + \beta_1\sin\eta\cos\vartheta + \gamma_1\sin\eta\sin\vartheta = \frac{2t'}{1 + t't' + u'u'}$$
$$\alpha_2\cos\eta + \beta_2\sin\eta\cos\vartheta + \gamma_2\sin\eta\sin\vartheta = \frac{2u'}{1 + t't' + u'u'};$$

unde iam relationes, quae inter angulos ψ, φ et η, ϑ propositae erant, ad relationes inter quantitates t, u et t', u' revocatae sunt. Obtinemus autem:

$$\frac{t}{M} = \frac{\varepsilon' \cos\psi + \varepsilon'' \sin\psi \cos\varphi + \varepsilon''' \sin\psi \sin\varphi}{M + \delta' \cos\psi + \delta'' \sin\psi \cos\varphi + \delta''' \sin\psi \sin\varphi}$$
$$\frac{u}{M} = \frac{\zeta' \cos\psi + \zeta'' \sin\psi \cos\varphi + \zeta''' \sin\psi \sin\varphi}{M + \delta' \cos\psi + \delta'' \sin\psi \cos\varphi + \delta''' \sin\psi \sin\varphi};$$

porro:

$$\frac{t'}{M} = \frac{\alpha_1 \cos\eta + \beta_1 \sin\eta \cos\vartheta + \gamma_1 \sin\eta \sin\vartheta}{M + \alpha \cos\eta + \beta \sin\eta \cos\vartheta + \gamma \sin\eta \sin\vartheta}$$
$$\frac{u'}{M} = \frac{\alpha_2 \cos\eta + \beta_2 \sin\eta \cos\vartheta + \gamma_2 \sin\eta \sin\vartheta}{M + \alpha \cos\eta + \beta \sin\eta \cos\vartheta + \gamma \sin\eta \sin\vartheta}.$$

Quapropter relationes illae inter t, u et t', u' in has simplicissimas redeunt:

$$t = (\delta + M)\, t', \quad u = (\delta + M)\, u'.$$

Quae sunt relationes quaesitae simplicissimae, ad quas substitutio proposita revocatur.

26.

Expressiones sedecim coëfficientium per quantitates sex hunc in modum nanciscimur. Ponatur:

$$\frac{\delta'}{M} = \sin D' \qquad \varepsilon' = \cos D' \cos E' \qquad \zeta' = \cos D' \sin E'$$
$$\frac{\delta''}{M} = \sin D'' \qquad \varepsilon'' = \cos D'' \cos E'' \qquad \zeta'' = \cos D'' \sin E''$$
$$\frac{\delta'''}{M} = \sin D''' \qquad \varepsilon''' = \cos D''' \cos E''' \qquad \zeta''' = \cos D''' \sin E''',$$

ubi propter relationes, quae inter novem quantitates illas locum habent, fit:

$$\sin D' = -\sqrt{[\operatorname{cotg}(E''' - E') \operatorname{cotg}(E' - E'')]}$$
$$\sin D'' = -\sqrt{[\operatorname{cotg}(E' - E'') \operatorname{cotg}(E'' - E''')]}$$
$$\sin D''' = -\sqrt{[\operatorname{cotg}(E'' - E''') \operatorname{cotg}(E''' - E')]},$$

quas aequationes, posito

$$\cos(E' - E'') \cos(E'' - E''') \cos(E''' - E') = -\triangle\triangle$$

ita repraesentare licet:

$$\operatorname{tang} D' = \frac{-\triangle}{\cos(E'' - E''')}, \quad \operatorname{tang} D'' = \frac{-\triangle}{\cos(E''' - E')}, \quad \operatorname{tang} D''' = \frac{-\triangle}{\cos(E' - E'')}.$$

Quas formulas minus usitatas, quarum ope novem eiusmodi quantitates, inter quas relationes sex intercedunt, per angulos tres E', E'', E''' commode exprimuntur, Cl. Euler olim adnotavit (v. Diar. Crell. Vol. II. p. 188.).

Simili modo ponatur:

$$\frac{\alpha}{M} = \sin A \qquad \alpha_1 = \cos A \cos A' \qquad \alpha_2 = \cos A \sin A'$$

$$\frac{\beta}{M} = \sin B \qquad \beta_1 = \cos B \cos B' \qquad \beta_2 = \cos B \sin B'$$

$$\frac{\gamma}{M} = \sin C \qquad \gamma_1 = \cos C \cos C' \qquad \gamma_2 = \cos C \sin C',$$

ubi rursus:

$$\sin A = -\sqrt{[\operatorname{cotg}(C'-A')\operatorname{cotg}(A'-B')]}$$
$$\sin B = -\sqrt{[\operatorname{cotg}(A'-B')\operatorname{cotg}(B'-C')]}$$
$$\sin C = -\sqrt{[\operatorname{cotg}(B'-C')\operatorname{cotg}(C'-A')]},$$

sive etiam, posito

$$\cos(A'-B')\cos(B'-C')\cos(C'-A') = -\Delta'\Delta',$$

fit:

$$\operatorname{tang} A = \frac{-\Delta'}{\cos(B'-C')}, \quad \operatorname{tang} B = \frac{-\Delta'}{\cos(C'-A')}, \quad \operatorname{tang} C = \frac{-\Delta'}{\cos(A'-B')}.$$

Iam e formulis traditis facile sequitur:

$$\alpha' = \frac{\delta\delta'}{MM}\alpha + \varepsilon'\alpha_1 + \zeta'\alpha_2$$
$$\alpha'' = \frac{\delta\delta''}{MM}\alpha + \varepsilon''\alpha_1 + \zeta''\alpha_2$$
$$\alpha''' = \frac{\delta\delta'''}{MM}\alpha + \varepsilon'''\alpha_1 + \zeta'''\alpha_2$$
$$\beta' = \frac{\delta\delta'}{MM}\beta + \varepsilon'\beta_1 + \zeta'\beta_2$$
$$\beta'' = \frac{\delta\delta''}{MM}\beta + \varepsilon''\beta_1 + \zeta''\beta_2$$
$$\beta''' = \frac{\delta\delta'''}{MM}\beta + \varepsilon'''\beta_1 + \zeta'''\beta_2$$
$$\gamma' = \frac{\delta\delta'}{MM}\gamma + \varepsilon'\gamma_1 + \zeta'\gamma_2$$
$$\gamma'' = \frac{\delta\delta''}{MM}\gamma + \varepsilon''\gamma_1 + \zeta''\gamma_2$$
$$\gamma''' = \frac{\delta\delta'''}{MM}\gamma + \varepsilon'''\gamma_1 + \zeta'''\gamma_2.$$

Unde, posito insuper $M = \operatorname{tang}\mu$, sedecim coëfficientium expressiones obtines sequentes:

$$\alpha = \operatorname{tang}\mu \sin A, \quad \beta = \operatorname{tang}\mu \sin B, \quad \gamma = \operatorname{tang}\mu = \sin C,$$
$$\delta = \sec\mu; \quad \delta' = \operatorname{tang}\mu \sin D', \quad \delta'' = \operatorname{tang}\mu \sin D'', \quad \delta''' = \operatorname{tang}\mu \sin D'''$$
$$\alpha' = \sec\mu \sin D' \sin A + \cos D' \cos A \cos(E'-A')$$
$$\beta' = \sec\mu \sin D' \sin B + \cos D' \cos B \cos(E'-B')$$
$$\gamma' = \sec\mu \sin D' \sin C + \cos D' \cos C \cos(E'-C')$$

$$\alpha'' = \sec\mu \sin D'' \sin A + \cos D'' \cos A \cos(E'' - A')$$
$$\beta'' = \sec\mu \sin D'' \sin B + \cos D'' \cos B \cos(E'' - B')$$
$$\gamma'' = \sec\mu \sin D'' \sin C + \cos D'' \cos C \cos(E'' - C')$$
$$\alpha''' = \sec\mu \sin D''' \sin A + \cos D''' \cos A \cos(E''' - A')$$
$$\beta''' = \sec\mu \sin D''' \sin B + \cos D''' \cos B \cos(E''' - B')$$
$$\gamma''' = \sec\mu \sin D''' \sin C + \cos D''' \cos C \cos(E''' - C').$$

Angulos D', D'', D''' per differentias ipsorum E', E'', E''', angulos A, B, C per differentias ipsorum A', B', C' expressimus, unde sedecim coëfficientes substitutionum propositarum per angulum μ et differentias angulorum E', E'', E''', A', B', C', quae sunt quantitates sex, expressas habes; quod erat propositum.

27.

Transformatio integralis duplicis

$$\int \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\varrho},$$

quae per dictam substitutionem obtinetur, et ipsa, sicuti transformatio illa integralis simplicis, introductis quantitatibus imaginariis, ad aliud problema algebraicum revocari potest, quo agitur, per substitutiones:

$$w = \delta s + \delta' s' + \delta'' s'' + \delta''' s'''$$
$$x = \alpha s + \alpha' s' + \alpha'' s'' + \alpha''' s'''$$
$$y = \beta s + \beta' s' + \beta'' s'' + \beta''' s'''$$
$$z = \gamma s + \gamma' s' + \gamma'' s'' + \gamma''' s''',$$

quae identice efficiant:

$$ww + xx + yy + zz = ss + s's' + s''s'' + s'''s''',$$

simul expressionem:

$$ass + a's's' + a''s''s'' + a'''s'''s''' + 2b'ss' + 2b''ss'' + 2b'''ss''' + 2c's''s''' + 2c''s'''s' + 2c'''s's''$$

transformare in hanc simpliciorem:

$$Gww + G'xx + G''yy + G'''zz.$$

Statuatur enim:

$$0 = ww + xx + yy + zz = ss + s's' + s''s'' + s'''s''',$$

unde ponere licet:

$$\frac{s'}{s} = i\cos\varphi, \quad \frac{s''}{s} = i\sin\varphi\cos\psi, \quad \frac{s'''}{s} = i\sin\varphi\sin\psi$$
$$\frac{x}{w} = i\cos\eta, \quad \frac{y}{w} = i\sin\eta\cos\vartheta, \quad \frac{z}{w} = i\sin\eta\sin\vartheta;$$

porro loco quantitatum:

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ b',\ b'',\ b''',\ c',\ c'',\ c'''$$

ponatur respective:

$$a,\ -a',\ -a'',\ -a''',\ -ib',\ -ib'',\ -ib''',\ -c',\ -c'',\ -c'''.$$

et loco quantitatum:

$$\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta',\ \alpha'',\ \beta'',\ \gamma'',\ \delta'',\ \alpha''',\ \beta''',\ \gamma''',\ \delta'''$$

ponatur respective:

$$-i\alpha',\ -i\beta',\ -i\gamma',\ -i\delta',\ -i\alpha'',\ -i\beta'',\ -i\gamma'',\ -i\delta'',\ -i\alpha''',\ -i\beta''',\ -i\gamma''',\ -i\delta''';$$

nec non loco G', G'', G''' ponatur $-G'$, $-G''$, $-G'''$. Quo facto aequatio:

$$ass + a's's' + a''s''s'' + a'''s'''s''' + 2b'ss' + 2b''ss'' + 2b'''ss'''$$
$$+ 2c's''s''' + 2c''s'''s' + 2c'''s's'' = Gww + G'xx + G''yy + G'''zz,$$

facta divisione per ww, in hanc abit:

$$\frac{\varrho}{[\delta + \delta'\cos\varphi + \delta''\sin\varphi\cos\psi + \delta'''\sin\varphi\sin\psi]^2}$$
$$= G + G'\cos^2\eta + G''\sin^2\eta\cos^2\vartheta + G'''\sin^2\eta\sin^2\vartheta;$$

nec non substitutiones in supra adhibitas abeunt; de quibus cum facile sequatur:

$$\sin\eta\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi}\right) - \left(\frac{\partial\eta}{\partial\psi}\right)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\right)\right] = \frac{\sin\varphi}{[\delta + \delta'\cos\varphi + \delta''\sin\varphi\cos\psi + \delta'''\sin\varphi\sin\psi]^2},$$

obtinetur transformatio proposita:

$$\int\frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{\varrho} = \int\frac{\sin\eta\,\partial\eta\,\partial\vartheta}{G + G'\cos^2\eta + G''\sin^2\eta\cos^2\vartheta + G'''\sin^2\eta\sin^2\vartheta}.$$

Adnotabo, problematis algebraici solutionem nuper admodum dedisse Cl. Cauchy in Commentatione, cui inscriptum est: *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes* (cf. *Exercices de Mathématiques Vol. IV. pag.* 140. *sqq.*); quo ille loco problema ad transformationem similem functionis homogenae secundi ordinis cuiuslibet numeri variabilium extendit. Nec non transformatio integralis per eandem analysin ad numerum quemlibet variabilium et quemlibet ordinem integrationis extenditur. Generaliter enim probatur, designante ϱ functionem quamlibet integram rationalem secundi ordinis quantitatum

$$\cos\Phi,\ \sin\Phi\cos\Phi_1,\ \sin\Phi\sin\Phi_1\cos\Phi_2,\ \sin\Phi\sin\Phi_1\sin\Phi_2\cos\Phi_3,\ \ldots,$$
$$\sin\Phi\sin\Phi_1\ldots\sin\Phi_{n-1}\cos\Phi_n,\ \sin\Phi\sin\Phi_1\ldots\sin\Phi_{n-1}\sin\Phi_n,$$

integrale $(n+1)$tuplum:

$$\int\frac{\sin\varphi^n\sin\varphi_1^{n-1}\sin\varphi_2^{n-2}\ldots\sin\varphi_{n-1}\,\partial\varphi\,\partial\varphi_1\ldots\partial\varphi_n}{\varrho^{\frac{n+1}{2}}}$$

transformari posse in hoc simplicius:

$$\int \frac{\sin\eta^n \sin\eta_1^{n-1} \sin\eta_2^{n-2} \ldots \sin\eta_{n-1}\, \partial\eta\, \partial\eta_1\, \partial\eta_2 \ldots \partial\eta_n}{\sigma^{\frac{n+1}{2}}},$$

in quo functio σ est summa quadratorum expressionum:

$$\cos\eta,\ \sin\eta\cos\eta_1,\ \sin\eta\sin\eta_1\cos\eta_2,\ \ldots\ldots,\ \sin\eta\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-1}\cos\eta_n,$$
$$\sin\eta\sin\eta_1\sin\eta_2\ldots\sin\eta_{n-1}\sin\eta_n,$$

singulis in quantitates constantes ductis; expressiones autem eum in finem in locum quantitatum $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\varphi_1$ etc. substituendae sunt, uti supra, fractiones, quarum et denominator et numerator functiones lineares ipsarum $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\eta_1$, etc.

Unde transformatio integralis simplicis, de qua initio locuti sumus, ab Eulero olim in Institutionibus calculi integralis proposita, iam ita amplificata est, ut perinde de integralibus $n$tuplis functionum n variabilium valeat.

28.

Hisce disquisitionibus finem imponamus proponendo theorema novum ac memorabile, quo etiam theoremata §. 20. allegata, aequationis differentialis

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{[(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)^2+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)^2-(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^2]}}$$
$$+\frac{\partial\psi}{\sqrt{[(B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)^2+(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)^2-(A+A'\cos\psi+A''\sin\psi)^2]}}$$
$$= 0$$

integrale esse aequationem:

$$A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi$$
$$= 0,$$

vel casu speciali, ad quem generaliorem illum revocavimus, aequationis differentialis:

$$\frac{\partial\eta}{\sqrt{(G'G'\cos^2\eta+G''G''\sin^2\eta-GG)}}+\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{(G'G'\cos^2\vartheta+G''G''\sin^2\vartheta-GG)}}=0$$

integrale esse aequationem:

$$G+G'\cos\eta\cos\vartheta+G''\sin\eta\sin\vartheta=0,$$

ad integralia duplicia extenduntur. Quibus theorematis cum theoria de additione integralium ellipticorum superstructa sit, quod universae theoriae functionum ellipticarum principium est, extensionem illam attentionem geometrarum mereri credimus.

Propositae sint inter angulos φ, ψ et η, ϑ aequationes duae sequentes:

$$\begin{aligned} &a + b\cos\varphi + c\sin\varphi\cos\psi + d\sin\varphi\sin\psi \\ &+ [a' + b'\cos\varphi + c'\sin\varphi\cos\psi + d'\sin\varphi\sin\psi]\cos\eta \\ &+ [a'' + b''\cos\varphi + c''\sin\varphi\cos\psi + d''\sin\varphi\sin\psi]\sin\eta\cos\vartheta \\ &+ [a''' + b'''\cos\varphi + c'''\sin\varphi\cos\psi + d'''\sin\varphi\sin\psi]\sin\eta\sin\vartheta \\ &= 0, \end{aligned}$$

quam brevitatis causa designamus per

$$F(\varphi, \psi, \eta, \vartheta) = 0,$$

et

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi\cos\psi + \delta\sin\varphi\sin\psi \\ &+ [\alpha' + \beta'\cos\varphi + \gamma'\sin\varphi\cos\psi + \delta'\sin\varphi\sin\psi]\cos\eta \\ &+ [\alpha'' + \beta''\cos\varphi + \gamma''\sin\varphi\cos\psi + \delta''\sin\varphi\sin\psi]\sin\eta\cos\vartheta \\ &+ [\alpha''' + \beta'''\cos\varphi + \gamma'''\sin\varphi\cos\psi + \delta'''\sin\varphi\sin\psi]\sin\eta\sin\vartheta \\ &= 0, \end{aligned}$$

quam brevitatis causa designamus per

$$\Pi(\varphi, \psi, \eta, \vartheta) = 0.$$

E quibus aequationibus, cognitis φ, ψ, valores ipsarum η, ϑ eruere licet, et integratio secundum φ, ψ instituenda in aliam secundum η, ϑ instituendam transformari potest. Generaliter enim e theoria transformationis integralium duplicium constat, datis inter φ, ψ, η, ϑ aequationibus quibuslibet

$$F(\varphi, \psi, \eta, \vartheta) = 0, \quad \Pi(\varphi, \psi, \eta, \vartheta) = 0,$$

fore:

$$\int \frac{U\,\partial\varphi\,\partial\psi}{\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial\vartheta}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial\eta}\right)} = \int \frac{U\,\partial\eta\,\partial\vartheta}{\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial\psi}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial\psi}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial\varphi}\right)}$$

ubi in altero integrali expressio

$$\frac{U}{\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial\vartheta}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial\eta}\right)}$$

per ipsas φ, ψ; in altero integrali expressio

$$\frac{U}{\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial\psi}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial\psi}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial\varphi}\right)}$$

per ipsas η, ϑ ope aequationum propositarum exprimendae sunt.

Ponatur brevitatis causa:

$$\begin{aligned} a + b\cos\varphi + c\sin\varphi\cos\psi + \partial\sin\varphi\sin\psi &= A \\ a' + b'\cos\varphi + c'\sin\varphi\cos\psi + \partial'\sin\varphi\sin\psi &= A' \end{aligned}$$

$$a'' + b'' \cos\Phi + c'' \sin\Phi \cos\psi + d'' \sin\Phi \sin\psi = A''$$
$$a''' + b''' \cos\Phi + c''' \sin\Phi \cos\psi + d''' \sin\Phi \sin\psi = A''',$$

porro:

$$\alpha + \beta \cos\Phi + \gamma \sin\Phi \cos\psi + \delta \sin\Phi \sin\psi = B$$
$$\alpha' + \beta' \cos\Phi + \gamma' \sin\Phi \cos\psi + \delta' \sin\Phi \sin\psi = B'$$
$$\alpha'' + \beta'' \cos\Phi + \gamma'' \sin\Phi \cos\psi + \delta'' \sin\Phi \sin\psi = B''$$
$$\alpha''' + \beta''' \cos\Phi + \gamma''' \sin\Phi \cos\psi + \delta''' \sin\Phi \sin\psi = B''',$$

aequationes propositas ita exhibere licet:

$$F = A + A' \cos\eta + A'' \sin\eta \cos\vartheta + A''' \sin\eta \sin\vartheta = 0$$
$$\Pi = B + B' \cos\eta + B'' \sin\eta \cos\vartheta + B''' \sin\eta \sin\vartheta = 0$$

Simili modo ponamus:

$$a + a' \cos\eta + a'' \sin\eta \cos\vartheta + a''' \sin\eta \sin\vartheta = C$$
$$b + b' \cos\eta + b'' \sin\eta \cos\vartheta + b''' \sin\eta \sin\vartheta = C'$$
$$c + c' \cos\eta + c'' \sin\eta \cos\vartheta + c''' \sin\eta \sin\vartheta = C''$$
$$d + d' \cos\eta + d'' \sin\eta \cos\vartheta + d''' \sin\eta \sin\vartheta = C''',$$

porro:

$$\alpha + \alpha' \cos\eta + \alpha'' \sin\eta \cos\vartheta + \alpha''' \sin\eta \sin\vartheta = D$$
$$\beta + \beta' \cos\eta + \beta'' \sin\eta \cos\vartheta + \beta''' \sin\eta \sin\vartheta = D'$$
$$\gamma + \gamma' \cos\eta + \gamma'' \sin\eta \cos\vartheta + \gamma''' \sin\eta \sin\vartheta = D''$$
$$\delta + \delta' \cos\eta + \delta'' \sin\eta \cos\vartheta + \delta''' \sin\eta \sin\vartheta = D''':$$

aequationes propositas etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$F = C + C' \cos\Phi + C'' \sin\Phi \cos\psi + C''' \sin\Phi \sin\psi = 0$$
$$\Pi = D + D' \cos\Phi + D'' \sin\Phi \cos\psi + D''' \sin\Phi \sin\psi = 0.$$

Quibus statutis, investigemus primum valorem ipsius

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \eta}\right).$$

Fit:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right) = -A' \sin\eta + A'' \cos\eta \cos\vartheta + A''' \cos\eta \sin\vartheta$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right) = -A'' \sin\eta \sin\vartheta + A''' \sin\eta \cos\vartheta$$
$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \eta}\right) = -B' \sin\eta + B'' \cos\eta \cos\vartheta + B''' \cos\eta \sin\vartheta$$
$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}\right) = -B'' \sin\eta \sin\vartheta + B''' \sin\eta \cos\vartheta$$

unde prodit:

$$\frac{1}{\sin\eta}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \eta}\right)\right] =$$
$$A''B''' - A'''B'') \cos\eta + (A'''B' - A'B''') \sin\eta \cos\vartheta + (A'B'' - A''B') \sin\eta \sin\vartheta.$$

Prorsus eodem modo invenitur:

$$\frac{1}{\sin\varphi}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\right)\right] =$$

$$(C''D'''-C'''D'')\cos\Phi+(C'''D'-C'D''')\sin\Phi\cos\psi+(C'D''-C''D')\sin\Phi\sin\psi.$$

Quas expressiones iam ope aequationum propositarum alteram per Φ, ψ, alteram per η, ϑ repraesentabimus.

Posito brevitatis causa:

$$\cos\eta = x, \quad \sin\eta\cos\vartheta = y, \quad \sin\eta\sin\vartheta = z,$$

datae sunt aequationes:

$$A + A'x + A''y + A'''z = 0$$
$$B + B'x + B''y + B'''z = 0$$
$$1 - xx - yy - zz = 0,$$

unde, posito:

$$R = (A''B'''-A'''B'')x + (A'''B'-A'B''')y + (A'B''-A''B')z,$$

per regulas notas resolutionis aequationum linearium sequitur:

$$Rx = A''B'''-A'''B''+y(AB'''-A'''B)-z(AB''-A''B)$$
$$Ry = A'''B'-A'B'''+z(AB'-A'B)-x(AB'''-A'''B)$$
$$Rz = A'B''-A''B'+x(AB''-A''B)-y(AB'-A'B).$$

De quibus aequationibus deducimus sequentem:

$$[Rx-(A''B'''-A'''B'')]^2+[Ry-(A'''B'-A'B''')]^2+[Rz-(A'B''-A''B')]^2$$
$$= [y(AB'''-A'''B)-z(AB''-A''B)]^2+$$
$$[z(AB'-A'B)-x(AB'''-A'''B)]^2+$$
$$[x(AB''-A''B)-y(AB'-A'B)]^2.$$

Alteram aequationis partem facile patet, fore:

$$-RR+(A''B'''-A'''B'')^2+(A'''B'-A'B''')^2+(A'B''-A''B')^2;$$

altera identica est cum expressione sequente:

$$[xx+yy+zz][(AB'-A'B)^2+(AB''-A''B)^2+(AB'''-A'''B)^2]$$
$$-[x(AB'-A'B)+y(AB''-A''B)+z(AB'''-A'''B)]^2,$$

quae, cum ex aequationibus propositis sit:

$$x(AB'-A'B)+y(AB''-A''B)+z(AB'''-AB''') = 0$$
$$xx+yy+zz = 1,$$

simpliciter in hanc abit:

$$(AB'-A'B)^2+(AB''-A''B)^2+(AB'''-A'''B)^2,$$

unde nanciscimur:

$$RR = (A''B'''-A'''B'')^2+(A'''B'-A'B''')^2+(A'B''-A''B')^2$$
$$-(AB'-A'B)^2-(AB''-A''B)^2-(AB'''-A'''B)^2,$$

quae expressio investiganda erat.

Eandem patet etiam hunc in modum repraesentari posse:

$$RR = [A'A'+A''A''+A'''A'''-AA][B'B'+B''B''+B'''B'''-BB] - [A'B'+A''B''+A'''B'''-AB]^2.$$

Quam formulam, adnotemus, etiam per formulas notas geometriae analyticae obtineri.

Ponamus enim, O esse initium coordinatarum orthogonalium, P, P', P'' tria puncta, quorum coordinatae respective sint x, y, z; A, A', A''; B, B', B'', ita ut distantia ipsius P ab initio O sit $= 1$; notum est, fore R sextuplum pyramidis $OPP'P''$; eandem autem quantitatem per formulas trigonometriae sphaericae habes: $R =$

$$OP'.OP''\sqrt{(1-\cos^2 POP'-\cos^2 POP''-\cos^2 P'OP''+2\cos POP'\cos POP''\cos P'OP'')}$$
$$=OP'.OP''\sqrt{[(1-\cos^2 POP')(1-\cos^2 POP'')-(\cos POP'\cos POP''-\cos P'OP'')^2]}.$$

Fit autem:

$$OP' = \sqrt{(A'A'+A''A''+A'''A''')},\quad OP'' = \sqrt{(B'B'+B''B''+B'''B''')}$$
$$OP'\cos POP' = A'x + A''y + A'''z = -A$$
$$OP''\cos POP'' = B'x + B''y + B'''z = -B$$
$$OP'.OP''\cos P'OP'' = A'B'+A''B''+A'''B''',$$

quibus expressionibus substitutis, prodit:

$$RR = [A'A'+A''A''+A'''A'''-AA][B'B'+B''B''+B'''B'''-BB] - [A'B'+A''B''+A'''B'''-AB]^2,$$

quae est formula supra exhibita.

Prorsus eodem modo, posito

$$(C'D'''-C'''D'')\cos\varphi+(C'''D'-C'D''')\sin\varphi\cos\psi+(C'D''-C''D')\sin\varphi\sin\psi = S,$$

ex aequationibus propositis

$$0 = C + C'\cos\Phi + C''\sin\Phi\cos\psi + C'''\sin\Phi\sin\psi$$
$$0 = D + D'\cos\Phi + D''\sin\Phi\cos\psi + D'''\sin\Phi\sin\psi$$

sequitur:

$$SS = (C''D'''-C'''D'')^2+(C'''D'-C'D''')^2+(C'D''-C''D')^2 - (CD'-C'D)^2-(CD''-C''D)^2-(CD'''-C'''D)^2$$
$$= [C'C'+C''C''+C'''C'''-CC][D'D'+D''D''+D'''D'''-DD] - [C'D'+C''D''+C'''D'''-CD]^2.$$

Invenimus autem:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\vartheta}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\eta}\right) = \sin\eta\,.\,R$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\psi}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial\psi}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\right) = \sin\Phi\,.\,S;$$

unde ex aequatione:

$$\int \frac{U\,\partial\varphi\,\partial\psi}{\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial\vartheta}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial\eta}\right)} = \int \frac{U\,\partial\eta\,\partial\vartheta}{\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial\psi}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial\psi}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial\varphi}\right)},$$

posito insuper

$$U = \sin\Phi \sin\eta,$$

deducimus hanc valde memorabilem:

$$\int \frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{R} = \int \frac{\sin\eta\,\partial\eta\,\partial\vartheta}{S}.$$

Observo casu speciali, quo

$$b = a',\quad c = a'',\quad d = a''',\quad c' = b'',\quad d' = b''',\quad d'' = c'''$$
$$\beta = \alpha',\quad \gamma = \alpha'',\quad \delta = \alpha''',\quad \gamma' = \beta'',\quad \delta' = \beta''',\quad \delta'' = \gamma''',$$

functiones R, S easdem omnino functiones fore, alteram ipsarum Φ, ψ, alteram ipsarum η, ϑ. Quo igitur casu habemus theorema memorabile, integrale duplex

$$\int \frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{R},$$

substitutis in locum variabilium Φ, ψ alias variabiles η, ϑ, quales ex aequationibus $F = 0$, $\Pi = 0$ prodeunt, formam non mutare; sive quod idem est, aequationes illae $F = 0$, $\Pi = 0$, certam continent rationem, qua integralis

$$\int \frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{R}$$

limites mutari possint, ut valor eius immutatus maneat. Cuius rei unicum hactenus in duplicibus integralibus extabat exemplum

$$\int \sin\Phi\,\partial\Phi\,\partial\psi,$$

quod superficiem sphaerae exprimit; quippe quod, loco coordinatarum puncti in sphaera positi $\cos\Phi$, $\sin\Phi\cos\psi$, $\sin\Phi\sin\psi$ aliis introductis coordinatis orthogonalibus, formam non mutare scimus.

Addamus valores explicitos ipsarum $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$, quales ex aequationibus propositis fluunt. Quem in finem brevitatis causa ponamus:

$$A''B''' - A'''B'' = m',\quad A'''B' - A'B''' = m'',\quad A'B'' - A''B' = m'''$$
$$AB' - A'B = n',\quad AB'' - A''B = n'',\quad AB''' - A'''B = n''',$$

ubi adnotetur esse:

$$m'n' + m''n'' + m'''n''' = 0;$$

fit:

$$\cos\eta = \frac{m'R + m''n''' - m'''n''}{m'm' + m''m'' + m'''m'''}$$

$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{m''R + m'''n' - m'n'''}{m'm' + m''m'' + m'''m'''}$$
$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{m'''R + m'n'' - m''n'}{m'm' + m''m'' + m'''m'''};$$

ipsa autem R fit:

$$R = \sqrt{(m'm' + m''m'' + m'''m''' - n'n' - n''n'' - n'''n''')}.$$

Per formulas omnino similes ipsae $\cos\Phi$, $\sin\Phi\cos\psi$, $\sin\Phi\sin\psi$ vice versa per $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ exprimuntur.

E theoremate generali

$$\int \frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{R} = \int \frac{\sin\eta\,\partial\eta\,\partial\vartheta}{S}$$

hoc fluit speciale.

Theorema.

Datis aequationibus:

$$a + a'\cos\Phi\cos\eta + a''\sin\Phi\cos\psi.\sin\eta\cos\vartheta + a'''\sin\Phi\sin\psi.\sin\eta\sin\vartheta = 0$$
$$b + b'\cos\Phi\cos\eta + b''\sin\Phi\cos\psi.\sin\eta\cos\vartheta + b'''\sin\Phi\sin\psi.\sin\eta\sin\vartheta = 0,$$

posito brevitatis causa:

$$(a'''b''' - a'''b'')^2\sin^4\Phi\cos^2\psi\sin^2\psi + (a'''b' - a'b''')^2\sin^2\Phi\cos^2\Phi\sin^2\psi +$$
$$(a'b'' - a''b')^2\sin^2\Phi\cos^2\Phi\cos^2\psi - (ab' - a'b)^2\cos^2\Phi - (ab'' - a''b)^2\sin^2\Phi\cos^2\psi$$
$$- (ab''' - a'''b)^2\sin^2\Phi\sin^2\psi = RR$$
$$(a'''b''' - a'''b'')^2\sin^4\eta\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta + (a'''b' - a'b''')^2\sin^2\eta\cos^2\eta\sin^2\vartheta +$$
$$(a'b'' - a''b')^2\sin^2\eta\cos^2\eta\cos^2\vartheta - (ab' - a'b)^2\cos^2\eta - (ab'' - a''b)^2\sin^2\eta\cos^2\vartheta$$
$$- (ab''' - a'''b)^2\sin^2\eta\sin^2\vartheta = SS,$$

fit:

$$\int \frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{R} = \int \frac{\sin\eta\,\partial\eta\,\partial\vartheta}{S}.$$

Scr. 9. Dec. 1831.

26.

Note sur les surfaces réglées.

(Lettre de Mr. *Hachette,* membre de l'académie des sciences à Paris, à l'éditeur.)

J'ai exposé dans plusieurs ouvrages la théorie des surfaces réglées (voyez le premier supplément à la géométrie descriptive de Monge, année 1812, les élémens de géométrie à trois dimensions, année 1817, le traité de géométrie descriptive, édition 1828). Si vous voulez bien jeter les yeux sur les pages 88, 89 de ce dernier ouvrage, vous verrez comment j'ai résolu cette question: „Étant donnée une surface réglée qui a pour direc-„trices de sa génératrice trois courbes quelconques, lui mener un plan „tangent par un point donné sur la surface."

La solution est fondée sur ces considérations: 1°, que toute surface réglée non développable est touchée suivant une droite par une infinité d'hyperboloides à une nappe; que chacun de ces hyperboloides a pour directrices de sa génératrice trois droites menées par trois points de la droite commune à l'hyperboloide et à la surface réglée générale, dans les plans tangens à ces deux surfaces.

Les hyperboloides à une nappe tangens à une surface réglée suivant une droite de cette surface, comprennent comme cas particuliers les paraboloides hyperboliques et les hyperboloides de révolution (voyez pages 67 et 80 du traité de géométrie descriptive). Ainsi étant données sur une surface réglée quelconque une droite et trois plans tangens à la surface en trois points de la droite, on peut proposer de trouver ou un paraboloide hyperbolique ou un hyperboloide de révolution tangent à la surface réglée suivant une droite donnée. Pour changer un hyperboloide à une nappe en un paraboloide hyperbolique, il faut que les trois droites qui dirigent le mouvement de la droite génératrice de la premier surface, soient parallèles à un même plan. Par les trois points d'une droite donnée sur une surface réglée, on menera trois plans parallèles qui couperont les trois plans tangens à cette surface aussi donnés suivant trois droites qui seront les directrices d'un paraboloide tangent à la surface réglée. Il y a donc une infinité de séries de paraboloides hyperboliques tangens à la surface

réglée générale suivant une droite donnée de cette surface. Nous allons voir qu'il n'y a qu'une série d'hyperboloides de révolution qui touchent la surface réglée suivant la même droite. L'un des paraboloides hyperboliques tangens à une surface réglée suivant une droite, est très remarquable; c'est celui dont les directrices sont perpendiculaires à la droite de contact. Faisant tourner le paraboloide autour de la droite commune à cette surface et à la surface réglée, il devient normal à cette dernière surface suivant la même droite: d'où suit cette proposition générale:

„Une surface réglée quelconque a pour surface normale, suivant une „droite donnée, un paraboloide hyperbolique qui a pour directrices de sa „génératrice trois normales à la surface menées par trois points de la „droite donnée de cette surface (voyez les élémens de géométrie à trois „dimensions, en 8vo, année 1817, page 56)." Titre: *De l'hyperboloide de révolution tangent à une surface réglée suivant une droite de cette surface.*

On sait (voyez page 67 du traité de géométrie descriptive) que l'hyperboloide de révolution est une surface engendrée par une droite mobile qui tourne autour d'une droite fixe; que la plus courte distance de ces deux droites est le rayon du cercle de gorge de la surface; que toutes les droites de la surface appartiennent à deux séries telles que les droites de chacune d'elles ne se coupent pas, et sont toutes coupées par une droite quelconque de l'autre série; que les droites des deux séries sont également inclinées par rapport au plan du cercle de gorge, s'y projetent suivant des tangentes à ce cercle, et ont leurs parallèles sur un cône droit dont l'axe et le côté sont respectivement parallèles à l'axe de révolution et à la droite génératrice de l'hyperboloide considérée dans une position quelconque. Ces diverses propositions étant admises, on en déduit les deux suivantes:

1.

„Un hyperboloide de révolution est déterminé par ces deux con„ditions de passer par une droite donnée, et par une parallèle à chacune „des deux autres droites aussi données."

Soient A, B, C trois droites données, situées d'une manière quelconque; par un point de l'espace pris à volonté, on mène des parallèles à ces droites, et à partir de ce point, on porte sur les parallèles une longueur arbitraire; ce qui détermine trois points par lesquels on fait passer un cercle, base du cône droit, dont la surface comprend les trois parallè-

les. Ayant mené un plan perpendiculaire à l'axe de ce cône, on y projete les trois droites données A, B, C suivant trois nouvelles droites. Le cercle tangent à ces dernières droites est le cercle de gorge d'un hyperboloide de révolution qui comprend l'une des trois droites A, B, C, et une parallèle à chacune des deux autres droites.

2.

„Étant donnée une droite de la surface réglée générale, et trois „normales en trois points de cette droite, le paraboloide hyperbolique, „dont la génératrice a pour directrices ces trois normales, est le lieu „géométrique des axes de révolution de tous les hyperboloides de révolution „tangens à la surface réglée suivant la droite donnée de cette surface."

Soit A la droite commune à la surface réglée générale et à l'hyperboloide de révolution qui à cette droite pour génératrice, et pour axe une droite quelconque P du paraboloide hyperbolique. Chaque normale à la surface réglée menée par un point de la droite A, est perpendiculaire à cette droite, et de plus coupe par hypothèse l'axe de révolution P; donc elle est normale à l'hyperboloide de révolution. Cet hyperboloide et la surface reglée générale ont donc trois normales communes en trois points de la droite de contact; d'où il suit que le contact des deux surfaces a lieu suivant la droite entière qui leur est commune (voyez le traité de géométrie descriptive, édition 1828, page 96, art. 161).

Paris le 13. fevrier 1832.

P. S. J'ai donné cette année, au cours de géométrie descriptive de la faculté des sciences de Paris, la solution du problème suivant:

Étant données quatre droites formant un quadrilatère gauche, trouver l'arc et le sommet du paraboloide hyperbolique qui contient ce quadrilatère.

27.

Note sur la surface dont l'aire est un minimum entre des limites données.

(Par Mr. *Poisson* à Paris.)

Une des premières applications que Lagrange a faites du calcul des variations, a été la détermination de la surface dont l'aire est un minimum entre des limites données: application très propre à montrer l'avantage de son nouveau calcul sur les méthodes ingénieuses qui l'avoient précédé; car il auroit été difficile de les étendre aux maxima ou minima des intégrales doubles et par conséquent à des questions relatives aux surfaces. L'équation que Lagrange a trouvée est, comme on sait, aux différences partielles du second ordre. Monge l'a intégrée sous forme finie, mais par des considérations qui n'ont pas paru admissibles et qui ont donné lieu à de longues discussions entre Laplace et lui. Mr. Legendre a ensuite obtenu la même intégrale, au moyen d'une transformation applicable à une classe nombreuse d'équations du second ordre*) qui ne peut laisser aucun doute sur l'exactitude du résultat. Malheureusement on ne saurait tirer aucune partie de cette intégrale qui se trouve compliquée de quantités imaginaires, et exprimée par le système de trois équations entre deux variables auxiliaires et les coordonnées courantes de la surface. Mais outre la difficulté qui résulte de cette forme de l'intégrale générale dans laquelle il parait au moins très difficile de déterminer les fonctions arbitraires, il s'en présente une autre relative au nombre de ces fonctions que la question peut comporter.

En effet, le problème de l'aire minima comprend deux questions distinctes: ou bien on donne deux courbes fermées et l'on propose de les joindre l'une à l'autre par une zône de surface, dont l'étendue soit la plus petite possible; ou bien, on ne donne qu'une seule courbe fermée, et il s'agit de trouver une surface telle que l'aire de la portion circonscrite par cette courbe soit un minimum. Lorsque, par exemple, on pratique une ouverture à la surface d'un vase qui contient un liquide, l'aire de la surface par laquelle il faut multiplier la vitesse et la durée de l'écoulement, pour

*) *Traité du calcul intégral de Mr.* Lacroix, *page* 622.

calculer le volume du fluide écoulé, est précisément l'aire minima correspondant au second cas du problème qui présente ainsi une application utile.

Or, dans le premier cas, la question et l'intégrale complette qu'on a trouvée, ont un même degré de généralité; et les deux courbes données déterminent implicitement les deux fonctions arbitraires que cette intégrale renferme. Dans le second cas, au contraire, la courbe donnée, ne peut servir à déterminer qu'une seule fonction arbitraire. L'une de ces fonctions restera donc indéterminée, et l'intégrale aura plus d'étendue que la question quelle doit servir à résoudre. Si la courbe donnée est plane, la surface demandée est le plan même de cette courbe. Si elle est à double courbure, cette surface n'est pas connue a priori; mais elle doit être unique et déterminée; et le problème n'est pas résolu, tant qu'il reste encore quelque chose d'indéterminé dans son équation.

Pour résoudre cette difficulté, j'ai considéré spécialement le cas où la surface demandée ne s'écarte pas beaucoup d'un plan donné. En mettant l'intégrale de son équation aux différentielles partielles sous une forme différente de celle qu'on avoit trouvée, j'ai reconnu que l'expression de l'une des coordonnées courantes, en fonction des deux autres, contient des termes qui deviendroient infinis dans un point de l'aire minima, dans le second des deux cas du problème, et qu'il faut conséquemment les supprimer comme étrangers à la question. Dans le premier cas ces termes conservent une valeur finie dans toute l'étendue de la zône de surface qu'il s'agit de déterminer; en les supprimant donc dans l'autre cas, on devra les conserver dans celui-ci; et de cette manière l'expression de l'ordonnée d'un point quelconque de la surface, se trouve avoir, dans l'un et l'autre cas, le degré de généralité que la question comporte. Ensuite, par la méthode dont j'ai fait usage dans d'autres mémoires, on détermine toutes les quantités arbitraires que contient cette expression, soit au moyen des deux limites données de la zône minima dans le premier cas, soit au moyen de la courbe unique qui circonscrit l'aire minima dans le second cas.

De cette manière la solution du problème est complettement achevée, dans les deux parties qu'il présente et qui sont, quoique dépendantes de la même équation aux différences partielles, deux problèmes distincts, quant à la détermination des fonctions arbitraires.

On donnera dans un autre numéro de ce journal le mémoire dont cette note est un extrait.

28.

Über die niedere Sphärik.

(Von Herrn Prof. *C. Gudermann* in Cleve.)

Bei der Bearbeitung meines Grundrisses der analytischen Sphärik wurde ich aufmerksam darauf, dafs die Sphärik, diese überaus nützliche und lehrreiche, aber auch eben so sehr vernachlässigte Disciplin, noch des gehörigen Grundes und Bodens entbehre, auf welchen sie mit Festigkeit gestützt und wohlgeordnet aufgebauet werden könne. Es wurde der Gedanke lebhaft, dafs eine rein geometrische Behandlung der niederen Sphärik allein im Stande sei, diese feste Begründung hervorzubringen. Auch die sogenannte sphärische Trigonometrie insbesondere, welche wegen der häufigen Bedürfnisse ihrer Anwendung am meisten ausgebildet worden ist, erscheint dem unbefangenen Beschauer nur als eine durch Rechnung aufgelösete geometrische Aufgabe gröfseren Umfanges, und bietet in dieser Gestalt wenig Lehrreiches dar; abgesehen von der hohen Wichtigkeit ihrer Resultate selbst kann sie dem Anfänger kaum zu etwas Anderem dienen, als eine gröfsere Fertigkeit im Rechnen mit trigonometrischen Functionen bei ihm hervorzubringen. Vom Dreiecke selbst erfährt und lernt er während der Rechnung Nichts, die herausgebrachten Formeln sind ihm nur Rechnungs-Resultate, die er auch als solche kaum weiter beachten würde, wenn er nicht wüfste, dafs sie viele Anwendungen gestatten.

Es kann aber die niedere Sphärik, welche es nur mit Haupt- und Neben-Kreisen und Figuren auf der Kugel zu thun hat, die von Kreisen begränzt sind, auf eine mehr geometrische Weise, und zwar auf ähnliche Art behandelt werden, wie die niedere Planimetrie von den alten und neuen Geometern behandelt worden ist. Statt der Rechnung ist dann die Construction das Hülfsmittel. Einige mögen glauben, was auch ich einst glaubte, dafs eine Bearbeitung der niederen Sphärik nach dem bezeichneten Plane kaum ausführbar sei, und gleichwohl ist diese Behandlung sehr einfach, und mit keinen gröfseren Schwierigkeiten verknüpft, als die ähnliche Behandlung der Planimetrie.

Unter dem Titel: „Ausführliches Lehrbuch der niederen Sphärik" wird noch im Laufe dieses Jahres (bei Du Mont-Schauberg

in Cöln), wenn keine erhebliche Hindernisse in den Weg kommen, ein Werk erscheinen, welches nach der vorhin bezeichneten Idee die niedere Sphärik behandelt, und wenn ich nicht irre, fast zu derselben Stufe der Ausbildung gebracht hat, auf welcher die elementare Planimetrie gegenwärtig steht. Auch die sogenannte sphärische Trigonometrie, welche nur einen verhältnifsmäfsig kleinen Abschnitt des Werkes ausmacht, ist in gleicher Weise behandelt worden. Nach einander gehen alle Lehrsätze und Formeln derselben auf dem construirenden Wege in einfacher Weise hervor, und man wird hier, wo man so leicht eine Vergleichung anstellen kann, am deutlichsten die Vortheile dieser Methode erkennen.

Die sogenannten Gaufs'schen Proportionen, um ein Beispiel anzuführen, welche in so vielen Abhandlungen und gröfseren Werken, überall aber als Resultate langer Rechnungs-Combinationen dargestellt worden sind, werden im genannten Werke einer einfachen sphärischen Construction, und zwar auf zweifache Art, unmittelbar entnommen, oder geometrisch nachgewiesen.

Die grofse Einfachheit und Kürze des Verfahrens hat zur Folge, dafs ein grofser Stoff zur Behandlung kommen konnte, und so wird man im genannten Werke sehr allgemeine Gesetze entwickelt finden, welche völlig neu sind, weil auch die entsprechenden Gesetze der Planimetrie vergebens in den von ihr handelnden Schriften gesucht werden dürften.

Um eine Probe der Behandlung vorzulegen, welche den Leser in den Stand setzt, ein Urtheil im Voraus über das Werk zu gewinnen, wähle ich die Entwickelung von ein paar Sätzen, auf welchen die Verwandlung und Theilung der sphär. Figuren beruhet, wobei aber aus leicht zu begreifenden Gründen eine gröfsere Kürze eintreten mag, als an der entsprechenden Stelle in dem auch für Anfänger bestimmten Werke selbst Statt findet.

I. Halbirt ein Hauptbogen mn (Taf. IV. Fig. 1.) zwei Seiten AC und BC eines Dreiecks ABC in m und n, und fällt man von den drei Ecken des Dreiecks die Perpendikel AP, BQ und CR auf mn, so sind diese drei Perpendikel gleich lang, ferner ist der Bogen $mn = \frac{PQ}{2}$, und endlich ist das Dreieck ABC so grofs als das Viereck $APQB$, dessen eine Seite die von mn nicht halbirte Seite des Dreiecks ist.

Da nämlich die Dreiecke APm und CRm, ferner BQn und CRn offenbar congruent sind, so erhellet auf der Stelle, dafs $AP = BQ = CR$ sei; ferner ist $Rm = Pm$ und also $Rm = \frac{PR}{2}$, ebenso $Rn = \frac{QR}{2}$, und also $Rm + Rn = \frac{PR + QR}{2}$, oder $mn = \frac{PQ}{2}$. Endlich ist das $\triangle ABC =$ dem

Vierecke $AmnB + CRm + CRn = AmnB + APm + BQn$ oder $\triangle ABC =$ dem Vierecke $APQB$.

Zusatz 1. Fällt man von der Mitte D der Grundlinie AB ein Loth DE auf mn, so steht DE auch senkrecht auf AB.

Verlängert man die Perpendikel AP und BQ, bis sie sich in X und Y schneiden, so sind diese beiden Gegenpuncte offenbar die sphärischen Mittelpuncte des Hauptkreises mn, und es ist also $YP = YQ = XP = XQ = 90°$, und weil DE auf mn senkrecht steht, so geht seine Verlängerung durch X und Y. Weil ferner $AP = BQ$, so ist auch $XA = XB$, mithin stimmen die Dreiecke XDA und XDB in den drei Seiten überein; sie sind also symmetrisch, und hieraus folgt, dafs DE auf AB senkrecht steht. Schneiden sich mn und AB in ν, so ist also ν das Centrum von $XDEY$ und der Bogen DE das Maafs des Winkels ν.

Aus der Gleichheit der Winkel AXD und BXD folgt ferner, dafs $PE = QE = mn$ sei.

Zusatz 2. Beschreibt man aus X und Y Kreise mit einem Radius, welcher $= XA$ ist, so sind sie Gegenkreise, wovon der eine durch A und B, der andere aber durch den Punct C geht. Aber weil sie Gegenkreise sind, so geht der erste auch durch den Gegenpunct C' von C, und der zweite geht durch die beiden Gegenpuncte von A und B. (In der Figur ist A' der Gegenpunct von A.)

Das Dreieck ACB befindet sich also zwischen zwei Nebenkreisen, welche (in gleichen Abständen vom Hauptkreise mn) mit mn concentrisch (parallel) sind.

Zusatz 3. Wenn die von den drei Ecken eines Dreiecks ABC auf einen Hauptkreis mn gefällten Perpendikel AP, BQ, CR gleich lang sind, so halbirt der Hauptkreis mn zwei Seiten des Dreiecks, und schneidet die dritte Seite in ihrer Verlängerung so, dafs der Durchschnittspunct von der Mitte dieser Seite um einen Quadranten entfernt ist.

Nach Umständen müssen die vorigen Beweise eine leicht zu findende Änderung erhalten, die Sätze selbst gelten aber auch dann noch, wenn einer von den beiden Winkeln A und B im Dreiecke ABC gleich 180° ist, in welchem Falle das Dreieck ACB die Form eines Zweiecks ABA' hat. Der Kürze wegen mag hier diese Bemerkung schon hinreichen.

II. Sind zwei Dreiecke ACB und $AC'B$ in Fig. 2. über derselben Grundlinie AB construirt, und halbirt ein Hauptbogen mn die drei Seiten AC, BC, AC' in m, n, m', so halbirt er auch die vierte Seite BC' in n', ferner ist $mn = m'n'$ oder $mm' = nn'$, und die beiden Dreiecke ACB und $AC'B$ sind gleich grofs.

Fällt man nemlich die Perpendikel AP, BQ, CR und $C'R'$, so ist nach No. I. $AP=BQ=CR=C'R'$ und $mn=\frac{PQ}{2}$, auch ist das Dreieck ACB so grofs als das Viereck $APQB$. Weil aber $BQ=C'R'$ ist, so sind auch die Dreiecke $C'R'n'$ und BQn' congruent, es ist also $Bn'=C'n'$; nun aber folgt eben so, wie oben, dafs $m'n'=\frac{PQ}{2}$, also $mn=m'n'$ sei. Ferner sind die beiden Dreiecke ACB und $AC'B$ dem Vierecke $APQB$ gleich und also selbst gleich.

Zusatz 1. Wenn, wie vorhin, der Bogen mn die Seiten AC und BC halbirt, und das Dreieck $AC'B$ auf dem Hauptkreise mn einen Bogen $m'n'$ intercipirt, welcher $=mn$ ist, so kann leicht bewiesen werden, dafs der Hauptkreis mn auch die Seiten AC' und BC' halbirt, und dafs mithin die Dreiecke ACB und $AC'B$ gleich grofs sind.

Zusatz 2. Wegen der Gleichheit der Perpendikel AQ, BQ, CR und $C'R'$ sind die beiden Dreicke ACB und $AC'B$ zwischen zwei Gegenkreisen enthalten, welche in gleichen Abständen vom Hauptkreise mn damit concentrisch sind. Der eine Kreis geht durch die Puncte A und B und durch die beiden Gegenpuncte von C und C', der andere Kreis geht durch die Puncte C und C' und dnrch die Gegenpuncte von A und B. Die Perpendikel AP, BQ, CR und CR' schneiden sich in den Puncten X und Y, welche die sphärischen Mittelpuncte der drei so eben genannten Kreise sind.

Zusatz 3. Haben die Dreiecke ACB und $AC'B$ über derselben Grundlinie AB gleichen Inhalt, so halbirt ein Hauptkreis mn, welcher die Seiten AC und BC halbirt, auch die Seiten AC' und BC'.

Auf diese Sätze stützen sich nun die Constructionen, wodurch ein sphärisches Dreieck in ein anderes verwandelt wird, und welche also auf drei verschiedene Arten ausgeführt werden können.

III. Wenn in Fig. 1. der Hauptkreis mn die Seiten AC und BC eines Dreiecks ACB in m und n halbirt, die dritte Seite AB aber in ν schneidet, und man $\nu\mu=nm$ und $\nu\lambda=\frac{AB}{2}=AD$ macht, so ist der Hauptbogen $\lambda\mu$ senkrecht auf $\lambda\nu$, und aufserdem verhält sich das Dreieck ACB zur ganzen Kugelfläche, wie der Bogen $\lambda\mu$ zum Umfange eines Hauptkreises.

Zieht man nemlich den Hauptbogen $A\mu$, wovon AB in A' geschnitten wird, so ist nach dem vorigen Satze, wobei man das Zweieck ABA' als ein Dreieck ansieht, das Dreieck ACB so grofs als das genannte Zweieck; ferner ist $A\mu=A'\mu$ und also $A\mu=90°$, wie auch $B\nu=A'\nu$. Nun ist aber $A\lambda=AD+D\lambda=\lambda\nu+D\lambda$ oder $A\lambda=D\nu$, und da $D\nu=90°$ ist, so ist

auch $A\lambda = 90°$, also $A\lambda = A\mu$; daher ist A das Centrum von $\lambda\mu$, und also $\lambda\mu$ senkrecht auf $\lambda\nu$. Ferner verhält sich offenbar das Zweieck $A\lambda A'\mu$ zur ganzen Kugelfläche, wie der Bogen $\lambda\mu$ zum Umfange eines Hauptkreises, und da das Dreieck ACB mit dem Zweiecke gleichen Inhalt hat, so verhält sich auch das Dreieck ACB zur ganzen Kugelfläche, wie der Bogen $\lambda\mu$ zum Umfange eines Hauptkreises. Der Bogen $\lambda\mu$ ist offenbar auch das Maafs des Winkels $\lambda A\mu$.

Zusatz. Der Winkel μAP ist ein rechter. Denn da $mn = PE = QE$ ist, so ist $P\mu = PE + E\mu = \mu\nu + E\mu$ oder auch $P\mu = E\nu = 90°$, und da auch $A\mu = 90°$ ist, so ist μ das Centrum von $XAPY$, also der Winkel $PA\mu$ ein rechter.

Hierdurch ist also die Richtung von $A\mu$ ebenfalls auf eine einfache Art bestimmt, und der Winkel $\lambda A\mu$, welcher sich zu 360° verhält, wie das Dreieck ACB zur ganzen Kugelfläche, kann hiernach jedesmal leicht construirt werden.

Auf die so eben bewiesenen Sätze gründen sich die Constructionen, wodurch Dreiecke und überhaupt sphärische Figuren nach gegebenen Verhältnissen getheilt werden.

IV. Auch die bekannte Formel, nach welcher man den Inhalt $\triangle$ eines Dreiecks ABC aus seinen drei Winkeln A, B, C berechnet, kann nun unmittelbar der geometrischen Construction entnommen werden.

Es sei wieder in Fig. 1. X das sphärische Centrum des Hauptkreises mn und C' der Gegenpunct von C, dann ist $XA = XB = XC'$. Daher ist der Winkel $XAB = C'AB - C'AX$ oder $XAB = C'AB - AC'X$, und $XAB = XBA = C'BA - C'BX = C'BA - BC'X$, und also $XAB = XBA = \frac{C'AB + C'BA - AC'B}{2}$. Da nun aber $C'AB = \pi - A$, $C'BA = \pi - B$ und $AC'B = C$ ist, so ist $XAB = \pi - \frac{A+B+C}{2}$ und also der Winkel $BAP = ABQ = \frac{A+B+C}{2}$. Da ferner der Winkel $PA\mu = 90° = \frac{\pi}{2}$ ist, so ist der Winkel

$$\lambda A\mu = \lambda\mu = \frac{A+B+C-\pi}{2}.$$

Bezeichnet nun r den Radius der Kugel, so ist die Kugelfläche $= 4\pi r^2$; man hat die Proportion

$$\triangle : 4\pi r^2 = \frac{A+B+C-\pi}{2} : 2\pi, \text{ und also } \triangle = (A+B+C-\pi).r^2.$$

Ist also der Kugelradius die Einheit, so ist $\triangle = A+B+C-\pi$, also $\lambda\mu = \frac{\triangle}{2}$. Daher ist $\lambda\mu$ das Maafs für den halben Inhalt des Dreiecks ABC.

In der vortrefflichen Abhandlung: „Verwandlung und Theilung sphärischer Figuren durch Construction" im zweiten Bande dieses Journals (S. 45

u. f. f.) ist der Satz: dafs der Ort der Scheitel aller sphärischen Dreiecke über derselben Grundlinie und von gleichem Flächeninhalte ein bestimmter kleiner Kreis ist, welcher durch die beiden Gegenpuncte der Endpuncte der Grundlinie geht, aus der Formel $\triangle = A + B + C - \pi$ vom Herrn Steiner geometrisch bewiesen worden.

Die vorige geometrische Entwickelung bedurfte einer solchen arithmetischen Formel nicht, welche im Gegentheile aus der geometrischen Betrachtung entnommen wurde, und die Gleichheit des Inhaltes der Dreiecke ist dadurch, dafs jene Formel nicht benutzt worden ist, noch viel evidenter geworden. Da ferner aufser der vom Hrn. Steiner angewandten Construction bei der Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes noch zwei andere Constructionen nachgewiesen worden sind, welche nur ein Ziehen von Hauptbogen, nicht aber ein Beschreiben von Nebenkreisen erfordern, und wodurch also auf eine einfachere Weise dasselbe geleistet wird, so können die mehreren vom Hrn. Steiner am genannten Orte aufgelöseten Aufgaben durch noch einfachere Constructionen aufgelöset werden. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, mag die Auflösung einer solchen Aufgabe hier einen Platz finden.

V. Man soll ein Dreieck ACB in Fig. 3. durch eine Scheitellinie halbiren.

Man construire, wie in No. III. den Bogen PR, welcher sich zum Umfange eines Hauptkreises verhält, wie das Dreieck ACB zur Kugelfläche, indem man AC und BC durch mn halbirt, wovon AB in Q geschnitten wird, und $QP = mn$, $QR = \frac{AB}{2}$ macht. Wird nun PR durch QS halbirt, wovon AC in μ und BC in ν geschnitten wird, und $\mu D = \mu A$, $\nu E = \nu B$ gemacht, so wird das Dreieck durch jede von den beiden Scheitel-Linien BD und AE halbirt.

Zieht man noch eine dritte Scheitel-Linie CF, wodurch das Dreieck ACB ebenfalls halbirt wird, so schneiden sich die drei Scheitel-Linien AE, BD, CF in einem Puncte, was meines Wissens in der vorhin erwähnten Abhandlung vom Hrn. Steiner zuerst geometrisch bewiesen worden ist. Unter den durch das Ziehen der Scheitel-Linien entstandenen Abschnitten der Seiten des Dreiecks giebt es mehrere bemerkenswerthe Relationen, welche hier noch einen Platz finden mögen. Weil die Dreiecke ACE und DCB den Winkel C gemein und gleichen Inhalt haben, so ist $\operatorname{tang}\frac{1}{2}CD . \operatorname{tang}\frac{1}{2}CB = \operatorname{tang}\frac{1}{2}CE . \operatorname{tang}\frac{1}{2}CA$. Solcher Gleichungen giebt es drei, und durch ihre Multiplication findet man

1. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}AF . \operatorname{tang}\frac{1}{2}BE . \operatorname{tang}\frac{1}{2}CD = \operatorname{tang}\frac{1}{2}BF . \operatorname{tang}\frac{1}{2}CE . \operatorname{tang}\frac{1}{2}AD.$

Ferner ist

$$\sin\tfrac{1}{2}\triangle ACF = \frac{\sin\frac{1}{2}AF . \sin\frac{1}{2}CF . \sin F}{\cos\frac{1}{2}CA} \quad \text{und} \quad \sin\tfrac{1}{2}\triangle BCF = \frac{\sin\frac{1}{2}BF . \sin\frac{1}{2}CF . \sin E}{\cos\frac{1}{2}CB},$$

also $\frac{\sin\frac{1}{2}AF}{\cos\frac{1}{2}AC} = \frac{\sin\frac{1}{2}BF}{\cos\frac{1}{2}BC}$; man erhält offenbar noch zwei ähnliche Proportio-

nen, und hieraus folgt

2. $\sin\frac{1}{2}AF.\sin\frac{1}{2}BE.\sin\frac{1}{2}CD = \sin\frac{1}{2}BF.\sin\frac{1}{2}CE.\sin\frac{1}{2}AD.$

Wird diese Gleichung durch die vorige dividirt, so erhält man die folgende:

3. $\cos\frac{1}{2}AF.\cos\frac{1}{2}BE.\cos\frac{1}{2}CD = \cos\frac{1}{2}BF.\cos\frac{1}{2}CE.\cos\frac{1}{2}AD.$

Wird das Product der beiden letzten Gleichungen mit 8 multiplicirt, so erhält man die neue Gleichung

4. $\sin AF.\sin BE.\sin CD = \sin BF.\sin CE.\sin AD,$

und diese drückt gerade aus, dafs sich die drei Scheitel-Linien AE, BD und CF in Einem Puncte schneiden.

Den Beschlufs dieses Aufsatzes machen noch einige Worte über die Sphärographik. Das Studium der Sphärik würde unstreitig mehr Liebhaber gefunden haben, wenn die graphische Darstellung sphärischer Constructionen in einer genaueren Zeichnung wenigere Schwierigkeiten darböte. Es ist aber gleichwohl eine leichte und daher hohle Kugel von mäfsiger Gröfse, auf deren Oberfläche selbst die zusammengesetztesten Constructionen in einer genauen Zeichnung leicht ausgeführt und auch eben so leicht wieder ausgelöscht werden können, leicht zu Stande zu bringen, und es ist in der That auffallend, dafs eine so einfache Idee nicht schon längst zur Ausführung gekommen ist. Eine von mir selbst zu dem Ende angefertigte Kugel entsprach, ungeachtet mancher Unvollkommenheiten in der technischen Ausführung, dem beabsichtigten Zwecke schon so sehr, dafs ich mich bewogen fühlte, einem Mechanicus die Anfertigung eines vollständigen sphärographischen Apparates, welcher nach meiner Angabe aus der Kugel, aus einem sphärischen Lineale, aus einem sphärischen Transporteur etc. bestehen wird, aufzutragen, und ich bin ermächtigt, anzuzeigen, dafs in dem berühmten Lager mathematischer und physicalischer Instrumente, Maschinen und Apparate von J. V. Albert in Frankfurt a. M. der genannte sphärographische Apparat zu haben ist. Ein solcher Apparat ist auch nützlich beim geographischen und astronomischen Studium. In erster Hinsicht leistet die Kugel allein schon wichtige Dienste. Ein Anfänger, welcher die Umrisse der Welttheile einige Male auf eine solche Kugel gezeichnet hat, wird sich ein lebhaftes Bild derselben einprägen, er wird demnächst es eben so machen mit den Gebirgszügen, mit den Hauptflüssen und mit den Begrenzungen der einzelnen Länder, und, allmälig weiter ins Einzelne gehend, wird er sich in kurzer Zeit auf diesem practischem Wege eine umfassende Kenntnifs der Geographie erwerben, welche kaum je wieder aus dem Gedächtnisse verschwinden wird.

Im März 1832.

29.

Analyses des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques.

(Suite du mémoire No. 3. cah. 1., No. 7. cah. 2. et No. 18. cah. 3.)

(Par M. *J. V. Poncelet,* chef de Bataillon du Génie.)

---

211. Pour démontrer, tout d'abord, qu'en effet la courbe est généralement possible sous ces données, ou que l'énoncé ci-dessus ne contient rien d'incompatible avec la nature des lignes géométriques, nous supposerons que ap, bq, cr, ds, ... soient les m transversales considérées, portant respectivement le système des m points p, p', p'', ..., celui des m points q, q', q'', ..., celui des m points r, r', r'', ... et ainsi de suite, lesquels sont tous censés donnés *à priori.* Ces systèmes appartenant donc, par hypothèse, à la même courbe géométrique, doivent, lorsqu'on les combine 3 par 3, 4 par 4 etc. donner lieu à des relations métriques analogues à celle du No. 165. et qui se rapportent respectivement aux différens triangles, aux différens quadrilatères etc. formés par les transversales dont il s'agit.

Mais, d'après la nature même de ces relations, il paraît évident que toutes ne sont pas distinctes, et qu'un certain nombre d'entre elles comportent naturellement les autres, ou peuvent les reproduire quand on les combine convenablement entre elles, par voie de multiplication ou de division.

En particulier, il est clair que les relations qui appartiennent aux quadrilatères, aux pentagones etc., sont toutes comportées par celles qui se rapportent aux simples triangles; et même on peut prévoir que, parmi ces dernières, il en est toujours un certain nombre qui sont comportées naturellement par toutes les autres. Enfin, puisque chacune des relations distinctes et vraiment essentielles permet de construire immédiatement (166., 175. et suiv.) l'un quelconque des points qui s'y rapportent sans recourir au tracé effectif de la courbe, on voit également qu'une partie des m^2 points considérés sur les différentes transversales ap, aq, ar, ... ne sauroient être pris d'une manière entièrement arbitraire, et doivent dépendre des autres suivant une loi indiquée par les relations mêmes dont il s'agit.

212. Afin de légitimer complétement ces différentes assertions, nommons, en général, μ le nombre des transversales considérées; détachons en une quelconque pour la combiner successivement avec les $\mu-1$ autres prises deux à deux, il en résultera $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}$ triangles différens dont les systèmes d'intersections, avec la courbe, donneront lieu à un égal nombre de relations (165.) évidemment distinctes entre elles, puisque les sommets opposés à la transversale qui contient à la fois toutes les bases de ces triangles, seront eux mêmes distinctes entre eux, aussi bien que les segmens qui les concernent dans chaque relation. Or il est facile de se convaincre que ces équations, combinées 3 à 3 dans un certain ordre, par voie de multiplication ou de division et de manière à en éliminer complétement tous les produits relatifs à la transversale dont il s'agit, reproduiront nécessairement les différentes relations qui se rapportent aux triangles formés simplement par les intersections mutuelles des $\mu-1$ autres transversales.

Mais, puisqu'on obtient ainsi le système complet des équations relatives à tous les triangles possibles, il est clair que, par la combinaison mutuelle des précédentes, on obtiendra aussi successivement toutes celles, du même genre, qui peuvent appartenir aux différentes autres figures polygonales formées par les rencontres des m transversales proposées. Donc enfin le nombre des relations véritablement essentielles ou indépendantes, se réduit à $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}$ seulement, et ces équations pourront servir à déterminer un pareil nombre des intersections de la courbe proposée avec nos μ transversales.

Ainsi, par exemple, dans le problème ci-dessus (209.) où le nombre des transversales est précisément égal à celui m qui marque le degré de la courbe, on pourrait se donner, d'une manière tout à fait arbitraire, les m intersections de chacune des deux premières transversales, $m-1$ intersections de la 3e, $m-2$ de la 4e ...., enfin 2 seulement des intersections de la m^e ou dernière; moyennant quoi on devrait pouvoir construire, à l'aide des équations qui se rapportent à ces transversales, toutes leurs autres intersections avec la courbe, lesquelles sont effectivement en nombre $1+2+3....+m-2=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Si le nombre des transversales, au lieu d'être m, était $m+1$, celui des intersections susceptibles d'être déterminées *à priori*, serait $m\frac{(m+1)}{2}$, c'est-à-dire supérieur de $m-1$ unités au précédent, et celui des intersections arbitraires serait simplement augmenté d'une unité; ce qui s'accorde avec les considérations du No. 210.

La suite de ce §. offrira d'ailleurs des exemples de la manière dont on doit traiter les problèmes qui se rapportent à la combinaison de données que nous venons de faire connaître ou à des combinaisons équivalentes.

213. Revenons maintenant au problème du No. 210.: nommons x le nouveau point quelconque, du plan de la courbe, par lequel il s'agit de faire passer cette courbe en même tems que par les m^2 autres points déjà données sur les m transversales ap, bq, ds, ... (211.). Soit ax une dernière transversale arbitrairement menée par ce point, et rencontrant en a, b, c, d, ... respectivement, les précédentes qui contiennent déjà les m intersections p, p', p'', ..., les m intersections q, q', q'', ..., les m intersections r, r', r'', ... etc.; elle viendra déterminer, sur la courbe, de nouveaux points d'intersection x', x'', x''', ..., qui devront être en nombre $m-1$ seulement, puisque cette courbe, elle même, est supposée du degré m.

Pour les découvrir, nous nommerons b', c', d', ... les intersections respectives de la droite ap avec bp, cr, ds, ... respectivement; et, considérant les triangles successifs abb', acc', add', ... comme transversaux de notre courbe (m), nous aurons (165.) cette suite d'équations

$$\frac{(bx')}{(ax')} = \frac{(b'p)}{(b'q)}\,\frac{(bq)}{(ap)}\,\frac{ax}{bx},$$

$$\frac{(cx')}{(ax')} = \frac{(c'p)}{(c'r)}\,\frac{(cr)}{(ap)}\,\frac{ax}{cx},$$

$$\frac{(dx')}{(ax')} = \frac{(d'p)}{(d's)}\,\frac{(ds)}{(ap)}\,\frac{ax}{dx},$$

etc. etc.

Dans lesquelles (ax') représente le produit de tous les segmens ax', ax'', ax''', ..., (bx') le produit de tous les segmens bx', bx'', bx''', ..., (cx') le produit de tous les segmens etc., dont aucun ne se rapporte au point donné x.

214. Ces équations, qui se présentent encore sous la même forme que celles du No. 207. ci-dessus, et dont les second membres ne contien-

nent également que des quantités toutes données, ces équations, dis-je, étant en nombre égal à celui des points inconnus et exprimant des conditions distinctes attendu qu'elles appartiennent respectivement aux $m-1$ transversales bb', cc', dd', ..., ou bq, cr, ds, ..., on peut prévoir, à l'avance, qu'elles sont effectivement aptes à construire géométriquement les $m-1$ points demandés, par des opérations analogues à celles qui ont été exposées pour le cas ci-dessus (262. et 204.), où l'on ne se donnait, en outre de x, que deux ou trois groupes seulement de points de la courbe, situés m par m en ligne droite.

Mais, non seulement ces équations suffisent pour déterminer entièrement, de position, les points x', x'', x''', ..., de plus il n'en existe aucune autre propre à remplir ce but, et qui ne soit une conséquence nécessaire des premières. Car elle ne pourrait qu'être relative encore (212.) à l'un des triangles, à l'un des quadrilatères etc. formés par la transversale arbitraire ax avec les transversales données ap, bq, cr, ..., et l'on retomberait directement sur cette équation, si on combinait convenablement les proposées avec toutes celles qui se rapportent aux propres intersections de ces dernières transversales.

Considérant, par exemple, le triangle bnc formé par la transversale ax avec deux quelconques nbq, ncr, des autres transversales, on aurait

$$\frac{(bx)(nq)(cr)}{(cx)(bq)(nr)} = 1, \text{ ou } \frac{(bx')}{(cx')} = \frac{(bq)(nr)\,cx}{(nq)(cr)\,bx}.$$

De plus, le triangle $b'c'n$, formé par les intersections mutuelles des transversales ap, $nbb'q$, $ncc'r$, donne naturellement

$$\frac{(b'q)(c'p)(nr)}{(b'p)(c'r)(nq)} = 1.$$

Or il est aisé de se convaincre qu'en effet, si l'on divise la première des $m-1$ équations du No. 213., par la seconde, et qu'on multiplie ensuite le résultat par celle qui vient d'être posée en dernier lieu, on retombera précisément sur la précédente relative au triangle bnc d'abord considéré.

215. Avant de passer à la résolution effective du système des équations du No. 213., nous insisterons sur l'importance de cette résolution en général; car, indépendamment des questions des Nos. 207. et 210., elles en embrassent une variété d'autres concernant la description des lignes géométriques et la détermination de leurs intersections avec des droites de position donnée. Par exemple, si on applique les considérations qui pré-

cèdent au problème, sur les intersections des transversales, mentionné vers la fin du No. 212., il paraîtra évident, que, pour la combinaison de données qui s'y trouve admise, l'intersection inconnue de la 3e transversale, les 2 de la 4e, les 3 de la 5e, enfin les $m-2$ de la m^e, seraient déterminées, de proche en proche, par une, par 2, par 3, ..., enfin par $m-2$ équations de la forme de celles qui nous occupent, en regardant d'ailleurs, dans chaque système d'équations, comme connues les intersections déjà déterminées par les systèmes d'équations précédentes.

En général, on voit que, si on connaissait *à priori*, ou si on avait déterminé convenablement, $n+1$ systèmes quelconques d'intersections en ligne droite d'une courbe plane de degré m, et qu'il s'agît de déterminer ses m intersections avec une nouvelle transversale arbitraire, on serait conduit (213.) à n équations distinctes, toujours de la même forme générale, et qui seraient aptes à déterminer n quelconques de ces intersections; de sorte que les $m-n$ autres devraient être assignées *à priori* ou par des conditions équivalentes. C'est ce qui arrive, par exemple, dans les problèmes des No. 198. et suiv. et dans tous ceux que nous avons mentionnés au No. 210., où il s'agit de construire la courbe à l'aide de certains points multiples pris pour pôles d'une suite de transversales dont les intersections distinctes, avec cette courbe, sont considérées comme inconnues.

Le seul cas pour lequel le nombre des équations est précisément égal au nombre des intersections de la transversale arbitraire, répond évidemment à celui où $m+1$ systèmes d'intersections en ligne droite seraient donnés ou connus *à priori*. Mais, comme d'après le No. 212., $m\frac{(m-1)}{2}$ de ces $m(m+1)$ intersections peuvent être déterminées directement par un pareil nombre de relations, on voit que $m(m+1)-m\frac{(m-1)}{2}=m\frac{(m+3)}{2}$ seulement d'entre elles doivent être considérées comme entiérement arbitraires: c'est, en effet, là le nombre total des points ou des conditions indépendantes nécessaires pour fixer entièrement, de forme et de position, toute ligne du degré m, située sur un plan.

Problème général sur la division des lignes droites en parties dont les rapports composés sont donnés.

216. Afin de donner à cette partie de nos recherches, toute l'extension dont elle est susceptible et que mérite son importance, nous nous

proposons de montrer généralement comment $n+1$ points a, b, c, d, ... g, h étant données, à volonté, sur la direction d'une même droite, et n autres points x, x', x'', ... étant simplement définis par les n relations

$$\frac{(bx)}{(ax)}=K,\ \frac{(cx)}{(ax)}=L,\ \frac{(dx)}{(ax)}=M,\ \ldots.\ \frac{(gx)}{(ax)}=P,\ \frac{(hx)}{(ax)}=Q,$$

dans lesquelles K, L, M, ... P, Q sont des nombres assignés *à priori*, ou des rapports homogènes et quelconques de lignes, nous nous proposons, dis-je, de montrer comment, à l'aide de ces données, on peut, de différentes manières, ramener la construction des points x, x', x'', ... à celle d'une courbe, de degré n, contenant tous ces points, et dont le tracé effectif exige seulement qu'on sache déjà construire $n-1$ ou $n-2$ points en ligne droite assujettis à des conditions analogues.

Afin de simplifier un peu les raisonnemens, nous conviendrons, une fois pour toutes *), de désigner par (X) la droite indéfinie qui contient les n points inconnus x, x', x'', ... ainsi que les $n+1$ points donnés a, b, c, d, ... g, h, et généralement par (A) toute transversale ou droite arbitraire contenant a, par (B) toute transversale contenant b, par (C) toute transversale contenant c etc.; ces différentes transversales étant d'ailleurs situées dans un plan unique passant par (X). Enfin nous convenons également de désigner par (AB) l'angle ou le système des deux droites (A) et (B), par (ABC) le triangle formé par la rencontre mutuelle des trois droites (A), (B) et (C), en supposant d'ailleurs que C représente l'intersection de (A) et de (B), A l'intersection de (B) et de (C) etc.

217. *Première solution générale.* Les conventions qui précèdent étant admises, concevons, par l'un quelconque a des points donnés sur (X), la transversale arbitraire (A); prenons à volonté, sur cette droite, n points p, p', p'', ..., distincts de a, pour y faire passer une ligne, du degré n, que nous désignerons par (n) et qui devra contenir, en outre, les n points x, x', x'', ..., lesquels seront ainsi déterminés quand (n) le sera. Par le point b, menons pareillement l'arbitraire (B), et, sur cette arbitraire, prenons les $n-1$ points quelconques q', q'', q''', ... pour y faire passer également la courbe (n); la n^e intersection q, de cette courbe et de (B), sera évidemment déterminée en vertu de la première des équations ci-des-

*) Nous engagerons, de nouveau et instamment, le lecteur de ne pas négliger de décrire les figures dont il est fait mention dans le texte, et sans lesquelles il lui serait ici difficile de suivre nos raisonnemens.

sus. Car, le triangle (ABX) étant considéré comme transversal de (n), donnera la relation

$$1 = \frac{(Bp)(Xq)(Ax)}{(Xp)(Aq)(Bx)} = \frac{(ap)(Xq)(bx)}{(Xp)(bq)(ax)},$$

attendu qu'ici le sommet B du triangle (ABX) se confond avec a et le sommet A avec b.

On aura donc, pour déterminer (166.) le point q sur (B),

$$\frac{(ap)(Xq')(bx)\,Xq}{(Xp)(bq')(ax)\,bq} = \frac{(ap)(Xq')}{(Xp)(bq')}.K\frac{Xq}{bq} = 1,$$

équation dans laquelle il n'y a d'inconnues que Xq et bq.

Si d'ailleurs K était donné en produits de segmens, comme cela a lieu pour la question du No. 207., il est clair (172. et suiv.) qu'on pourrait construire linéairement le point q au moyen de tous les autres. Et il est évident réciproquement, que la connaissance du système des n points q, q', q'', ... et de celui des n points p, p', p'', ..., équivaut à celle du rapport K, et peut parconséquent tenir lieu de la première des équations proposées.

Menons pareillement la transversale arbitraire (C) par c, et prenons, sur elle, les $n-1$ points quelconques r', r'', r''', ... considérés encore comme appartenans à (n); on construira la n^e intersection r, de (n) et de (C), en regardant, à son tour, le triangle (ACX) comme transversal de la courbe (n) dont il s'agit; au moyen de quoi, le système de ces n nouveaux points et des deux précédens, devra encore être censé équivaloir aux deux premières des relations données, on tenir lieu de la connaissance de K et de L.

On continuerait ainsi évidemment tant que le nombre des systèmes de points p, de points q, de points r, ..., de points u, successivement déterminés en cette manière, ou tant que le nombre des droites arbitraires (A), (B), (C), ... (F) qui leur correspondent, ne surpasserait pas $n-1$; mais on ne saurait aller au delà vu que le système des n points x, x', x'', ..., qui doit être censé donné par les équations ci-dessus, réuni aux $n-1$ autres systèmes des n points p, des n points q, ..., des n points u que nous supposons appartenir, ainsi que le premier, à une courbe unique du degré n, ne laissent plus d'arbitraire (214.) que le choix d'un seul et dernier point, dont la connaissance, comme on va le voir, complète entièrement les données graphiques nécessaires pour déterminer cette courbe, et pour ramener son tracé à la résolution de systèmes d'é-

quations analogues aux proposées (211.), mais en nombre inférieur d'une unité; ou, ce qui revient au même, pour ramener ce tracé à celui d'une autre courbe dont le degré serait seulement $n-1$.

218. Pour le démontrer, soit v ce point choisi à volonté dans le plan des droites (X), (A), (B), ...; menons les nouvelles droites vg et vh aux derniers points g et h donnés sur (X); ces droites que, d'après les conventions précédentes, nous nommerons (G) et (H), rencontreront, de nouveau et respectivement, la courbe (n), en $n-1$ points y', y'', y''', ... et en $n-1$ points z', z'', z''', ..., dont la détermination, je le répète, dépendra de la résolution d'une question analogue à la proposée, mais d'un ordre moins élevé.

Considérant, par exemple, la droite (G) ou vg en particulier, on prendra successivement chacun des $n-1$ triangles (GXA), (GXB), (GXC), ... (GXF), pour transversal de la courbe, ce qui donnera lieu à autant de relations distinctes de la forme de celles du No. 213., et qui seront, en effet, aptes à définir les $n-1$ intersections y', y'', y''', ... relatives à la droite dont il s'agit, attendu que les valeurs des rapports $\frac{(gx)}{(ax)}$, $\frac{(gx)}{(bx)}$, $\frac{(gx)}{(cx)}$, ..., qui entreront dans leurs seconds membres, seront toutes données immédiatement par les n équations primitives (216.) qui définissent les points x, x', x'', ... Supposant donc qu'on sache déjà résoudre, pour le degré $n-1$ ou pour $n-1$ équations, le problème général qui nous occupe, et traitant le système des points z', z'', z''', ... comme on vient de le faire pour celui des points y', y'', y''', ..., on connaitra $n+1$ systèmes de n points en ligne droite, relatifs à la courbe (n), lesquels seront en nombre plus que suffisant (211. et suiv.) pour en déterminer les différens systèmes d'intersections avec une droite mobile autour de l'un quelconque de ces points, et ce à l'aide d'une suite d'équations qui se rapportent, elles mêmes, toutes au degré $n-1$.

219. On simplifiera un peu la première partie de ces constructions, celle qui se rapporte à la détermination des points y', y'', y''', ... et z', z'', z''', ..., en remarquant que, puisque les $n-2$ points q', r', s', ... et les $n-2$ points q'', r'', s'', ... ont été pris d'une manière entièrement arbitraire, on peut les choisir respectivement sur les droites (G) et (H) qui joignent le point v aux deux derniers des points donnés, g et h.

En effet, attendu que les $n-1$ points v, q', r', s', ... appartiendront alors à la courbe (n), la droite (G) qui les porte, ne rencontrera plus celle-ci qu'en un seul et dernier point y, que l'on construira immédiatement et linéairement (165. et 172.) en considérant (GXA) comme un triangle transversal de cette même courbe. On construira pareillement le n^e point d'intersection z, appartenant à vh ou (H), par la considération du triangle (HXA); menant enfin la droite yz, que nous nommerons (Y), elle rencontrera (n) en $n-2$ autres points qu'on déterminera, à leur tour, en considérant les $n-2$ triangles (YAB), (YAC), (YAD), ... (YAF) comme transversaux de cette courbe; ce qui donnera, sur le champ, autant d'équations distinctes, de la forme des proposées, mais qui ne se rapporteront plus qu'au degré $n-2$.

La courbe (n) qui, par ses intersections avec (X), donne les n points x, x', x'', ... demandés, devant contenir le système des n points trouvés en dernier lieu sur (Y), ainsi que les $n-1$ autres systèmes de points q, de points r, ... de points u, situés sur les droites respectives (A), (B), (C), ... (F), cette courbe, dis-je, qui doit en outre passer par v, se trouvera complètement déterminée (211. et suiv.) comme dans le cas qui précède, et son tracé sera ainsi ramené à celui d'une série d'autres courbes d'un degré moindre d'une unité que le sien propre, et dont chacune n'exigera, à son tour, que des constructions d'un degré moindre d'une unité, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on soit retombé sur des constructions du second ou du premier degré seulement.

220. *Deuxième solution générale plus simple.* Ces constructions étant encore fort compliquées, on pourra les simplifier notablement, du moins en ce qui concerne le tracé de la ligne auxiliaire (n), si, au lieu de se donner un point ordinaire, tel que v, pour y faire passer cette ligne, on supposait que ce point fût multiple d'un certain ordre; seulement alors il faudrait diminuer, en conséquence, le nombre des droites (A), (B), (C), ... ou des systèmes de points arbitraires qu'elles portent.

Supposant, par exemple, que v soit multiple de l'ordre $n-2$, il est clair que la courbe (n) sera entièrement déterminée (198. et suiv.) par le système des n points x définis par les équations du No. 216., et des n points p de (A), des n points q de (B), construits comme il a été expliqué au commencement du No. 217., de sorte qu'on ne pourra plus se donner arbitrairement aucun autre point pour y faire passer cette courbe.

Parconséquent si, à l'aide de ces deux derniers systèmes de points seulement, du point multiple v et des n équations données qui se rapportent aux $n+1$ points a, b, c, ... g et h, on parvient à déterminer un dernier système de n points r, r', r'', ... situés à l'intersection de (n) et d'une droite quelconque, on sera, par là même, en état de construire tous les points de cette courbe par un procédé qui n'exigera (198. et suiv.) que la répétition d'opérations du premier et du second degré seulement.

Pour prouver la possibilité de déterminer un tel système de points ou un système de points équivalent, montrons d'abord comment on peut construire les deux intersections de la courbe avec chacun des rayons vecteurs vc, vd, ... vg et vh, ou (C), (D), ... (G) et (H), qui sont en nombre $n-1$. Soient, par exemple, y' et y'' les intersections inconnues relatives à (C); on considérera successivement les triangles (CXA), (CXB) comme transversaux de la courbe (n), ce qui donnera deux relations dans lesquelles il n'y aura d'inconnues, que les segmens des points y', y'' dont il s'agit, et ceux des points x, x', x'', ...; remplaçant donc les rapports des produits de ces derniers segmens par leurs valeurs déduites de celles, des équations proposées (216.), qui sont relatives aux points a, b et c, on aura deux équations propres à construire y' et y'', par le tracé d'une ligne qui, d'après ce qui précède (219.), sera simplement du second ordre, et pourra même être construite par des opérations purement linéaires.

Ayant déterminé, de la même manière, le système de deux points z' et z'' situés sur vc, celui de deux points t' et t'' sur vd, et ainsi de suite, on pourra supposer, pour simplifier le reste de la solution, que les points p' et q' qu'on s'était d'abord donnés d'une manière entièrement arbitraire sur (A) et (B), aient été choisis de façon que la direction $p'q'$ passe par le point c, direction que nous désignerons par (C_1) pour la distinguer de (C) ou cv. Cela posé, afin de déterminer les $n-2$ autres intersections de (C_1) avec la courbe (n), on considéra successivement les $n-2$ triangles (CXD), (C_1XE), ... (C_1XG), (C_1XH) comme transversaux de cette courbe; ce qui donnera un pareil nombre d'équations distinctes, propres à déterminer les intersections dont il s'agit, attendu que les rapports des produits relatifs à x, x', x'', ..., pourront encore en être éliminés, au moyen des équations proposées.

Supposant, de même, que la droite (D_1) des points p'' et q'', restés totalement arbitraires, ait été prise, à son tour, de façon à passer le 3me point d, on déterminera pareillement ses $n-2$ autres intersections avec

(n); et l'on voit qu'on pourrait opérer encore ainsi à l'égard d'une troisième droite contenant p''', q''' et passant par e, ce qui permettrait de construire la courbe toute entière par le procédé des Nos. 200. et 201. Mais comme chacune de ces opérations suppose la résolution de $n-2$ équations de la forme de celle du No. 216., il sera plus simple et plus expéditif de se borner à la considération des deux premières droites $p'q'$, $p''q''$ ou (C_1) et (D_1), dont les systèmes d'intersections avec notre courbe (n), jointes à ceux des droites (A) et (B), suffisent pour construire successivement tous les couples d'intersections de cette courbe avec des transversales arbitrairement menées par le point multiple v.

221. Soit, en effet, vu' ou (U) une pareille transversale rencontrant la courbe aux points u' et u''; pour déterminer directement ces points, on imaginera une ligne du second ordre qui les contienne à la fois et passe, de plus, par les 3 points q', p', p'' qui sont connus et dont celui du milieu est à l'intersection de (A) et de (C_1). Cette ligne rencontrera, de nouveau, la droite (B) qui contient tous les points q, q', q'', ... et la droite (D_1) qui contient p'', q'' et d, en deux autres points qu'on déterminera linéairement en considérant, d'une part, le triangle (UAB), d'une autre, le triangle (UC_1D_1) comme à la fois transversaux de (n) et de la ligne du second ordre dont il s'agit; car il en résultera deux couples d'équations, de chacun desquels éliminant les produits de segmens relatifs aux intersections communes u' et u'' de (U) avec les courbes dont il s'agit, on déduira deux nouvelles équations qui ne contiendront plus que les simples rapports des segmens relatifs à chacun des deux points inconnus de la ligne du second ordre. Cette ligne passant, en outre, par les trois autres points q', p' et p'', sera ainsi complètement déterminée, et donnera, par ses intersections avec (U), le couple des points u' et u'' demandés.

Fesant maintenant varier la transversale (U) autour de v comme pôle, on obtiendra, d'une manière assez rapide, la suite de tous les couples de points analogues à u' et u'', qui tracent la courbe (n) dont les intersections x, x', x'', ... avec la droite (X), se trouvent être précisément les n points satisfesant aux équations proposées.

222. *Troisième et dernière solution générale.* Si, au lieu de supposer v un point multiple de l'ordre $n-2$, on le supposait de l'ordre $n-1$, on ne pourrait, au plus, se donner arbitrairement que les n points p, p',

p'', ... situés sur la droite (A) menée à volonté par a; car nous avons vu (203. et suiv.) qu'un tel point multiple, joint aux deux systèmes, de n points, p, p', p'', ... et x, x', x'', ..., dont le dernier doit toujours être censé défini complètement par les n équations primitives, suffisent pour déterminer et même pour construire linéairement la courbe du degré n, qui passe par ces différens points. D'ailleurs, en suivant toujours l'esprit des méthodes que nous avons mis en usage dans ce qui précède, on chercherait à déterminer, au moyen des points arbitraires p, p', p'', ..., du point multiple v et des n équations proposées, un nouveau système de n points de la courbe, situés en ligne droite, lesquels, réunis avec les premiers, serviraient à décrire linéairement cette courbe sans qu'il fût nécessaire de recourir directement aux points x, x', x'', ...

En effet, menant, de v vers les différens points b, c, d, ... g, h, en nombre n, des droites ou rayons vecteurs (B), (C), (D), ... (G) et (H), on déterminera linéairement leurs dernières intersections avec la courbe (n), et qui sont distinctes de v, en considérant successivement les triangles (AXB), (AXC), (AXD), ... (AXH) comme transversaux de cette courbe, et remplaçant, dans les équations correspondantes, les rapports des produits de segmens (ax), (bx), (cx), (dx), ... (hx), par leurs valeurs tirées des équations primitives; car il n'y restera plus d'inconnues que les rapports simples des paires de segmens qui, sur chacun des rayons vecteurs vb, vc, ... vh de ces triangles, appartiennent aux n intersections cherchées, rapports qui seront ainsi donnés immédiatement par chaque équation. Conduisant enfin, par l'un quelconque p des points p, p', p'', ... et par b, je suppose, une nouvelle droite (B_1), les $n-1$ autres intersections π', π'', ... de cette droite et de la courbe seront déterminées par un système d'équations du même genre que les proposées, en nombre $n-1$ et qui seront données par les triangles successifs (XB_1C), (XB_1D), ... considérés, à leur tour, comme transversaux de cette courbe *).

Ayant ainsi toutes les intersections p, p', p'', ... et p, π', π'', ... relatives aux droites (A) et (B), on sera en état de construire linéaire-

*) La question se trouve ainsi ramenée à une autre du degré $n-1$ seulement; mais on la rabaisserait de suite au $(n-2)^e$ degré si, au lieu de prendre les points p, p', p'', ... de (A) totalement arbitraires, on déterminait l'un d'entre eux d'après la condition que l'intersection de pb ou (B_1) avec cv ou (C), par exemple, fût sur la courbe (n). En effet, la même équation qui, d'après ce qui precède, donne cette dernière intersection au moyen des points p, p', p'', ..., servirait aussi à déterminer

ment autant d'autres points de (n) qu'on le voudra, situés sur les différens rayons vecteurs qui partent du point multiple v. Menant, par exemple, la transversale vm, qui rencontre en m et l respectivement les droites (A) et (B_1) dont il s'agit, on sera en état de construire sa nouvelle intersection z avec (n), en ne fesant usage que d'une simple règle; mais, au préalable, il sera nécessaire de déterminer la tangente au point p, qui est commune à (A) et à (B); ce qu'on fera, sans difficulté, à l'aide de la relation même qui, d'après le No. 171., lie le point z à l'intersection correspondante de cette tangente et de mv, intersection que nous nommerons α. En effet, la considération du triangle lmp, dont le sommet p est sur la courbe (n), donne la relation

$$\frac{(mp')}{(np')}\,\frac{(n\pi')}{(l\pi')}\,\frac{lv^{n-1}}{mv^{n-1}}\cdot\frac{lz}{mz}\cdot\frac{m\alpha}{l\alpha}=1,$$

qui servira à déterminer linéairement (172., 174. et 184.) le point α de la tangente en p, si l'on suppose que vl se confonde précisément avec la direction de l'un des rayons vecteurs vb, vc, ... pour lesquels, d'après ce qui précède, z est connu, ou qui servira à construire linéairement z, quand la tangente dont il s'agit aura été construite une fois pour toutes.

Conclusions générales et principales conséquences.

223. Ce qui précède suffit, je pense, pour convaincre nos lecteurs de la possibilité de résoudre, d'une manière purement géométrique, le problème général que nous nous sommes proposé dans le No. 216., et pour montrer la variété des ressources qui sont offertes par l'analyse des transversales, dans toutes les questions où il s'agit de construire le système des intersections d'une ligne géométrique avec une transversale arbitraire de son plan, quand cette ligne est simplement définie par un nombre suffisant de semblables systèmes ou de systèmes équivalens (212. et 215.); ce qui fournit aussi des moyens pour la décrire complètement par points sous ces mêmes données.

On voit qu'en définitive, ces constructions se réduisent à une suite d'opérations ou de calculs qui appartiennent uniquement au premier de-

---

linéairement l'un de ceux-ci au moyen de l'intersection dont il s'agit, censée donnée *à priori*; et, si l'on supposait qu'à son tour, l'intersection de dv ou (D) et de (B_1) fût sur la courbe, on aurait deux équations, de la forme de celles du No. 216., propres à déterminer deux quelconques des points p, p', p'', ... considérés comme inconnus; de sorte que le problème serait alors ramené à la résolution de deux autres des degrés $n-3$ et 2; et ainsi de suite.

gré, ou à la géométrie de la règle; ce qui signifie seulement que les courbes auxiliaires qui, par leurs intersections avec des droites données, servent à déterminer les points qu'on cherche, se trouvent elles mêmes construites à l'aide d'opérations purement linéaires. Or cette circonstance paraît tenir essentiellement à ce que les relations métriques qui définissent les inconnues, se présentent toutes sous la forme de celles que nous avons nommées ailleurs *projectives*, et spécialement de ce que les segmens ou distances qui y entrent, constituent une fonction symétrique de produits homogènes.

224. La solution que nous avons présentée en dernier lieu (222.), nous paraît d'ailleurs aussi simple et aussi rapide que le comporte la nature du problème proposé; car elle ramène, de suite, la recherche de n points inconnus x, x', x'', ... à celle de $n-1$ autres points π', π'', ..., dépendans d'une question du même genre, mais d'un degré inférieur d'une unité, et qui, étant une fois trouvés, permettraient de construire les proposés par le tracé d'une courbe auxiliaire de degré n. Mais, comme ces $n-1$ points π', π'', ... exigeraient, à leur tour, la détermination de $n-2$ autres points analogues, et le tracé linéaire d'une ligne de l'ordre $n-2$ et ainsi de suite, on voit qu'en remontant de proche en proche, on fera dépendre la solution du problème d'un ou de deux derniers points qui exigeront le tracé d'une ligne droite ou d'une section conique, et qui serviront à en déterminer trois autres par le tracé linéaire d'une ligne du 3e ordre, quatre autres par le tracé pareil d'une ligne du 4e ordre, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on soit arrivé aux n points proposés, qui eux-mêmes réclameront le tracé d'une ligne de l'ordre n.

Ces différentes opérations, qui s'exécutent toutes avec la règle, auront donc nécessité le tracé de $n-1$ courbes géométriques dont les degrés respectifs sont représentés par la série des nombres naturels compris entre 1 et n *). Or nous ne voyons pas, pour le moment, comment il serait possible de remplacer, généralement, cette suite de tracés assez pénibles par le tracé unique d'une courbe de degré n; et, quoique, par elle-même, la chose ne répugne en aucune manière, nous devons cependant avouer que nous l'avons jusqu'ici vainement tentée, même pour la question par-

*) D'après les observations de la note du No. 222., le nombre des courbes auxiliaires pourra être réduit d'environ moitié.

ticulière du No. 213., où le système des équations à résoudre n'exprime autre chose que la dépendance purement descriptive qui lie les $m-1$ points inconnus aux m^2+1 points donnés, et en vertu de laquelle tous ces différens points appartiennent à une même ligne géométrique du degré m.

La complication dont il s'agit, paraît, du reste, tenir au fond même de la question, et à ce que les données ou conditions graphiques n'en seraient pas assez explicitement définies sous le point de vue purement géométrique. Car, par exemple, dans le problème du No. 213. dont il vient d'être parlé, la complication n'a pas lieu lorsque les m^2 premiers points donnés, situés m par m en ligne droite, sont immédiatement définis par la condition de se trouver sur un second système de m droites, ou, en général, sur une courbe géométrique du même degré que la proposée, et elle n'a pas lieu, non plus, pour le problème du No. 206., où il s'agit de déterminer le système complet des tangentes en un point multiple d'une courbe, dont l'indice est le plus élevé possible par rapport à son degré. Nous verrons en effet, par la suite, que dans ces cas particuliers, la question, bien qu'elle dépende toujours d'un système d'équations analogues, peut se résoudre néanmoins par le tracé d'une seule courbe auxiliaire dont le degré est marqué par le nombre des points qui sont à déterminer.

225. Quant au présent, nous devons nous borner à tirer quelques conséquences générales des recherches qui précèdent, dans lesquelles nous n'avons prétendu qu'indiquer rapidement des moyens généraux de solution, propres seulement à montrer la possibilité et l'étendue d'une classe de questions qu'on serait volontiers tenté de regarder comme tout à fait en dehors du domaine de la simple géométrie, quant aux moyens de solution.

En effet, il résulte clairement, des discussions auxquelles nous nous sommes livrés dans ce §., que pour m systèmes de m points, situés sur un égal nombre de droites s'entrecoupant toutes dans un même plan et qui, pris trois par trois, satisfont à la relation métrique du No. 165., on peut mener une infinité de lignes géométriques du degré m; mais que, si un dernier point est donné arbitrairement pour y faire passer la courbe, cette courbe sera entièrement déterminée de forme et de position, aussi bien que ses intersections avec une transversale quelconque passant par ce point ou même avec une transversale entièrement arbitraire. Il résulte de là évidemment que, „si un nombre quelconque, supérieur à m, de systè-

„mes de m points, situés sur un égal nombre de droites comprises dans „un plan unique, sont tels que, considérés trois par trois, il satisfassent „à la relation dont il vient d'être parlé, tous ces points appartiendront „nécessairement à une seule et même ligne géométrique d'un degré pré„cisément égal à m, et que, si par m quelconques de ces systèmes de „points et par l'un des points restans, on fait passer une ligne de ce de„gré, elle passera nécessairement aussi par tous les autres:" sur quoi il est important de remarquer qu'au lieu d'épuiser toutes les combinaisons possibles de droites ou systèmes de points, on peut se borner, d'après le No. 212., à un certain nombre limité de combinaisons essentielles et vraiment distinctes.

Cette proposition est évidente par elle même, pour le cas de $m=1$, où il n'y a qu'un seul point sur chacune des transversales; car les relations qui leur appartiennent, expriment que ces points, pris trois par trois et dans un ordre quelconque, sont situés sur autant de lignes droites; mais il était nécessaire de la démontrer rigoureusement pour tous les autres cas, sans en excepter même celui de $m=2$, puisqu'il n'est pas certain, *à priori,* qu'un nombre quelconque de couples de points appartenans à autant de droites tracées dans un même plan, sont situés sur une ligne du second ordre unique, bien que, pris 3 par 3, ils déterminent complètement (145. et suiv.) une semblable ligne.

226. Ainsi donc les systèmes de relations métriques qui ont la forme et sont assujetties aux conditions indiquées au No. 165., présentent véritablement tous les caractères d'une définition complète des lignes géométriques, et qui suffit pour mettre à même d'en construire toutes les parties sous des données convenables. Mais, attendu que ces relations sont susceptibles de subir des changemens de forme et de devenir même complètement illusoires pour certaines positions des transversales ou du système des points donnés (170. et suiv., 187. et suiv.), il importe de remarquer que les relations qui en tiennent lieu, ou qui en sont, d'après nos principes, la traduction plus ou moins immédiate, ne cessent pas de définir, de déterminer même géométriquement, les lignes ou systèmes de points auxquels elles s'appliquent; car toutes les relations purement descriptives, toutes les constructions de points et de lignes auxquelles nous avons été conduits dans ce paragraphe, en raisonnant dans les hypothèses les plus générales sur la position des transversales, toutes ces constructions et re-

lations, dis-je, demeurent, en vertu de la loi de continuité, exactement applicables aux différens états particuliers de la figure, sauf les modifications que réclament les changemens de position des points ou des lignes, et qu'indique, à l'avance, cette même loi.

Cette conséquence d'ailleurs peut être établie directement et sans recourir au principe de continuité, en reprenant la série de nos premiers raisonnemens, et en y remplaçant immédiatement les relations primitives par leurs transformées, tout en changeant si cela est nécessaire, le mode de leurs combinaisons et des opérations auxquelles elles donnent lieu, conformément à l'exemple qui en a été offert dans le No. 195. du précédent §.

227. Considérons maintenant, sur un plan, un système quelconque de points, analogue à celui qui vient d'être défini, ou, si l'on veut, considérons le système complet des intersections réelles ou idéales d'une ligne géométrique, de degré m, avec des transversales rectilignes arbitraires, en nombre quelconque μ, inférieur ou supérieur à m. Supposons que, parmi ces $m\mu$ points, μn quelconques situés n par n sur nos μ transversales respectives, aient entre eux la même corrélation de position que le système des proposés, ou, si l'on veut encore, appartiennent à une certaine ligne géométrique du degré n, il résultera, de nos principes, que les $\mu\,(m-n)$ intersections restantes et qui se trouvent distribuées $m-n$ par $m-n$ sur ces μ transversales, seront elles mêmes à une courbe du degré $m-n$.

En effet, si l'on considère l'un quelconque, abc, des triangles formés par les intersections mutuelles des transversales dont il s'agit, on aura, par hypothèse, entre les segmens qui déterminent, sur ces côtés, les $3m$ points qui sont censés appartenir à la courbe (m), une relation métrique de la forme

$$\frac{(ap)\,(bq)\,(cr)}{(bp)\,(cq)\,(ar)} = 1,$$

en supposant, du reste, que l'on conserve les dénominations et conventions du No. 165. Et, puisque $3n$ de ces mêmes points, situés n par n sur les côtés du triangle abc, sont censés appartenir à une autre ligne du degré n, on aura une seconde relation, de la même forme, entre les segmens qui leur correspondent, et en vertu de laquelle tous ces segmens disparaîtront, comme facteurs, des produits du numérateur ou du dénominateur de la précédente; laquelle se réduira conséquemment à une

autre relation toujours de même forme et exprimant, ainsi que toutes ses analogues relatives aux différens triangles formés par nos transversales, que les $\mu(m-n)$ points restans sont effectivement à une courbe du degré $m-n$, comme il s'agissait de le démontrer. De là aussi ce théorème général.

Si parmi les μm intersections d'une courbe géométrique de degré m tracé sur un plan et du système de μ transversales rectilignes arbitraires, μn se trouvent situées sur une autre courbe qaelconque du degré n, les $\mu(m-n)$ intersections restantes seront à une troisième ligne géométrique du degré $m-n$.

228. Considérant, par exemple, le système complet des tangentes aux intersections d'une courbe plane, du degré m, avec une droite arbitraire, il résulte, de ce principe général, que *les $m(m-2)$ intersections nouvelles de ces tangentes avec la courbe, seront sur une autre courbe géométrique du degré $m-2$ seulement.*

D'où il suit aussi, en vertu du principe de continuité, que *le système total des m asymptotes d'une courbe géométrique du degré m, rencontrent de nouveau cette courbe en $m(m-2)$ points qui appartiennent à une autre courbe géométrique dont le degré est $m-2$ seulement.*

Supposant la droite ci-dessus des points de contact, menée par un point multiple quelconque de l'ordre n, le théorème subsistera toujours, pourvu que l'on comprenne les n tangentes en ce point multiple, au nombre des m tangentes aux intersections de la courbe avec la transversale arbitraire. Qu'il s'agisse, entre autres, d'un point double et d'une ligne du 4e ordre, on sera conduit à ce corollaire:

Si par un point double d'une ligne du 4e ordre, on mène une transversale arbitraire, et deux tangentes par les intersections nouvelles de cette transversale avec la courbe, le système de ces tangentes et du couple de celles qui répondent au point multiple ira rencontrer cette courbe en six derniers points, distincts des premiers et qui appartiendront simplement à une ligne du second ordre.

Cette proposition aurait lieu, d'une manière analogue, dans le cas où la transversale passerait par un second point multiple ou s'éloignerait à l'infini etc. Mais en voilà assez, pour le moment, sur ces corollaires de notre théorème général, que nous verrons, dans la seconde partie de ces recherches, s'etendre aux intersections quelconques des lignes et des surfaces géométriques, et dont nous avions, dès l'année 1817, appliqué

les conséquences aux propriétés de situation des lignes du 3e ordre, que nous avons fait connaître à la fin du §. 1.

§. IV.

Des lignes géométriques en tant que définies ou construites par les faisceaux convergens de leurs tangentes. — Recherches et éclaircissemens sur divers points de la théorie des polaires réciproques.

Considérations préliminaires.

229. Toutes les relations métriques ou descriptives qui nous ont occupé dans le précédent paragraphe, étant, de leur nature, projectives, elles peuvent immédiatement (*Polaires réciproques*, No. 120. et suiv.) être traduites en d'autres qui concernent uniquement les faisceaux de tangentes des lignes géométriques, issues des différens points du plan de ces lignes. Ainsi on déduira, de nos recherches, des procédés généraux et purement linéaires pour construire autant de ces systèmes qu'on le voudra, quand on s'en sera donné arbitrairement un nombre suffisant pour définir complètement la courbe, et qui permettra de construire celle-ci par l'enveloppement de ses tangentes, d'une manière analogue à celle par laquelle nous avons vu qu'on pouvait construire les lignes géométriques au moyen de leurs systèmes d'intersections avec des droites variables. On pourra même, si on le désire, déterminer les points de contact de chaque faisceau à l'aide des faisceaux de tangentes, donnés *à priori*, par des procédés inverses de ceux (171., 175. et 184.) qui serviraient à tracer les tangentes aux intersections d'une ligne du degré m, avec une droite arbitraire, quand cette ligne est donnée par ses autres systèmes d'intersections pareils etc., etc.

D'après les exemples que nous avons déjà offerts dans les No. 163. et 185. des deux premiers §., nous croyons assez peu utile d'insister sur les résultats auxquels on parviendrait ainsi. Mais, puisque nous en sommes venus à parler du tracé effectif des courbes planes par leurs systèmes de tangentes issues de points donnés, c'est le cas de présenter quelques réflexions spéciales relatives à la nature, au degré de ces courbes et à l'espèce de corrélation et de réciprocité qui les lie aux lignes géométriques définies ou construites par leurs systèmes d'intersections avec des droites données; sujet en lui même épineux, qui à suscité des doutes et que personne, ce nous semble, n'a encore abordé avec franchise depuis ce que nous en

avons nous même écrit, en 1817, dans le tome VIII. des *Annales de mathématiques* (pag. 211. et suiv.) et particulièrement, en 1824, dans le *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* (Voy. No. 65. et suiv.); mais dont toute la difficulté réside, comme on le démontre en ces endroits, dans la manière d'envisager et de poser, pour chaque cas particulier, la question relative au nombre et à l'espèce des tangentes issues des mêmes points et qui appartiennent à une courbe plane de degré ou d'espèce donnés.

230. On peut voir, dans les *Annales de mathématiques* (tome XVII., XVIII. et XIX.) les singulières inadvertances commises par d'estimables géomètres, faute d'avoir donné une attention assez sérieuse à de telles questions, dont la solution, sous le point de vue général et géométrique, ne laisse véritablement ni doute ni obscurité dans l'esprit, et ne semble dépasser les forces actuelles de l'analyse algébrique qu'à cause des éliminations laborieuses qu'elle entraîne, et des facteurs singuliers ou étrangers qui compliquent inévitablement les résultats du calcul *).

En signalant ces inadvertances, dans deux articles insérés à la page 109. tome VIII., et 292. tome IX. (années 1827 et 1828) du *Bulletin des sciences mathématiques* de Mr. *de Férussac*, je donnai à leurs auteurs l'occasion de les rectifier et d'approfondir une matière digne de fixer l'attention de tous les géomètres analystes; mais cette provocation, comme on peut le voir à la page 24. tome IX. du même *Bulletin*, ou à la page 152. du tome XVIII. des *Annales de mathématiques*, ne produisit qu'une rectification de mots par laquelle ces mêmes auteurs convinrent de nommer courbe ou surface de m^e *classe*, celle à laquelle, d'un même point ou d'une même droite, on peut généralement mener m tangentes ou m plans tangens, et cela sans rien prononcer sur la relation qui subsiste entre le *degré* et la *classe;* ce qui implique une double définition et ne lève point la difficulté quant au fond. L'inadvertance de nos auteurs consistait effectivement à avoir confondu la classe avec le degré, ou à supposer égaux le nombre des intersections d'un lieu avec une droite et le nombre des tangentes ou des plans tangens qu'on peut lui mener d'un même point ou d'une même droite, guidés en cela, sans doute, par une pure analogie

*) Voyez nos réflexions, à ce sujet, dans l'article déjà cité du tome VIII. des *Annales de mathématiques*, page 223. et suiv.

de ce qui se passe dans les lieux du second degré où la réciprocité est parfaite. On peut même voir, par un passage de la page 303. tome IX. du *Bulletin des sciences*, où il est rendu compte d'un mémoire de géométrie inséré dans le tome XVIII. des *Annales de mathématiques*, que nos recherches, sur cette matière, n'avaient pas suffi pour dissiper toute incertitude au sujet de l'erreur commise, puisqu'on y dit textuellement, en effet, „qu'il n'est pas certain que le degré et la classe d'une courbe soient „deux choses différentes, et que MM. *Gergonne* et *Bobillier* n'ont adopté „cette distinction que provisoirement et seulement à cause des *doutes* éle„vés sur ce sujet par Mr. *Poncelet*."

231. Cependant, lorsque je relevai cette erreur aux endroits cités, je ne manquai pas de rappeler mes premières recherches sur la théorie de la réciprocité, dans lesquelles, ce me semble, j'ai prononcé d'une manière assez affirmative sur la relation qui lie, en général, le degré ou le nombre des intersections en ligne droite au nombre des tangentes issues des mêmes points. Je ne puis m'expliquer cette obstination à nier des faits mathématiques que par un autre passage du *Rapport* de Mr. *Cauchy* *), sur mon *Mémoire relatif à la théorie des polaires réciproques*, passage dans lequel il est dit que, „pour mettre hors de doute la conclusion du „No. 66. de ce mémoire, sur le degré de la polaire réciproque d'une „courbe donnée, il paraîtrait nécessaire de substituer, à la démonstration „géométrique de Mr. *Poncelet*, une démonstration analytique." Or le genre de raisonnement que j'ai mis en usage dans cet endroit, me semble tout aussi rigoureux que peuvent le désirer ceux qui ne sont pas des admirateurs exclusifs des méthodes purement algébriques.

En effet j'avais démontré, à la page 214. du tome VIII. des *Annales de mathématiques*, en me fondant sur quelques données de calcul fort simples et en elles mêmes incontestables **), que les courbes planes de degré m, ont, en général et au plus, $m(m-1)$ tangentes issues d'un point arbitrairement donné et dont les points de contact se trouvent tous situés

---

*) Voyez ce rapport imprimé à la page 227. du tome IX. du *Bulletin des sciences mathématiques.*

**) Mr. *Bobillier* a démontré, depuis, ce théorème par une marche analytique générale et fort élégante dans le tome XIX. des *Annales,* No. 4. d'Octobre 1828; ce qui n'a pas empêché le savant rédacteur de ce recueil de manifester, dans une note annexée au mémoire de Mr. *Bobillier*, des doutes sur la légitimité de nos conclusions, observant que le nombre $m(m-1)$ n'est qu'un simple *maximum*, une limite que le

sur une ligne du degré $m-1$ seulement: ce principe une fois admis, on en conclut inévitablement que les réciproques polaires de pareilles courbes sont d'autres courbes du degré $m(m-1)$ en général et au plus.

A la vérité, j'ai négligé de rapporter ou même de rappeler, dans le No. 66. de mon mémoire, cette démonstration analitique relative au nombre des tangentes; mais j'avais cru pouvoir m'en dispenser, attendu qu'elle me semblait à la portée de tout le monde, et que la proposition analogue, sur le degré des surfaces coniques circonscrites à une surface de degré donné, avait déjà été signalée par *Monge*, à la page 15e de son *Application de l'analyse à la géométrie*, ouvrage qui est généralement connu et qui sert de base à l'enseignement des élèves de l'École polytechnique. D'ailleurs la démonstration purement géométrique de ces mêmes propositions, repose sur des considérations qui ressortent essentiellement de la théorie générale des courbes et surfaces des divers ordres, que nous ne voulions nullement entamer à propos de la doctrine des polaires réciproques, et qui trouvent leur place naturelle dans ce §., spécialement consacré à répandre un jour nouveau sur les principes qui servent de fondement à cette doctrine.

232. La justice veut aussi qu'avant d'entamer cette matière et après les réflexions critiques qui précèdent, nous déclarions que les géomètres dont nous avons parlé, sont à peu près complètement revenus de leur erreur, ou plutôt des doutes qu'ils avaient élevés contre le résultat de nos premières demonstrations, en reconnaissant, sur des exemples particuliers et par les propres ressources de l'analyse algébrique, qu'il est des courbes planes, du degré m, qui ont réellement $m(m-1)$ tangentes distinctes issues d'un même point, ou dont la polaire réciproque s'élève réellement au degré $m(m-1)$ *). Mais on n'en doit pas moins s'étonner que, dans l'état actuel de nos connaissances mathématiques, il ait fallu, à des savans d'une habileté incontestable, plusieurs années pour se rendre à l'évidence d'un fait géométrique en lui même fort simple, et qu'avec

---

nombre des tangentes pouvait ne jamais atteindre; il déclare même ne pas bien concevoir une courbe qu'une droite ne pourrait couper qu'en trois points seulement, et à laquelle néanmoins on pourrait mener six tangentes d'un même point de son plan. Voy. la page 285. tome X. du *Bulletin des sciences*, où il est rendu compte de ce No. des *Annales*.

*) *Annales*, tome YIX., Janvier 1829; *Bulletin des sciences mathématiques*, tome XI. page 91. et 92.

un peu d'attention, ou avec de légers calculs, ils eussent pu s'approprier tout d'abord; mais tel est le résultat de l'espèce de défaveur et de prévention qui s'attache aux idées et aux notions les plus évidentes, quand elles contrarient notre manière de voir et les préjugés que nous nous sommes formés sur l'état d'une question.

Montrons actuellement comment, par la voie purement intuitive de la géométrie, on peut découvrir le nombre des tangentes que, d'un même point, il est, en géméral, possible de mener à une ligne du degré m donnée sur un plan; ce que, dans notre article du tome VIII. des *Annales de mathématiques*, nous n'avions, je le répète, établi qu'avec le secours de l'analyse algébrique, dont la marche, parfois plus expéditive, a le désavantage de ne pas toujours éclairer parfaitement l'objet des questions.

Transformation des courbes, appliquée à la recherches du nombre des tangentes issues des mêmes points et de la loi qui les lie aux points singuliers.

233. En supposant qu'on mette la figure en perspective ou projection conique sur un nouveau plan, de façon que le point donné passe à l'infini, ce qui peut avoir lieu d'une multitude de manières sans rien changer au degré de la courbe ni au nombre des tangentes, la question sera tout d'abord ramenée à celle où il s'agirait de conduire, à cette courbe ses différentes tangentes parallèles à une direction donnée.

Cela posé, conduisons à notre nouvelle courbe, censée du degré m, une suite de transversales parallèles à la direction donnée; elles rencontreront respectivement cette courbe en un nombre m de points réels ou imaginaires, mais en général distincts et à distance donnée; puisque, généralement aussi, ces transversales ne sont ni tangentes ni parallèles aux branches de cette même courbe, la direction donnée étant censée quelconque. Parconséquent le nombre total des distances qui séparent, deux à deux, ces m intersections, c'est-à-dire le nombre des cordes distinctes qui, dans notre courbe (m), répondent à une même transversale, est généralement et au plus $\frac{m(m-1)}{2}$; et, attendu que, pour toute transversale tangente à (m), les deux intersections confondues en une seule au point de contact, répondent à une corde nulle, on vait que la question qui nous occupe revient précisément à decouvrir toutes les positions de la transversale parallèle à la direction donnée, pour lesquelles cette circonstance particulière arrive.

A cet effet, traçons à volonté, dans le plan de (m), un *axe fixe* qui rencontre, à la fois, toutes les transversales parallèles dont il s'agit; portons, sur chacune de ces transversales et à partir de cet axe, toutes les cordes correspondantes; et, attendu que le sens de ces cordes n'est pas déterminé *à priori*, portons chacune d'elles à la fois au dessus et au dessous de l'axe fixe; nous obtiendrons ainsi, pour chaque transversale, $2m\frac{(m-1)}{2} = m(m-1)$ nouveaux points, qu'on pourra considérer comme appartenans à une certaine ligne géométrique, et dont la suite, relative aux différentes transversales, formera effectivement une courbe continue comme l'est elle même, par hypothèse, la proposée, et qui se composera d'un nombre $m(m-1)$ de branches toutes réelles et distinctes, si la première en a, elle même, un nombre m de semblables.

En observant d'ailleurs ce qui a lieu pour le cas particulier où la ligne proposée serait formée par un système de m lignes droites, et spécialement celui où elle se réduirait au système de deux droites seulement ou d'une ligne quelconque du second ordre, on reconnoîtra facilement la nécessité d'avoir égard au double sens de chaque corde pour le tracé complet de la *dérivée*, et généralement on verra, par la loi de continuité et en suivant avec attention le mouvement de chacun des points générateurs de cette dérivée par rapport à ceux de la proposée, qu'effectivement tous les points déterminés doublement comme on vient de le dire, sont assujettis à la même loi ou appartiennent à un même mode de génération continu.

234. Il résulte, de ces observations et de ce que chaque transversale parallèle à l'axe fixe rencontre généralement la dérivée en un nombre $m(m-1)$ points et non d'avantage, que cette courbe est nécessairement aussi du degré $m(m-1)$, et qu'elle ne saurait être d'un degré plus élevé. C'est là, en effet, une conséquence nécessaire du principe de continuité (voy. *l'introduction générale*), qui veut d'ailleurs qu'on tienne compte aussi bien des intersections idéales que des intersections réelles, et qu'on regarde comme distinctes celles qui se trouvent confondues deux à deux, trois à trois etc. Donc enfin la ligne que nous venons de construire dans toutes ses parties et qui est symétrique par rapport à l'axe fixe, rencontrera généralement cet axe en $m(m-1)$ points et non d'avantage, auxquels correspondront également $m(m-1)$ transversales parallèles ou ordonnées, qu'on pourra considérer comme autant de tangentes de la pro-

posée, attendu que, pour chacune d'elles, l'une au moins, des $m(m-1)$ cordes de cette proposée, sera nulle.

Tel est donc aussi généralement le nombre des tangentes demandées, nombre absolu et invariable, si l'on entend comprendre, comme nous le faisons en vertu de la continuité, les tangentes imaginaires, les tangentes situées à l'infini au nombre de celles dont il s'agit, et si nous comptons pour deux, pour trois celles qui répondent à des intersections doubles, triples de la dérivée avec l'axe fixe d'où se mesurent les ordonnées, intersections qui correspondent au cas où cette dérivée serait tangente à cet axe ou aurait, sur ce même axe, des points de croisement, de rebroussement, des points isolés ou conjugés etc.: de tels points qu'on peut comprendre indistinctement (205.) sous la dénomination générale de *points multiples*, ont en effet, pour caractère géométrique, que toute droite qui y passe contient une ou plusieurs des intersections de la courbe, confondues en une seule en ces mêmes points.

235. On peut juger, d'après cela, que la recherche du nombre effectif des tangentes distinctes de la courbe proposée et qui sont parallèles à une droite ou issues d'un point donné, se lie intimement à celle des points multiples mêmes de cette courbe. La discussion montre, en effet, que tout point de cette espèce correspond, dans la dérivée, à un point semblable situé sur l'axe de cette dérivée, et que cet axe n'en peut contenir aucun, de ce genre, auquel ne réponde réciproquement un point pareil dans la primitive. On remarquera aussi qu'attendu la symétrie de la dérivée par rapport à l'axe, ce dernier ne peut la toucher réellement qu'en des points où deux branches au moins viennent elles-mêmes se toucher suivant cet axe. C'est ce qui arrive, par exemple, pour les points de rebroussement, de différente espèce, appartenans à la courbe primitive; car, non seulement de tels points demeurent des points de rebroussement du même ordre dans la dérivée, mais en outre, ils ont l'axe fixe pour tangente; ce qui suppose au moins trois points confondus en un seul sur cet axe, lesquels répondent parconséquent à un égal nombre de tangentes, de la courbe primitive, superposées entre elles.

En général, la discussion, pour ce cas, prouve qu'à tout point de rebroussement simple et à deux branches, duquel on peut dire et démontrer rigoureusement que la tangente en ce point rencontre généralement la courbe en p points confondus en un seul, de sorte que, le degré de

cette courbe étant m par exemple, le nombre des intersections distinctes ou indépendantes du point dont il s'agit, soit $m-p$, la discussion prouve, disons nous, qu'à un tel point correspondent au moins p tangentes confondues en une seule, si le rebroussement est de la première espèce et, $p-1$, s'il est de la seconde.

Les points d'inflexion simple, ou qui sont tels qu'à toute droite arbitrairement menée par ces points, correspondent, sur la courbe, autant d'intersections distinctes qu'il est marqué par son degré, ces points dis-je, ne donnent évidemment pas lieu à des tangentes superposées, à moins que la transversale se confonde avec la tangente même du point considéré, auquel cas elle représente deux tangentes réunies en une seule, tout comme la tangente au point de rebroussement simple et de première espèce en représente *quatre*, et la tangente au point de rebroussement de la seconde espèce *cinq*. Mais nous ne poursuivrons pas cette discussion épineuse, et qui ne nous fournirait que des données fort incertaines relativement aux points de rebroussement ou d'inflexion d'espèces supérieures.

236. Quant aux points multiples qui répondent au croisement véritable des branches de la courbe proposée ou primitive, on peut, sans aucune incertitude, fixer généralement le nombre des tangentes superposées qui leur correspondent dans la dérivée, en observant que, si p est le nombre des branches distinctes dont il s'agit ou des tangentes à ces branches, cette dernière courbe devra également avoir, au point correspondant de l'axe, $p(p-1)$ branches distinctes passant par ce point, et qui indiqueront un pareil nombre de tangentes superposées de la courbe primitive, passant par le point multiple qui lui est relatif.

S'il s'agit d'un point conjugé dont l'orde de multiplicité soit p, c'est-à-dire duquel on puisse dire que p branches se trouvent confondues en ce point, le nombre des tangentes qui lui correspondent, devra, en vertu de la continuité, être encore considéré comme égal à $p(p-1)$ attendu qu'il représente, à lui seul, une sorte de courbe du degré p. On arrive à la même conséquence en regardant le point conjugé comme le croisement de p branches imaginaires de la courbe, d'après la même notion qui permet de regarder indifférement un point réel comme un cercle de rayon nul, ou comme le croisement de deux droites imaginaires.

Du reste, on reconnaitra aisément l'ordre de multiplicité d'un point quelconque donné, en recherchant rigoureusement, combien de points de

la courbe, confondus en un seul avec celui là, porte toute transversale menée arbitrairement par ce même point; sur quoi il est essentiel de remarquer qu'il ne sera pas nécessaire de s'inquiéter de la réalité ou de la non-réalité des branches qui y passent, c'est-à-dire s'il est un point de croisement véritable ou en partie de croisement (205.), en partie conjugué, ce qui peut évidemment arriver dans certains cas.

Il peut aussi se faire que deux des branches de la courbe primitive et qui aboutissent au point considéré, aient la même tangente en ce point, ou y aient un contact d'un certain ordre; alors, n représentant cet ordre, $n+1$ le nombre des points consécutifs communs aux deux branches, il faudra évidemment ajouter à $p(p-1)$ le nombre $2n$ pour avoir celui des tangentes superposées avec celle dont il s'agit, puisque chacune des intersections consécutives doit être considérée comme un point double.

237. Ces considérations, sur lesquelles nous avons un peu insisté, montrent en quoi réside la difficulté d'assigner, dans chaque cas particulier, le nombre effectif des tangentes distinctes d'une courbe, et qui sont parallèles à une droite ou issues d'un point arbitrairement donnés sur son plan. Mais, comme il est évidemment une infinité de lignes, d'un degré donné m, qui n'ont aucun point multiple même dans le sens général que nous l'entendons, il en résulte qu'il existe aussi une infinité de lignes, de ce degré, qui ont $m(m-1)$ tangentes distinctes issues d'un point donné. Quoiqu'il en soit, et en admettant même qu'on n'eût jamais vu ni construit de lignes géométriques privées de tout point multiple, il n'en serait pas moins vrai de dire, d'après ce qui précède et d'après le principe de continuité, que toujours le nombre total des tangentes d'une courbe de degré m, sera égal à $m(m-1)$, pourvu qu'on tienne compte des tangentes superposées, des tangentes imaginaires etc. de la même manière que, dans l'appréciation du degré d'une courbe donnée, nous tenons compte aussi de ses intersections, de toutes les espèces, avec une transversale arbitraire, sans nous inquiéter d'ailleurs s'il existe ou non des transversales dont les intersections soient essentiellement réelles ou distinctes.

En effet, la géométrie intuitive comme la géométrie analytique, nous présentent, à l'envie, des courbes et des surfaces dont certains points, certaines branches ou nappes sont imaginaires, confondues, réduites à des lignes ou a des points isolés, etc., soit en totalité, soit seulement en partie

(*Propriétés projectives*, supplément *) No. 628.), sans que ces courbes et surfaces cessent, pour cela, de jouir de certaines propriétés, sans qu'elles doivent cesser, d'une manière absolue, de faire l'objet de nos raisonnemens et de nos investigations géométriques; car toutes ces bizarreries ne nous répugnent que parceque nous ne possédons pas bien encore la métaphysique de la science qui a pour objet la grandeur figurée.

Exemples relatifs à des lignes ou systèmes de lignes particuliers; recherche du nombre et du degré des intersections des courbes et surfaces.

238. Pour montrer comment le principe général, établi ci-dessus, sur le nombre des tangentes des lignes géométriques issues de points donnés, trouve son application dans chaque circonstance particulière, il n'y a qu'à se proposer la recherche directe de la dérivée du système de m droites tracées arbitrairement sur un plan, en remarquant qu'ici on peut prendre les tangentes parallèles à une direction donnée, sans limiter, en rien (233.), l'étendue de la question. La construction générale fournira positivement $\frac{m(m-1)}{2}$ droites distinctes passant respectivement par les intersections mutuelles des m droites proposées, mais dont chacune devra être censée double, ce qui donnera en tout $m(m-1)$ tangentes; circonstance qui tient à ce qu'en effet, le système de deux droites qui se coupent sur un plan, doit être considéré comme une sorte d'hyperbole dont les som-

---

*) Nos lecteurs remarqueront qu'il s'est glissé, vers le commencement de ce No., une erreur de langage relativement aux *intersections orthogonales* des surfaces; il y est dit que de pareilles intersections, pour des *surfaces quelconques*, déterminent toujours un des systèmes de lignes de courbure de ces surfaces; il faut sousentendre qu'il s'agit de *surfaces quelconques du second degré*.

Je profiterai en même tems de cette occasion, pour prévenir qu'en rédigeant la matière des Nos. 584. et suivans du *supplément* du même ouvrage, concernant la perspective des *bas-reliefs*, j'ignorais complètement qu'il existât en Allemagne, sur cet objet, un écrit très bien fait ayant pour titre: *Essai d'une théorie de la perspective des reliefs, disposée de manière à servir en même tems aux peintres*; par *J. A. Breysig*, professeur des beaux arts à l'école royale et provinciale de Magdebourg, imprimé, dans cette même ville, chez George Christian Keil (année 1798).

Ce petit ouvrage qui mériterait d'être traduit dans notre langue, forme un vol. in 8vo de 134 pages, accompagné de 11 planches, et qui contient, sur le tracé des bas-reliefs, des préceptes qui, pour le fond, se trouvent d'accord avec ceux que j'ai moi même établis à l'endroit cité. Je dois la connaissance de ce livre à l'amitié du célèbre Docteur *Jacobi* de Koenigsberg, qui, lors de son voyage en France dans l'année 1829, m'en toucha quelques mots, et daigna m'en adresser un exemplaire au commencement de l'année suivante, ce dont je le prie de vouloir bien agréer ici l'expression de ma vive et sincère reconnaissance.

mets se sont confondus en un seul avec le point d'intersection de ces droites. Si d'ailleurs il arrivait que trois quelconques de nos m droites se croisassent en un même point; ce point devant être considéré comme un point triple du système qu'elles forment, il est clair (236.) que toute droite qui y passerait représenterait six tangentes superposées de ce système ou de la ligne du m^e ordre qu'il remplace, et ainsi de suite pour les intersections multiples, d'espèce supérieure.

239. Concevons encore la parabole cubique ou ses analogues qui ont toutes un point de rebroussement à l'infini dont la tangente est elle même située toute entière à l'infini, ce dont on s'assure en observant que toute transversale, parallèle aux branches infinies, n'a, avec la courbe, qu'un seul point d'intersection possible à distance donnée, ce qui en suppose nécessairement (235.) deux confondus en un seul à l'infini, auxquels vient se réunir le premier quand la transversale se transporte parallèlement à elle même au delà de toute distance donnée. Il est clair que, parmi les $m(m-1)$ ou 6 tangentes à la courbe, issues d'un point quelconque de son plan, devront se trouver constamment les trois tangentes superposées (235.), relatives au point de rebroussement; de sorte qu'il ne restera plus que trois dernières tangentes généralement distinctes et dont deux pourront d'ailleurs être imaginaires. Si les tangentes devaient être parallèles à une direction donnée, ou que leur point de concours dût être à l'infini sur la tangente du point de rebroussement, celle-ci représenterait évidemment quatre tangentes superposées (235.), et il ne resterait plus ainsi que deux tangentes distinctes qui pourraient même devenir totalement imaginaires.

La même discussions peut être appliquée, mot pour mot, à la parabole du 3me degré, qui sert de développée à la parabole ordinaire, si ce n'est qu'ici le point de rebroussement est à distance donnée, et que le point de simple inflexion est à l'infini aussi bien que sa tangente qui devra toujours (234.) être comptée deux fois au nombre des six tangentes, de la courbe, qui seraient parallèles à une direction quelconque donnée, ou devraient concourir en un point quelconque de la tangente dont il s'agit. On appliquera une discussion analogue aux lignes du 3e ordre mentionnées par *M. Lacroix*, à la page 128., No. 86. de son excellent *Traité élémentaire de calcul différentiel* (4e édition), et dont celle qui se trouve représentée par la figure 22., offre l'exemple d'une courbe du 3e ordre qui

est susceptible d'avoir six tangentes toutes distinctes et réelles, issues d'un même point donné. Cette courbe qui à trois points d'inflexion en ligne droite dont un à l'infini, et qui est sans points multiples, a été spécialement considérée par *Maclaurin* dans son *Traité des lignes géométriques*.

240. Soit enfin le système de deux lignes géométriques quelconques, de degré m et n, tracées sur le même plan et qu'on peut regarder comme une seul ligne géométrique du degré $m+n$; le degré de sa dérivée, ou, ce qui est la même chose, le nombre de ses tangentes parallèles à une droite ou issues d'un point donné sera toujours $(m+n)(m+n-1)$; mais, parmi ces tangentes, se trouveront comprises 1° les $m(m-1)$ tangentes de la courbe (m); 2° les $n(n-1)$ tangentes de (n); 3° enfin chacun des couples de tangentes superposées relatives aux intersections de ces courbes, lesquelles doivent être considérées comme autant de points doubles de la ligne $(m+n)$, dont le nombre est ainsi en général et au plus

$$\frac{(m+n)(m+n-1)-m(m-1)-n(n-1)}{2} = mn;$$

c'est-à-dire égal au produit des degrés des deux courbes simples (m) et (n), comme on pouvait le prévoir d'après le théorème connu sur le nombre des intersections de deux courbes de degrés données et tracés sur un même plan.

Ainsi la considération de la dérivée des courbes planes géométriques nous fournit un moyen de découvrir le nombre des intersections communes de ces courbes comme elle nous a fourni celui de découvrir le nombre de leurs tangentes issues de points donnés, et comme elle fournirait aussi les moyens de trouver, *à priori*, tous leurs points multiples de différens genres, c'est-à-dire de croisement, de tangence, de rebroussement etc.: il ne s'agirait, en effet, que de prendre leurs dérivées par rapport à deux directions arbitraires et au même axe, puisqu'elles devraient avoir en commun, sur cet axe, les points qui répondent aux points multiples dont il s'agit.

Le même genre de raisonnemens étant applicable d'ailleurs aux surfaces et aux systèmes de surfaces géométriques pourvu qu'on remplace l'axe par un plan fixe quelconque, on en déduira beaucoup d'autres théorèmes analogues relatifs aux plans tangens de ces surfaces issus d'une droite donnée, aux cônes qui leur sont circonscrits, au degré et au nombre de leurs intersections communes deux à deux, trois à trois etc., théo-

rèmes dont plusieurs ont déjà été démontrés ou simplement mentionnés dans la première partie du *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques.*

241. A cet effet, on prouvera d'abord sans beaucoup de peine, que la surface conique, circonscrite à une surface quelconque du degré m, est généralement du degré $m-1$ seulement; d'où l'on conclura, par le genre de raisonnement que nous venons de mettre en usage, que la courbe d'intersection de deux surfaces quelconques des degrés m et n, est elle même du degré mn; proposition d'ailleurs évidente *à priori*, d'après celle qui concerne les intersections des simples courbes planes, et si l'on admet, pour définition des courbes à double courbure de degré m, que de telles courbes sont susceptibles d'être rencontrées en m points réels, imaginaires etc. par un plan arbitraire, ou, ce qui revient au même, que leurs différentes projections sur des plans quelconques, doivent être des courbes géométriques du degré m.

Ces préliminaires étant établis, on démontrera ensuite que le nombre des intersections d'une courbe à double courbure, du degré μ, avec une surface quelconque de degré m, est généralement et au plus μm, en observant, à cet effet, que la dérivée (233.) du système de cette courbe et de cette surface, prise par rapport à un plan-axe quelconque et parallèlement à une droite fixe arbitraire, est elle même une courbe à double courbure du degré μm, puisque d'ailleurs on doit ici faire abstraction des $m(m-1)$ cordes qui, sur chaque transversale issues des points de (μ), appartiennent à la surface (m).

Menant, en effet, un plan transversal quelconque parallèle à la direction donnée, il coupera (μ) en μ points, à chacun desquels correspondra une transversale parallèle à cette même direction, contenant m intersections de la surface (m) et parconséquent m abscisses ou cordes comptées de ce point, ou enfin (233.) $2m$ points de la dérivée que l'on considère. La totalité des points (μ), compris dans le plan transversal dont il s'agit, sera donc μm, donnant lieu à $2m\mu$ points de la dérivée également compris dans ce plan; et, attendu que cette dernière ne saurait y en avoir d'autres à distance donnée ou infinie, il faut bien qu'elle soit, en général et au plus, du degré $2m\mu$.

Finalement, comme aux intersections de la dérivée avec le plan-axe doivent correspondre un pareil nombre d'intersections de (μ) avec (m),

et que ces dernières donnent lieu à des points doubles sur le plan dont il s'agit, ou qui sont la rencontre mutuelle de deux branches distinctes de la dérivée, il s'en suit rigoureusement la proposition avancée que

Toute courbe à double courbure, du degré μ, rencontre, généralement et au plus, en $m\mu$ points une surface géométrique quelconque du degré m.

Donc aussi

Trois surfaces quelconques des degrés m, n, p s'entrecoupent généralement et au plus, en $m \times n \times p$ points.

Généralisation du mode de transformation proposé pour les courbes géométriques.

242. Nous ne pousserons pas plus loin ces dernières considérations, qui nous conduiraient à un grand nombre de propositions curieuses sur les courbes à double courbure, et les surfaces, parcequ'elles nous feraient perdre de vue, trop tongtems, l'objet actuel de nos investigations relatives aux faisceaux de tangentes des lignes géométriques.

Jusqu'ici, en effet, nous avons supposé les points de concours de ces faisceaux à l'infini ou les tangentes parallèles; ce qui nous a permis de discuter, avec facilité, les singularités qui leurs appartiennent; or il est bon de faire voir comment nos constructions peuvent s'étendre directement au cas où le point de concours est à une distance donnée sur le plan de la courbe, sans qu'on soit obligé de recourir (233.) à la projection de la figure sur un nouveau plan. Pour cela, il ne s'agira que de généraliser ces constructions de manière 'qu'elles diviennent naturellement *projectives*, ou telles qu'elles demeurent applicables à la fois a toutes les projections coniques de la courbe proposée, ce qui est très facile comme on va le voir.

Afin d'obtenir, sur une transversale quelconque parallèle à la direction donnée, tous les points qui appartiennent à la dérivée de la courbe (m), nous avons tacitement supposée dans le No. 233., qu'on ferait usage du compas ou de mesures graduées; mais on peut immédiatement ramener la détermination de ces points à une opération qui n'exige que le tracé de droites parallèles, lesquelles, comme on soit, se changent, dans les perspectives ou projections coniques de la figure, en de simples lignes concourantes suivant des points donnés; ce qui rend les opérations purement linéaires ou les abaisse au 1^{r} degré.

Ayant, en effet, déterminé, sur la transversale que l'on considère en particulier, les m intersections qui lui correspondent dans la courbe proposée, on mènera, par un point ou pôle arbitrairement choisi sur la droite qui sert d'axe à la dérivée, une parallèle à cette transversale, puis m autres droites aux intersections dont il s'agit. Cela posé, on conduira, par chacune de ces intersections $m-1$ nouvelles droites parallèles à celles, des m droites précédentes, qui n'y passent pas; ce qui donnera, en tout, $m(m-1)$ droites de cette espèce, rencontrant la parallèle à la transversale en un pareil nombre de points distincts du pôle fixe par lequel est conduite cette parallèle, et qu'on ramènera sur la transversale elle même à l'aide d'un dernier système de parallèles à l'axe; ce qui donnera évidemment tous les points et les seuls points qui peuvent appartenir à la fois à la dérivée et à la transversale considérée. Ainsi donc ces mêmes points seront en nombre de $m(m-1)$ comme nous l'avons précédemment trouvé.

Fesant maintenant varier la transversale dont il s'agit, sans en changer la direction et de façon que sa parallèle, passant par le pôle fixe, reste elle même invariable, on obtiendra la suite de tous les systèmes de $m(m-1)$ points de la dérivée, dont le degré sera ainsi $m(m-1)$, comme nous l'avions primitivement démontré en recourant à des considérations relatives à l'ordre et aux permutations possibles des intersections de chaque transversale avec la courbe proposée.

234. Le degré de cette dernière courbe, pas plus que celui de la dérivée, ne pouvant changer par les effets de la projection conique, on voit que les constructions qui précèdent seront immédiatement applicables au cas où le système des tangentes cherchées et les tansversales auxiliaires des deux courbes, au lieu d'être parallèles à une droite donnée, devraient concourir en un point fixe quelconque du plan de ces courbes. Seulement alors il conviendra de remplacer également chacun des autres systèmes de parallèles considérés, par autant de systèmes de droites qui convergent en de nouveaux points situés sur une droite quelconque passant par le point de concours des tangentes, et représentant ici la droite qui contenait, dans nos premières hypothèses, tous les points situés à l'infini sur le plan de la figure (voy. les Nos. 105. et 106., pag. 53. du *Traité des propriétés projectives*).

Mais, sans nous arrêter à ces constructions par lesquelles nous serions ramenés aux diverses conséquences des No. 234. et suiv., qui con-

cernent les tangentes singulières et superposées des points multiples, nous passerons, de suite, à ce qui concerne le rôle que jouent de pareilles tangentes dans toutes les relations de grandeur ou de situation, appartenantes aux faisceaux convergens de tangentes quelconques des lignes géométriques, relations que la théorie des polaires reciproques nous montre être exactement les inverses de celles qui appartiennent aux systèmes d'intersection de ces lignes par des droites arbitraires.

Du rôle que jouent les tangentes singulières des points multiples, dans toutes les relations métriques ou descriptives des courbes. — Remarques nouvelles sur les polaires réciproques.

244. Reportons nous au principe général des Nos. 129. et 130. du *Mémoire* qui contient cette théorie, principe que, d'après la remarque déjà plusieurs fois faite *), on doit considérer comme fondamental dans toutes les recherches qui ont pour objet de découvrir les propriétés ou relations quelconques concernant les faisceaux convergens de tangentes des lignes.

Soit d'ailleurs, sur un plan, une ligne géométrique du degré m, et à laquelle parconséquent répondent, en général, $m(m-1)$ tangentes issues d'un même point quelconque; supposons enfin que cette courbe ait un point multiple d'une certaine espèce, auquel correspondent, par exemple, n tangentes *singulières* confondues en une seule suivant la direction indiquée par une droite arbitrairement menée par ce point, et qui devront être censées faire partie des $m(m-1)$ tangentes issues d'un autre point quelconque de cette droite. Cela posé, si, en vertu des Nos. 129. et 130., on suppose que, des trois sommets d'un triangle quelconque ABC situé sur le plan de la courbe, on mène, à cette même courbe, les trois systèmes de $m(m-1)$ tangentes qui leurs correspondent, et qu'ayant tracé arbitrairement une transversale au travers de ces systèmes et des côtés du triangle, on nomme p, p', p'' .... ses intersections avec le faisceau des tangentes issues du sommet c du triangle; q, q', q''.... ses intersections avec le système des tangentes issues de B, enfin a, b, c ses intersections avec les côtés BC, AC et AB respectivement, on aura constamment

$$\frac{(ap)\,(bq)\,(cr)}{(bp)\,(cq)\,(ar)} = 1,$$

*) Voyez la fin de *l'introduction* et le No. 153.

en conservant d'ailleurs les autres conventions adoptées aux Nos. dont il s'agit.

Mais, attendu que n tangentes de chaque faisceau se trouvent confondues avec la droite qui joint le sommet correspondant du triangle et le point multiple, la relation précédente prendra cette autre forme:

$$\frac{\overline{ap}^n.\overline{bq}^n.\overline{cr}^n}{\overline{bp}^n.\overline{cq}^n.\overline{ar}^n}\frac{(ap')(bq')(cr')}{(bp')(cq')(ar')}=1;$$

dans laquelle b, q, r sont censés représenter les intersections de la transversale avec la tangente multiple et p', $p''\ldots.$, q', $q''\ldots.$, r', $r''\ldots.$ celles des trois systèmes des $m-n$ tangentes restantes relatives à chacun des sommets du triangle, tangentes qui sont censées distinctes entre elles et de la transversale du point multiple, quoique d'ailleurs elles puissent être indifférement réelles ou idéales.

D'une autre part et en vertu du No. 126., nous avons aussi, pour les trois droites joignant les sommets A, B, C au point multiple:

$$\frac{ap.bq.cr}{bp.cq.ar}=1;$$

donc enfin

$$\frac{(ap')(bq')(cr')}{(bp')(cq')(ar')}=1.$$

Ce qui fait voir que les faisceaux de tangentes, distinctes du point multiple, jouissent entre eux et par rapport aux côtés du triangle ABC, de la même corrélation de situation qui appartient en général aux faisceaux complets formés de toutes les tangentes issues des mêmes points.

Ces considérations s'appliquant d'ailleurs aussi bien à la relation du No. 129. qu'à celle du No. 130. qui vient de nous occuper, et étant également applicable à toutes les autres relations qui pourraient être déduites de celles là, il en résulte généralement que, dans les recherches relatives aux propriétés projectives des lignes géométriques, on peut indifféremment supprimer ou tenir compte des tangentes singulières ou superposées qui se rapportent aux points multiples, pourvu qu'on en retienne un nombre pareil dans chacun des faisceaux de tangentes issues des mêmes points donnés.

245. D'après ces observations, on ne sera plus surpris de voir la théorie des polaires réciproques nous offrir des courbes géométriques dont le degré surpasse, en apparence, le nombre des tangentes issues de points arbitrairement donnés sur leur plan, et jouissant par rapport à ces systèmes de tangentes, de relations métriques ou descriptives essentielles et di-

stinctes: cette circonstance tient, comme on voit, à ce que, dans certains genres de questions, on peut négliger totalement la considération des tangentes singulières, de la même manière que, dans d'autres, relatives au degré et aux systèmes d'intersections des lignes géométriques, on peut négliger les droites ou assemblages de droites que, dans des circonstances plus générales, on aurait été primitivement conduit à regarder comme formant une partie intégrante de ces lignes.

C'est précisément là, en effet, ce qui arrive à l'égard de la polaire réciproque d'une courbe donnée possédant des points multiples; comme nous l'avons fait voir aux Nor. 67. et suiv. de notre précédent *Mémoire.* Car cette polaire doit nécessairement comprendre, un certain nombre de fois, les tangentes communes à deux ou à plusieurs de ses branches, les tangentes en ses différens points d'inflexion et de rebroussement; seulement nous nous sommes trompés dans l'appréciation de la multiplicité ou du nombre des tangentes confondues en une seule avec chacune de celles là, attendu que nous n'avions pas alors approfondi la question comme nous venons de le faire, et que nous ne prétendions qu'expliquer généralement, comment la polaire réciproque, d'une courbe de degré m, qui est elle même du degré $m(m-1)$ en général, pouvait cependant n'avoir que m tangentes issues d'un point arbitraire, c'est-à-dire n'être simplement que de la même *classe* suivant la dénomination récemment admise par quelques géomètres.

Or cela se conçoit très bien si cette polaire possède des points multiples en nombre et d'espèce tels que la somme des tangentes multiples qui leur sont relatives, soit nécessairement

$$m(m-1)\,[m\,(m-1)-1]-m \;=\; m^3(m-2).$$

246. Pour faire entrevoir l'origine et la possibilité de tous ces points multiples, nous supposions que la courbe proposée, censée la plus générale du degré m, devait elle même nécessairement avoir un certain nombre de *tangentes multiples* communes à deux ou plusieurs de ses branches; ce qui est vrai en thèse générale et si l'on n'entend point prononcer que ces branches sont essentiellement distinctes entre elles, mais ce qui cesse de l'être si on admet, au contraire, comme nous semblons l'avoir fait inconsidérément vers la fin du No. 67., que les points multiples de la réciproque peuvent être des points de croisement véritable, ou, tout au moins, des points doubles répondant à des tangentes communes

à deux branches distinctes de la courbe primitive. Car il parait clair, d'après les observations des Nos. 237. et 239. ci-dessus, que les courbes géométriques, quels qu'en soient d'ailleurs le degré et l'espèce, ne sauraient essentiellement et toujours posséder de telles tangentes, pas plus qu'elles ne possèdent toujours et nécessairement des points de croisement véritable.

Or, comme suivant ce qui précède (235. et suiv.), les points de rebroussement des divers genres, jouent aussi le rôle des points de croisement véritable, et qu'ils ont pour réciproques polaires d'autres points de rebroussement ou des points d'inflexion (69. et 70.), dont la tangente en représente plusieurs (235.) confondues en une seule qui doit être censée commune au moins à deux branches aboutissant à ces mêmes points; attendu ces circonstances, disons nous, il faut bien admettre que toute courbe du degré m, qui n'a ni points de croisement véritable, ni tangentes communes à des branches distinctes, doit au moins posséder des points d'inflexion et de rebroussement ou toute autre espèce analogue de points dont les tangentes seraient osculatrices de la courbe. On peut même affirmer, d'après ce qu'indique la théorie des polaires réciproques, qu'une courbe plane d'un degré donné, non seulement possède généralement de ces points, mais en possède d'autant plus que le nombre ou la multiplicité de ses points conjugués et de croisement véritable, est moindre.

Questions et transformations inverses relatives à la loi qui lie le degré des courbes à leur classe ou au degré de leurs polaires.

247. Si nous nous proposions cette question, inverse de celle qui nous a occupé dans les Nos. 233. et suiv.: *une courbe de la n^e classe* (245.) *étant donnée sur un plan, quel est son degré ou quel est le nombre de points suivant lesquels elle est susceptible d'être coupée par une droite arbitraire?* On trouverait, pour réponse inévitable, le nombre $n(n-1)$, soit qu'on observât que le degré de la polaire réciproque de cette courbe est simplement (66. et 67.) n, et sa classe généralement $n(n-1)$, soit qu'on recherchât directement et par des opérations inverses de celles qui ont été exposées au No. 233., quel est le nombre des intersections de la courbe proposée par une droite arbitraire. Mais attendu que, parmi ces intersections, se trouvent nécessairement comprises, un certain nombre de fois, celles de cette même droite avec les tangentes singulières communes à des branches distinctes ou à des branches dont le raccordement

s'opère aux points de rebroussement et d'inflexion de différens genres; comme ces tangentes ne font réellement pas partie de la courbe proposée (n), on voit que le degré de cette courbe sera réellement moindre que $n(n-1)$, si elle possède de pareilles tangentes, et elle en possèdera nécessairement un certain nombre comme on le verra tout à l'heure, même quand elle serait la plus générale possible de son degré. Sans insister sur les operations inverses dont il s'agit, nous ferons cependant remarquer qu'elles donnent lieu à la considération d'une nouvelle espèce de dérivée, dont la classe est effectivement $n(n-1)$, quand celle de la proposée est n, et dont la construction peut être finalement ramenée à ce qui suit:

248. Soit (a) une droite arbitrairement donnée sur le plan d'une courbe de la classe n, c'est-à-dire susceptible d'avoir n tangentes distinctes issues d'un même point quelconque de ce plan, et de laquelle il s'agit de trouver le système total des intersections avec (n) au moyen du tracé d'une certaine courbe auxiliaire. Par un point p également arbitraire, soit menée une parallèle (b) à (a); d'un point quelconque a de cette dernière soient menées les n tangentes relatives à (n) et rencontrant (b) en n points censés généralement distincts entre eux. A partir de p, on portera sur (b) les $n(n-1)$ distances ou intervalles qui séparent ces n points combinés deux à deux, de toutes les manières possibles, par rapport à la grandeur et à la position (233.); cela donnera lieu à $n(n-1)$ nouveaux points sur (b), qui, étant joints avec a, fourniront un pareil nombre de droites; fesant varier le point de départ a de ces droites sur (a), leur enveloppe générale sera une courbe continue de la classe $n(n-1)$, qu'on peut nommer la *dérivée* de (n), et dont les tangentes, issues de p, donneront, par leurs rencontres avec la droite (a), toutes les intersections demandées de cette droite et de (n); lesquelles seront, en général, au nombre de $n(n-1)$, conformément à ce qui a été primitivement annoncé.

Mais comme, parmi ces intersections, se trouveront nécessairement comprises, un certain nombre de fois selon leur espèce, les intersections de cette même droite (a) avec les tangentes aux points de rebroussement ou d'inflexion de (n) et les tangentes multiples communes à plusieurs branches, on voit qu'effectivement le nombre des intersections véritables de la courbe (n) et de la transversale (a), ou, ce qui revient au même, son degré, pourra être de beaucoup inférieur à $n(n-1)$, conformément à la remarque qui en a déjà été fait ci-dessus.

249. Je dis maintenant que cette circonstance aura nécessairement lieu, même pour les courbes les plus générales de chaque degré, ou qui posséderaient véritablement $m(m-1)$ tangentes distinctes issues des mêmes points et dont le degré serait m.

En effet, on a alors, n désignant toujours la classe,

$$n = m(m-1); \text{ d'où } n(n-1) = m^2(m-1)^2 - m(m-1);$$

et comme, par hypothèse, le degré effectif de la courbe est réellement m, il faut bien que cette courbe, si elle n'a aucun point multiple, possède tout au moint des points d'inflexion ou des tangentes osculatrices dont la somme des indices de multiplicité soit

$$n(n-1) - m = m^3(m-2),$$

c'est-à-dire que, dans les opérations graphiques ci-dessus, supposées appliquées à notre courbe générale du degré m et dont la classe est $m(m-1)$, $m^3(m-2)$ des $n(n-1)$ intersections trouvées sur la transversale arbitraire (a) appartiendront aux tangentes osculatrices dont il sagit.

En général, m étant le degré et n la classe véritables d'une courbe géométrique, si on nomme t la somme des indices qui exprime la multiplicité de ces différentes tangentes osculatrices, et u celle des indices qui se rapportent (236.) aux soit-disant tangentes relatives à des transversales ou sécantes quelconques passant par les différents points singuliers, on aura

$$t + m = n(n-1), \quad u + n = m(m-1);$$

ce qui établit une relation nécessaire entre t et u pour une courbe de degré donné m. On en déduit, en effet,

$$t = u^2 - u[2m(m-1) - 1] + m^3(m-2),$$

relation qui a son analogue pour le cas où la classe est donnée.

Indication d'un nouveau mode de transformation des figures, analogue à celui des pôles et polaires.

250. La polaire d'une courbe plane quelconque, par rapport à une section conique ordinaire, prise pour directrice ou auxiliaire, fait découvrir, sur le champ, comme nous l'avons vu, la corrélation ou la dépendance qui lie les systèmes de tangentes aux systèmes d'intersections; mais on peut choisir un mode de transformation plus simple encore, et qui permet de discuter, avec une égale facilité, les affections générales des lignes relatives aux unes et aux autres. Nous croyons ne pouvoir mieux terminer les discussions qui précèdent, qu'en fesant ici connaître,

en peut de mots, ce nouveau genre de transformation, qui se trouve pour ainsi dire tout indiqué par le rapprochement des propositions exposées dans les N°s 204. et 205., 210. et 211. du *Traité des propriétés projectives*, pag. 110. et suivantes, propositions qui permettent de construire linéairement les lignes du 1 du 2^d^ ordre par l'enveloppement de leurs tangentes ou par les intersections de simples lignes droites.

Soit, en effet, abc un triangle variable dont les sommets a, b sont assujettis à demeurer sur les droites ou *directrices* arbitraires as et bs, se recontrant en s sur son plan, et dont les côtés ac, bc, prolongés indéfiniment aillent sans cesse concourir aux points respectifs, ou *pôles* invariables, p et q choisis arbitrairement sur une droite quelconque passant par le point de concours s des directrices. On a vu, par les N°s 205. et 211. de l'ouvrage cité, que 1°. si le dernier sommet c du triangle abc est assujetti à demeurer sur une droite quelconque de son plan, le troisième côté ab, qui reste libre, pivotera lui même sur un dernier point fixe comme pôle, lequel se trouvera à l'intersection des deux droites menées, de p et de q, vers les intersections respectives de la droite donnée et des directrices sb et sa; 2°. réciproquement, si le côté ab pivote sur un dernier point fixe quelconque comme pôle, le sommet c, qui lui est opposé, décrira une troisième ligne droite passant par les intersections des directrices sa, sb et des droites qui joignent respectivement le point fixe dont il s'agit avec les pôles q et p.

En nommant le sommet c *point dérivé* de ab, et le côté ab *droite dérivée* de c, par rapport au système des pôles et des directrices proposés, on pourra énoncer plus simplement ces deux théorèmes, en la manière suivante:

„Si un certain point est assujetti à demeurer sur une droite don„née, sa dérivée pivotera sur un point fixe ou pôle qui aura réciproque„ment pour dérivée la droite dont il s'agit; et, *vice-versa*, si une cer„taine droite pivote autour d'un point fixe quelconque comme pôle, son „dérivé demeurera sur la dérivée même de ce pôle."

Ainsi les points et les droites dérivés jouissent de propriétés réciproques qui permettraient encore ici de les nommer *pôles* et *polaires réciproques*, comme dans le cas où la dérivation a lieu par rapport aux lignes du second ordre.

251. Ces propositions, qui se démontrent de la manière la plus simple et la plus élémentaire, conduisent, sur le champ, au mode de transformation annoncé. Car, si on remplace la directrice linéaire du sommet c, par une courbe quelconque du degré m, le côté ab ou la derivée de ce sommet, enveloppera une autre ligne que la discussion apprend être généralement du degré $m(m-1)$, et qui sera réciproquement le lieu des sommets c qui ont pour dérivées les tangentes de la courbe proposée.

Pour démontrer ce double théorême, qui montre que la courbe primitive et sa dérivée sont exactement réciproques entre elles par rapport aux directrices sa, sb et aux deux points ou pôles fixes p et q, à peu près de la même manière que le sont, par rapport à une ligne du second ordre quelconque, deux courbes tracées sur le plan de cette ligne et dont chacune serait la polaire de l'autre, pour démontrer, disons nous, ce double théorème, il ne s'agit que de remarquer que les raisonnemens par lesquels nous avons établi cette dernière réciprocité, soit dans les N°s 233. et 234. du *Traité des propriétés projectives*, soit dans les N°s 63. et suiv. de notre précédent *Mémoire*, demeureraient exactement applicables aux hypothèses actuelles relatives à la manière de conclure le point ou la droite qui sont les dérivés d'une droite ou d'un point donnés.

Il résulte aussi, de cette remarque, que tous les principes généraux, toutes les conséquences que nous avons établis, dans ce dernier *Mémoire*, sur les figures qui sont réciproques polaires par rapport à une ligne du second ordre, se trouvent aussi l'être pour les figures qui sont réciproques suivant la nouvelle acception, et qu'ainsi on arriverait exactement aux mêmes conclusions relativement aux propriétés métriques ou descriptives des figures tracées dans un même plan, sauf celles qui concernent les dépendances particulières qui lient chaque figure et sa dérivée aux directrices et aux pôles fixes donnés.

D'après cela, il paraît fort inutile que nous nous appesantissions sur ce nouveau mode de transformation des figures, et que nous recherchions ce qu'il deviendrait pour le cas de l'espace, puisqu'il n'aurait, sur celui qu'offre la théorie des polaires réciproques, guères d'autres avantages que ceux qui peuvent résulter d'un peu plus de simplicité dans les constructions et l'exposition des principes.

Fin de la Ire partie.

Le précédent mémoire a été lu par l'auteur à l'académie royale des sciences de l'institut de France le lundi 5. Septbr. 1831.

30.

Avis.

L'académie impériale des sciences de St. Petersbourg a, de son propre mouvement, daigné transmettre au rédacteur du présent journal, pour l'y faire insérer, un exemplaire du programme du prix de mathématiques proposé par Elle pour cette année. Le rédacteur, en exécutant avec le plus grand plaisir les ordres de cette illustre société par l'insertion suivante du programme, et en Lui adressant en même tems respectueusement ses remercimens sincères de l'honneur qu'Elle a bien voulu accorder à lui et à son journal, saisit cette occasion d'exprimer le vif désir qu'il a depuis longtems, et qu'il a déjà soumis à quelques académies, que les illustres sociétés scientifiques des divers pays voulussent bien lui faire parvenir régulièrement, pour les faire insérer dans ces feuilles, leurs programmes des prix de mathématiques proposés, et ensuite les listes des écrits qui auront été couronnés. La publication ainsi multipliée de ces programmes contribuerait à faire connoître encore plus généralement aux goémètres les objets que ceux qui sont à la tête du mouvement des sciences auront dans le cours du tems jugé principalement dignes de l'attention des mathématiciens. Il serait même bien possible, que quelqu'un des savans, qui sans cela n'aurait peut-être pas été instruit des problèmes proposés, se trouverait engagé à entrer au concours, et qu'il en résulterait quelque bon ouvrage.

Le rédacteur ose présenter par le présent aux académies des sciences des divers pays la prière de vouloir bien accorder cette grace à ces feuilles.

Programme du prix de mathématiques proposé par l'académie imperiale des sciences de St. Pétersbourg dans sa séance publique du 29. Décembre 1831.

L'élévation et l'abaissement successifs des eaux de l'océan a occupé les savants dans tous les âges de la philosophie; cependant l'explication des phénomènes des marées est due aux modernes. *Kepler* le premier avait soupçonné que leur cause devait résider dans le pouvoir attractif de la lune. *Newton*, rattachant le mouvement de l'océan à sa grande loi de la pesanteur universelle, en a commencé une théorie mathématique. Les successeurs de ce grand géomètre, jusqu'à *Laplace*, n'ont que peu ajouté à sa théorie. Mais elle a reçu de ce dernier un grand perfectionnement.

Cependant, depuis que *Laplace* a publié ses recherches sur les marées, l'analyse et surtout la physique mathématique ont fait des progrès qui demandent une théorie plus conforme aux idées actuelles sur la constitution des liquides, et qui permettra peut-être de mieux accorder le calcul et l'observation, particulièrement en ce qui regarde le retard de la plus haute marée sur l'instant de la syzygie.

L'Académie propose aux savants de tous les pays la question suivante:

Déterminer le mouvement de l'océan, en considérant toutes les forces dont l'influence peut être sensible, et comparer à l'observation les hauteurs des marées et les instants de leurs arrivées déduits de la théorie.

La chaleur du soleil et l'inégale température du fond de l'océan ont, sans doute, une influence sensible sur les marées; il serait très important d'y avoir égard, mais alors la grande difficulté du problème pourrait forcer les auteurs de renoncer à l'éspérance de la vaincre. C'est pourquoi l'Académie n'exige pas que l'on considère l'influence de la chaleur sur le mouvement de l'océan, mais elle exige que les équations différentielles de ce mouvement soient formées en supposant les liquides composés de molécules disjointes; la démonstration de ces équations est une partie essentielle de la question. Quant à leur intégration, l'Académie verrait avec plaisir que les auteurs tiennent compte des termes divisés par la quatrième puissance de la distance de la lune; cependant la considération de ces termes n'est pas absolument exigée. L'Académie verrait avec plus de plaisir encore des méthodes d'intégration supérieures à celles qui sont connues, méthodes par lesquelles on éviterait le développement ordinaire en série de fonctions qui dépendent des forces attractives.

Le terme du concours est fixé au 1^{r} août 1833 et le prix est de *deux cents ducats* avec la médaille du jubilé en or de la valeur de 50 ducats.

Les mémoires pourront être écrits en russe, en françois, en allemand ou en latin. Chaque auteur aura soin d'accompagner son travail d'un billet cacheté contenant son nom, son état et le lieu qu'il habite, et sur lequel il inscrira la même devise qu'il aura mise en tête de son mémoire.

Les paquets seront adressés au Secrétaire perpétuel de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, qui, si on le réclame, délivrera à la personne que l'auteur anonyme lui indiquera, un reçu contenant le numéro et la devise dont la pièce sera pourvue.

La décision de l'Académie sera proclamée dans sa séance publique à la fin de l'année 1833. Le mémoire couronné est la propriété de l'Académie; les autres pièces de concours pourront être retirées de chez le Secrétaire perpétuel par les personnes qui en seront chargées de la part des auteurs.

31.
Nachrichten von Büchern.

1. So eben ist das dritte und letzte Supplement Legendre's zu seiner „*Théorie des fonctions elliptiques*" bei Treuttel und Würz in Strasburg erschienen. Diese Schrift ist in mehrfachem Betracht von besonderem Interesse. Zuerst ist sie, als eine neue Arbeit des ehrenwerthen Veterans der Mathematik, dessen Namen schon ihren Werth verbürgt, wichtig. Sodann ist sie interessant, weil sie das grofse Werk desselben beschliefst, welches eine lange Reihe von Jahren hindurch, bis auf die Arbeiten Abels und Jacobi's, das einzige in seiner Art über jene so interessante, neuerdings so erfreulich weiter entwickelte, und nun wiederum noch zuletzt von ihrem früheren Pfleger durchforschte Theorie war. Endlich aber hat das Werk noch ein eigenthümliches Interesse, weil es dem Genius des leider viel zu früh dahin geschiedenen Abel, der schon in seinem 24sten Jahre, im fernen Norden, fast von allen Hülfsmitteln entblöfst, über Schranken seiner Wissenschaft, die Euler und Lagrange nicht überstiegen hatten, sich hinausschwang, und mit welchem leider wahrscheinlich noch kostbare Schätze neuer Entdeckungen in dem Reiche der Wahrheit, der Mathematik, in's Grab gesunken sind, ein wahrhaft würdiges Denkmal setzt. In einem Briefe an den Herausgeber sagt Legendre am 24sten März d. J.: „Vous verrez que je suis „parvenu à tirer du beau théorème de Mr. Abel une théorie toute nouvelle, à laquelle „je donne le nom de *Théorie des fonctions ultra-elliptiques*, laquelle est beaucoup „plus étendue que celle des fonctions elliptiques et cependant conserve avec celle-ci „des rapports très intimes. En travaillant pour mon propre compte, j'ai éprouvé une „grande satisfaction, de rendre un éclatant hommage au génie de Mr. Abel, en faisant „sentir tout le mérite du beau théorème dont l'invention lui est due, et auquel on „peut appliquer la qualification de *monumentum aere perennius*." Man weifs nicht was man hier mehr schätzen soll: dafs ein Mann von 80 Jahren, noch mit Jugendkraft und Jugendlust, in den abstractesten Gegenständen seiner Wissenschaft sich ergeht, und ferner über unerstiegene Schranken vordringt: oder jene Bereitwilligkeit, fremdes Verdienst anzuerkennen, fände es sich auch bei einem Jünglinge, der des gefeierten Gelehrten Enkel sein könnte! Wäre doch eine solche Bereitwilligkeit allgemein; sie würde der Wissenschaft wahrhaft würdig sein. Wie gewöhnlich begegnete sich das Rechte und Gute auch hier. Auch Abel war fähig, jedes fremde Verdienst mit wahrem natürlichen Herzenstriebe anzuerkennen. Eigensucht war ihm fremd.

Da schwerlich Jemand den Inhalt der Legendrischen neuen Arbeit besser zu würdigen und zu erkennen vermocht haben dürfte, als Jacobi, der Zeit-Genosse und Geistes-Verwandte Abels, der, ebenfalls noch in jugendlichen Jahren, mit gleichem Erfolge und gleicher Kraft ihm würdig zur Seite ging (auch ihm verdankt die Theorie der elliptischen Functionen ihre neuere Vervollkommnung, und er erreichte darin, unbekannt mit den gleichzeitigen Arbeiten Abels, das gleiche Ziel); so hat der Herausgeber Denselben ersucht, eine Übersicht des Werkes aufzusetzen, und er die Güte gehabt, sie während seines hiesigen Aufenthalts, noch vor seiner Rückkehr nach Königsberg, zu geben. Sie ist folgende:

Legendre *Théorie des fonctions elliptiques, troisième supplément, pag.* 169 — 359.

Mit dem 3ten Supplemente beschliefst Herr Legendre den 3ten Theil seines Werkes über die elliptischen Functionen: *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Euleriennes, avec des tables pour en faciliter le calcul numérique, chez Treuttel et Würtz*), welches anfänglich nur aus zwei Theilen bestand. Diese Fortsetzung umfafst

in drei nach einander erschienen Supplementen die durch die neuern Untersuchungen über diesen Gegenstand veranlafsten Ergänzungen des Werks. Die beiden ersten Supplemente, welche den 3ten Theil beginnen, wurden bereits vor dem Erscheinen der eignen Darstellung des Referenten publicirt; sie entstanden aus kurzen, in diesem Journal und den Astronomischen Nachrichten gegebenen Notizen, so wie aus wenigen brieflichen Mittheilungen von dem Entwicklungsgange, den die Untersuchung nach und nach annahm; daher die Darstellung in ihnen als eine ganz eigenthümliche zu betrachten ist. Abels Arbeiten über die elliptischen Transcendenten sind hierbei weniger benutzt.

Das 3te Supplement, dessen Inhalt wir hier näher angeben wollen, beginnt damit, eine im 1sten Supplement gelassene Lücke im Bereiche des Haupt-Theorems über die Transformation auszufüllen. Es ist dies der Beweis, dafs wenn U und V zwei ganze rationale Functionen von x von der Beschaffenheit sind, dafs

$$(VV-UU)(VV-\varkappa^2 UU) = (1-x^2)(1-\lambda^2 x^2)\,TT,$$

die Substitution $y=\frac{U}{V}$ immer der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\varkappa^2 y^2)}} = \frac{M\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 x^2)}},$$

wo M eine Constante bedeutet, Genüge leistet. Durch dieses Theorem, welches ein Grundprincip der Transformation der elliptischen Transcendenten ist, wird diese ein rein algebraisches Problem, da die Functionen U und V, für jeden gegebenen Grad der höchsten derselben, durch die angegebne Bedingung vollkommen bestimmt sind. Ein allgemeiner Algorithmus für diese Bestimmung ist ein schwieriges Problem, dessen Haupttheil die Erfindung der jedesmaligen Gleichung zwischen den Moduln $\varkappa$ und λ bildet, indem sich allgemein durch $\varkappa$ und λ und die Differentialquotienten von λ nach $\varkappa$, wie Referent in einer Notiz in diesem Journal bemerkt hat, die Coëfficienten von U und V algebraisch ausdrücken lassen.

In einem folgenden §. giebt der Verf. die elementare geometrische Construction für die Vervielfachung der ellipt. Transformationen, welche ich in einem der frühern Bände dieses Journals mitgetheilt habe. Das Problem der Vervielfachung besteht, wie man weifs, darin, aus einem Winkel φ_1 einen Winkel φ_n zu finden, so dafs $F(\varphi_n)=nF(\varphi_1)$, wo $F(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)}}$. Aus einem Puncte A eines Kreises, dessen Halbmesser R, zieht man durch den Mittelpunct eine Linie $AO=\frac{2R}{\varkappa^2}$, und errichtet auf ihr in O ein Loth l; hierauf nimmt man auf der Peripherie des Kreises den Bogen $AA'=2\varphi_1$, und beschreibt einen zweiten Kreis, der die Sehne AA' berührt und mit dem ersten die Linie l zur gemeinschaftlichen idealen Secante hat. Beschreibt man nun von A aus in den ersten Kreis das Stück eines Polygons $AA'A''A'''\ldots A^{(n)}$, das zugleich dem 2ten Kreise umgeschrieben ist, so ist, wenn $A^{(n)}$ der Endpunct der $n$ten Seite ist, $AA^{(n)}=2\varphi_n$. Dem Verf. giebt diese Construction zu manchen interessanten Erörterungen Veranlassung.

In den folgenden §§. wendet sich Legendre zu dem grofsen Abelschen Theorem, wodurch derselbe das Eulersche Theorem, welches die Basis der Theorie der elliptischen Transcendenten bildet, auf alle Integrale von der Form $\int\frac{dx\,f(x)}{\sqrt{X}}$ ausdehnt, wo $f(x)$ eine rationale und X eine ganze rationale Function von x bedeutet. Nachdem der Verfasser für den allgemeinen Fall in nähere Entwickelungen eingegangen ist, und daraus, wenn X auf den 4ten Grad steigt, die bekannten Formeln für die elliptischen Integrale der drei Gattungen abgeleitet hat, wendet er die allgemeine Theorie auf die Transcendente $\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}}$ an, welche für die Werthe $x=1$ und und $x=-\infty$ auf die Function Γ zurückkommt. Er giebt Mittel an, den Werth die-

ser Transcendente für jeden reellen und imaginären Werth von x zu berechnen, und prüft dann durch deren Hülfe das Abelsche Theorem in einer Menge numerischer Beispiele, welche alle mit gröfster Genauigkeit in einer grofsen Anzahl Decimalstellen ausgeführt sind. Man bewundert hier wieder den unermüdlichen Rechner, der die grofse Arbeit der elliptischen Tafeln im Interesse der Wissenschaft unternommen und vollendet hat.

In einem Schlufsparagraph untersucht der Verfasser die Transcendente

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{[x(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]}},$$

und findet das merkwürdige Resultat, dafs sie immer auf die Summe zweier elliptischen Integrale der 1sten Gattung zurückkommt, deren Amplitudo dieselbe und deren Module Complemente von einander sind. Setzt man nemlich $c^2 = \frac{(1-\sqrt{\varkappa})^2}{2(1+\varkappa)}$, $b^2 = \frac{(1+\sqrt{\varkappa})^2}{2(1+\varkappa)}$, wo $b^2+c^2=1$, so giebt die Substitution

$$\sqrt{x} = \frac{(b+c)\sin\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}+\sqrt{(1-b^2\sin^2\varphi)}},$$

oder wie der Verfasser sie darstellt, $\sin^2\varphi = \frac{2x(1+\varkappa)}{(1+x)(1+\varkappa x)}$, die Gleichung:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{[x(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)]}} = \frac{F(b,\varphi)+F(c,\varphi)}{\sqrt{[2(1+\varkappa)]}}.$$

Dieselbe Substitution, bemerke ich, giebt auch

$$\int_0^x \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)]}} = \frac{F(b,\varphi)-F(c,\varphi)}{\sqrt{[2(1+\varkappa)]}}.$$

Da die gegebene Substitution nur reell bleibt, wenn x zwischen 0 und 1, so giebt Legendre für den Fall, wo x zwischen 1 und ∞, noch andre Substitutionen, welche das Integral auf elliptische zurückführen. Er wendet hierauf das Abelsche Theorem an, und erhält dadurch merkwürdige Resultate für die elliptischen Transcendenten.

Legendre giebt den Transcendenten $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$, wenn X den 4ten Grad übersteigt, den Namen der hyperelliptischen (*ultra-elliptiques*). Wir würden sie die Abelschen Transcendenten nennen, da Abel zuerst sie in die Analysis eingeführt und durch ein umfassendes Theorem ihre grofse Bedeutung nachgewiesen hat. Diesem Theoreme selbst dürfte wohl vorzugsweise, als dem schönsten Monumente dieses aufserordentlichen Geistes, der Name des Abelschen Theorems zukommen. Denn gern stimmen wir dem Verfasser bei, dafs es das ganze Gepräge seiner Gedankentiefe trägt. Wir halten es, wie es in einfacher Gestalt ohne Apparat von Calcul den tiefsten und umfassendsten mathematischen Gedanken ausspricht, für die gröfste mathematische Entdeckung unsrer Zeit, obgleich erst eine künftige, vielleicht späte, grofse Arbeit ihre ganze Bedeutung aufweisen kann.

In einer Abhandlung in diesem Bande habe ich das Eulersche Fundamental-Theorem auf doppelte Integrale ausgedehnt; das gleiche kann in aller Allgemeinheit mit dem Abelschen Theorem geschehen. Es bedarf hierzu nur, wie ich an einem andern Orte zeigen werde, des auch für andre Untersuchungen merkwürdigen Satzes der Algebra, dafs wenn f und F zwei ganze rationale Functionen von x und y sind, und man in den Ausdruck $\frac{1}{f'(x)F'(y)-f'(y)F'(x)}$ für x und y alle Systeme von Werthen setzt, für welche zugleich $f=0$ und $F=0$, die Summe der so erhaltnen Werthe dieses Ausdrucks verschwindet.

Was aber die wirkliche numerische Berechnung der Integrale $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ betrifft, so werde ich an einem andern Orte zeigen, dafs sie immer mit derselben Leichtigkeit wie die Integration rationaler Functionen, geleistet werden kann. Die hierzu gebrauchte Methode findet in der Theorie der himmlischen Störungen eine wichtige Anwendung, da sie sich nicht blofs auf die einfachen Integrale erstreckt.

Abel selbst hat im 4ten Bande dieses Journals sein Theorem auf alle Integrale algebraischer auch inexpliciter Functionen erweitert. Seine Darstellung mufs aber reproducirt werden, was, da der Haupt-Ideengang sich erkennen läfst, nicht schwer fällt. Diese Erweiterung geschah kurz vor seinem Tode und war seine letzte Arbeit in diesem Journal.

Beim Schlusse des 3ten Bandes des Legendreschen Werks stellt sich uns noch erneuert das grofse Verdienst dieses ausgezeichneten Mathematikers vor Augen, dafs er, abgesehen von den wichtigen Entdeckungen, mit denen er die Wissenschaft bereichert hat, in dem vielfach zerstreuten Stoffe zwei grofse Disciplinen als die Hauptaufgaben der Mathematik in seiner Zeit herauserkannt hat, und daraus und durch die Arbeit seines Lebens selbstständige Theorien gründete, welche hinfort zu den wesentlichsten Bestandtheilen alles höhern mathematischen Studiums gehören müssen. Und so hat er noch in seinem achtzigsten Lebensjahre, die Aufgabe der Zukunft vorfühlend, mit der Durchforschung des Abelschen Theorems sein grofses Werk über die elliptischen Functionen beschlossen.

Potsdam, den 22sten April 1832. C. G. J. Jacobi.

Nachschrift.

Das von Legendre zu Ende des 3ten Theils gegebne merkwürdige Theorem läfst sich auf das allgemeinere Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{[x(1-x)(1-\varkappa\lambda x)(1+x)(1+\lambda x)]}}$$

ausdehnen, welches für $\lambda = 1$ mit dem Legendreschen übereinkommt, und das sich ebenfalls immer auf die Summe zweier elliptischen Integrale der ersten Gattung zurückführen läfst, deren Amplitudo dieselbe ist, deren Moduln aber im Allgemeinen nicht Complemente von einander sind, sondern wenn man $\varkappa$ und λ gehörig annimmt, irgend welche beliebige sein können. Es seien nämlich b und c irgend beliebige Moduln, $b' = \sqrt{(1-bb)}$, $c' = (1-cc)$ ihre Complemente, $\varkappa = \left(\frac{c'-b'}{b-c}\right)^2$, $\lambda = \left(\frac{c'-b'}{b+c}\right)^2$, oder

$$b = \frac{\sqrt{\varkappa}+\sqrt{\lambda}}{\sqrt{[(1+\varkappa)(1+\lambda)]}}, \quad c = \frac{\sqrt{\varkappa}-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{[(1+\varkappa)(1+\lambda)]}}$$
$$b' = \frac{1-\sqrt{(\varkappa\lambda)}}{\sqrt{[(1+\varkappa)(1+\lambda)]}}, \quad c' = \frac{1+\sqrt{(\varkappa\lambda)}}{\sqrt{[(1+\varkappa)(1+\lambda)]}},$$

so giebt die Substitution

$$\sqrt{x} = \frac{b'+c'}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\varphi)}+\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$$

die Gleichung:

$$\int_0^x \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{[x(1-x)(1-\varkappa\lambda x)(1+\varkappa x)(1+\lambda x)]}} = \frac{b'+c'}{2}[F(b,\varphi)+F(c,\varphi)].$$

Dieselbe Substitution giebt:

$$\int_0^x \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{[(1-x)(1-\varkappa\lambda x)(1+\varkappa x)(1+\lambda x)]}} = \frac{(c'+b')^2}{2(c'-b')}[F(b,\varphi)-F(c,\varphi)],$$

wo $\frac{(c'+b')^2}{2(c'-b')} = \frac{1}{\sqrt{[\varkappa\lambda(1+\varkappa)(1+\lambda)]}}$. Ich bemerke noch die Gleichungen:

$$\sin^2\varphi = \frac{(1+\varkappa)(1+\lambda)x}{(1+\varkappa x)(1+\lambda x)}, \qquad \cos^2\varphi = \frac{(1-x)(1-\varkappa\lambda x)}{(1+\varkappa x)(1+\lambda x)},$$

$$1-b^2\sin^2\varphi = \frac{(1-\sqrt{(\varkappa\lambda)}x)^2}{(1+\varkappa x)(1+\lambda x)}, \qquad 1-c^2\sin^2\varphi = \frac{(1+\sqrt{(\varkappa\lambda)}x)^2}{(1+\varkappa x)(1+\lambda x)},$$

welche leicht zu den angegebenen Resultaten führen. Übrigens sind die Gränzen von φ auch hier 0 und $\frac{\pi}{2}$, wenn 0 und 1 die Grenzen von x sind.

Man sieht so, dafs allgemein die Summe und die Differenz zweier elliptischen Integrale erster Gattung mit derselben Amplitudo und beliebigen Moduln die Eigenschaften der ersten Klasse der Abelschen Transcendenten geniefsen müssen, in welchen die Function unter dem Quadratwurzelzeichen bis auf den 5ten und 6ten Grad steigt. Diese Bemerkung, welche Legendre zuerst für den Fall, wo die beiden Moduln Complemente von einander sind, angestellt hat, und welche sich nach dem Obigen leicht auf zwei beliebige Moduln ausdehnen liefs, ist für die Theorie der elliptischen Transcendenten von Wichtigkeit, und kann anderseits bei der Behandlung jener Klasse der Abelschen Transcendenten mannigfachen Nutzen gewähren.

Setzt man in den vorstehenden Formeln λ negativ, so erhält man ein Paar imaginärer Moduln. Es sei $b^2 = e+f\sqrt{-1}$, $c^2 = e-f\sqrt{-1}$, so wird, wenn man $-\lambda$ statt λ setzt,

$$\varkappa = \frac{\sqrt{((1-e)^2+ff)}+e-1}{\sqrt{(ee+ff)}-e}, \qquad \lambda = \frac{\sqrt{((1-e)^2+ff)}+e-1}{\sqrt{(ee+ff)}+e},$$

und die Summation der beiden gegebenen Resultate giebt:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-(e+f\sqrt{-1})\sin^2\varphi)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{[\sqrt{((1-e)^2+ff)}-e+1]}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{[x(1-x)(1+\varkappa\lambda x)(1+\varkappa x)(1-\lambda x)]}} +$$

$$\sqrt{-1}\cdot\frac{\sqrt{[\sqrt{((1-e)^2+ff)}+e-1]}}{\sqrt{((1-e)^2+ff)}-e+1} \int_0^x \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{[(1-x)(1+\varkappa\lambda x)(1+\varkappa x)(1-\lambda x)]}}.$$

Die imaginären Moduln lassen sich in unzähligen Fällen auf reelle zurückführen. Denn man weifs, dafs man durch eine Transformation der $n$ten Ordnung einen Modul in so viel andre transformiren kann, wie die Summe der Factoren von n beträgt; von diesen sind, wenn der ursprüngliche Modul reell angenommen wird, nur so viel ebenfalls reell, wie die Anzahl der Factoren von n beträgt; alle übrigen sind imaginäre Moduln, die in Einen reellen transformirt werden können. Man wird also auch die Integrale

$$\int_0^x \frac{dx\,.\,x^{\pm\frac{1}{2}}}{\sqrt{[(1-x)(1+\lambda x)(1+\varkappa x)(1+\lambda x)]}},$$

wo $\varkappa$ und λ positiv sind, in unzähligen Fällen in elliptische Integrale mit reellem Modul transformiren können. Anderseits giebt die zuletzt gefundene Gleichung vielleicht die einfachste Darstellung des elliptischen Integrals erster Gattung mit imaginärem Modul in der Form $P+Q\sqrt{-1}$, und so führt die Theorie der elliptischen Integrale, selbst für den Fall imaginärer Moduln, mit Nothwendigkeit auf jene erste Klasse der Abelschen Transcendenten.

C. G. J. Jacobi.

2. Die von dem Herrn Verfasser selbst, dem Herrn Dr. Minding, Privatdocenten an der Universität zu Berlin, im vorigen Bande dieses Journals S. 414. angezeigte Schrift über die Theorie der Zahlen ist jetzt unter dem Titel „Anfangs-Gründe der höheren Arithmetik, Berlin, bei Reimer, 1832" erschienen. Sie beschäftigt sich, der Ankündigung gemäfs, mit der Auflösung der unbestimmten Gleichungen vom ersten und zweiten Grade in ganzen Zahlen, mit dem dazu gehörigen Theile der Theorie der Kettenbrüche, mit den quadratischen Formen ganzzahliger Ausdrücke und mit verschiedenen Eigenschaften der Zahlen, als Producte von Primzahlen, als Reste und Divisoren von Potenzen, als Summen von Quadraten, u. s. w. betrachtet, so wie der Primzahlen selbst, in einem Umfange, der z. B. die bedeutendsten Anwendungen des Fermatschen und Wilsonschen Satzes und des Reciprocitäts-Gesetzes der Primzahlen, als Quadratreste betrachtet, folglich einen bedeutenden Theil der gesammten Zahlen-Theorie einschliefst. Den Beschlufs macht eine historische Notiz über die Entwickelung der Zahlenlehre. Die Schrift ist augenscheinlich mit Einsicht und vielem Scharfsinne verfafst, und es sind die besten Quellen und neueren Vervollkommnungen dabei benutzt worden. Deshalb ist sie Jedem, der sich für die Mathematik interessirt, zu empfehlen.

Eine merkwürdige und, wenn man dagegen die Fluth von mathematischen Elementar-Büchern betrachtet, kaum glaubliche, doch aber wahre Thatsache ist es, dafs es bis heute noch kein, einigermafsen seinen Gegenstand umfassendes Elementar-Buch der Zahlenlehre gab; dafs die Schrift des Hrn. Dr. Minding die erste systematische Abhandlung dieses Theils der Mathematik in deutscher Sprache ist, und dafs es aufserdem überhaupt nur noch zwei ausführliche Schriften darüber giebt: die *Disquisit. arith.* von Gaufs und die *Théorie des nombres* von Legendre; obgleich grade die Theorie der Zahlen ein zur Übung der Denkkraft, also zur Beförderung des eigentlichen Zwecks der Mathematik ganz vorzüglich geeigneter Theil derselben ist, und selbst für Schulen ganz eben so nützlich und nöthig sein dürfte, als das was dort sonst von der Algebra und Geometrie gelehrt wird. So wenig allgemein noch wird also selbst das Wesentlichste und Vortrefflichste benutzt! Dieses giebt von dem Stande der Verbreitung und Benutzung der Mathematik keine vortheilhafte Vorstellung. Vergraben sind in der That noch kostbare Schätze, in theils unbeachteten, theils, freilich viel genannten, aber wenig gekannten, theils auch, und eben nicht durch die Schuld des Gegenstandes, wenig verständlichen und zugänglichen Büchern und Schriften, während immerfort das wenige Ältere verarbeitet wird, welches, wäre es nicht von unverwüstlichem Stoff, vielleicht auch noch sich wiederum verlöre. Möchte man doch nur erndten wollen. Es sind viele reiche Gaben da für Alle.

3. Von grofser wissenschaftlicher Wichtigkeit sind ferner die neuen Arbeiten Poisson's, z. B. folgende, aufser der im vorigen Heft dieses Journals befindlichen Abhandlung:

Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques. 1830.

Mémoire sur les mouvemens simultanés d'un pendule et de l'air environnant. 1831.

Mémoire sur la théorie du magnétisme en mouvement. 1826.

Mémoire sur le calcul des variations, 1831, welches eine interessante Ergänzung der Variations-Methode für den Fall doppelter Integrale enthält.

Nouvelle théorie de l'action capillaire, 1831, worüber sich im vorigen, 7ten Bande dieses Journals S. 170. eine Notiz befindet.

Ferner ein nachgelassenes Werk des berühmten Verfassers der *Théorie de la chaleur*, nemlich die

Analyse des équations déterminées, von M. Fourier, 1831,

von welcher Schrift jetzt, nach dem Tode des Verfassers, der erste Band erschienen ist, der eine Auflösungs-Methode der numerischen Gleichungen aller Grade lehrt, welche nicht allein der Lagrangischen vorzuziehen, sondern vielleicht die vollkommenste ist, welche gewünscht werden kann.

Es fehlt hier an Raum, alle diese vortrefflichen neuen Erscheinungen näher anzuzeigen; die Namen der Verfasser verbürgen ihren hohen Werth.

D. Herausg.

4. Eine merkwürdige litterarische Erscheinung dieses Jahres ist folgendes Buch: *Mechanics of heavens by Mrs.* Sommerville. Die Verfasserin, welche bereits den Physikern des Continentes durch ihre Versuche über den Einflufs der Sonnenstrahlen auf den Magnetismus bekannt ist, nimmt nun in hohem Grade das Interesse der Mathematiker in Anspruch. Laplace hat in seiner *Mécanique céleste* entschieden die Absicht nicht gehabt, einem gröfseren Publikum das Studium derselben leicht zu machen. Die Resultate dieses grofsartigen Buches und deren Entwickelung bleiben Manchem verschlossen, dem sie bei einer faſslichern Darstellung zugänglich sein würden. Aus diesem Gesichtspuncte unternimmt es Frau Sommerville, ganz eingedrungen in die abstraktesten und zusammengesetztesten mathematischen Entwickelungen, ihren Landsleuten den Inhalt der *Mécanique céleste* (den theoretischen Theil) wieder zu geben, faſslicher dargestellt, aber auf keine Weise verstümmelt. Dem Texte sind Holzschnitte einverleibt und dadurch zuweilen die analytischen Entwickelungen durch geometrische Anschauungen erleichtert, aber dabei erheben sich diese analytischen Entwickelungen selbst zu der nemlichen Höhe als in dem Originalwerke. Der Styl ist leicht und höchst elegant.

Das Ganze bildet einen starken Band in grofs Octav, ist splendid gedruckt und kostet in London Ein Pfund St.

P.

5. *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral par Mr. le Prof.* S. F. Lubbe. *Traduit de l'allemand, et augmenté de plusieurs notes et solutions par* Maurice Kartscher. Paris, *chez* Bachelier *père et fils, libraires pour les mathématiques.* 1831. *Un volume in* 8. *de* 411 *et* XII *pag., avec deux planches.*

L'auteur de ce livre qui, pendant bien des années, a enseigné les différentes branches du haut calcul dans les collèges et à l'université, n'a pas laissé de reconnaître que la meilleure ou bien la seule méthode pour faire faire des progrès rapides à ses élèves, consistait d'abord à suivre scrupuleusement dans toutes les recherches le principe une fois posé, et à fournir ensuite aux commençans assez d'exemples, pour qu'ils puissent s'exercer eux-mêmes, afinque la théorie et la pratique se prêtassent toujours la main. Sans porter préjudice à tout ce qui a été publié en Allemagne dans cette branche de l'instruction, l'auteur n'a pas pu trouver de manuel qui le satisfît entièrement, et a cru ne pas entreprendre un travail inutile en publiant ses propres cahiers sous le titre de: *Lehrbuch des höhern Calculs, Berlin, bei* G. Hayn 1825. 8.

Ce livre se distingue par une grande concision et une liaison intime des matières qui y sont traitées, de sorte que tout part d'un même principe et que partout y règne l'unité logique et scientifique. En même temps les exemples et les problèmes sont bien choisis et en nombre suffisant. Enfin, il doit servir de base et de livre préparatoire à un second ouvrage que l'auteur a publié depuis sur la théorie des trois variables, et qui est travaillé avec la même méthode.

M'étant convaincu moi-même des grandes facilités que ce livre offre aux professeurs dans leurs leçons, j'ai conçu l'idée de le faire paraître en français pour lui procurer un plus grand nombre de lecteurs. C'est dans ce but que j'ai encore ajouté dans un appendice quelques notes explicatives et les solutions de plusieurs problèmes dont il ne se trouve dans l'original que les simples énoncés; surtout j'ai cru devoir

traiter plus en détail les problèmes qui conduisent aux solutions particulières, et étendre les derniers numéros concernant les élémens de la théorie des équations différentielles partielles, et leur intégration.

Tout ce que je désire c'est d'avoir offert ou public un livre utile pour l'instruction, et j'ose me flatter qu'on s'en servira avec succès, même en Allemagne, puisque la connaissance de la langue française, qui est peut-être la plus propre aux mathématiques, paraît être devenue indispensable à tous ceux qui veulent étudier cette science.

Berlin, ce 30. Avril 1832.

Maurice Kartscher.

Wegen Mangel an Raum müssen die für dieses Heft bestimmt gewesenen Aufgaben für das nächste Heft zurückbleiben.

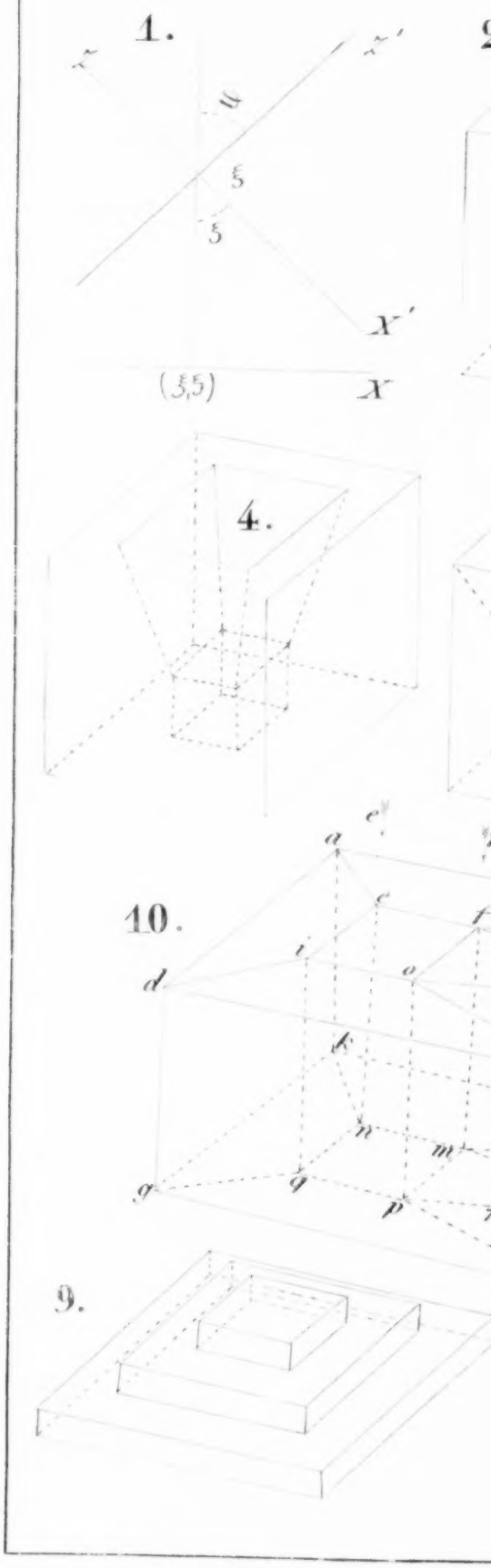
Druckfehler im gegenwärtigen Bande.

pag. 253. lin. 8. leg. $\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(a+b\cos\varphi+c\sin\varphi+d\cos\varphi^2+e\cos\varphi\sin\varphi+f\sin\varphi^2)}}$

loco $\int \frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi+c\sin\varphi+d\cos\varphi^2+e\cos\varphi\sin\varphi+f\sin\varphi^2}$

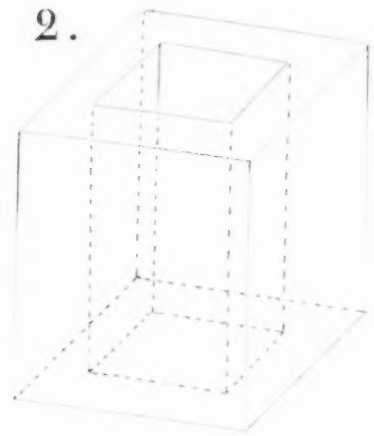
— — lin. 20. leg. $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(g+hx+ix^2+kx^3+lx^4)}}$

loco $\int \frac{\partial x}{g+hx+ix^2+kx^3+lx^4}$

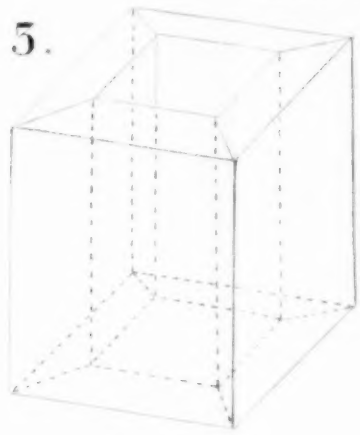

1.
z
z'
ξ
ξ
X'
(ξ,ξ)
X
4.
10.
a
e
f
d
i
o
k
n
m
g
q
p
9.

Taf. I.

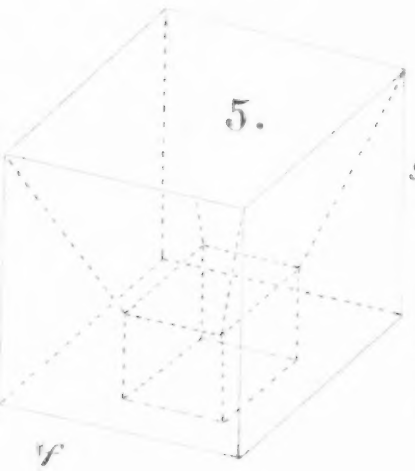
2.



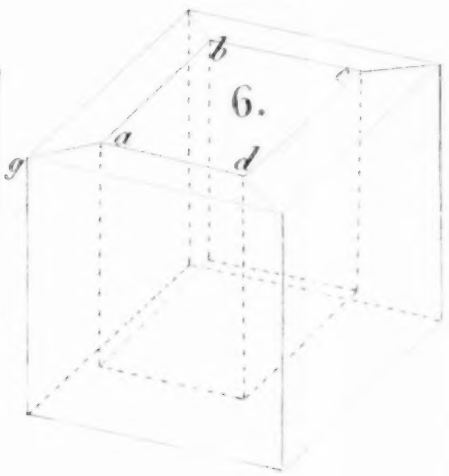
3.



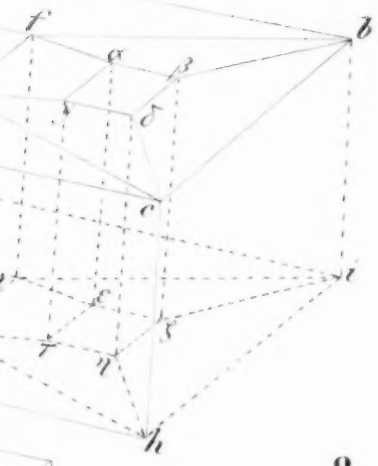
5.



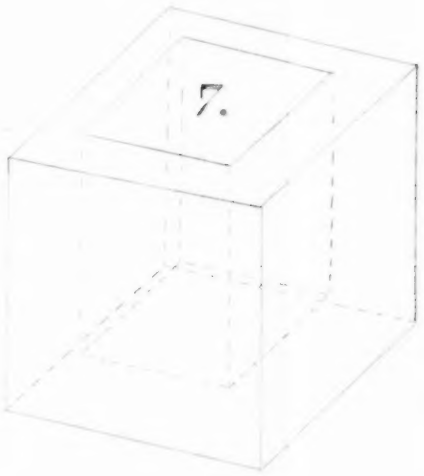
6.



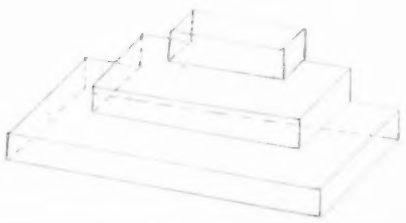
f



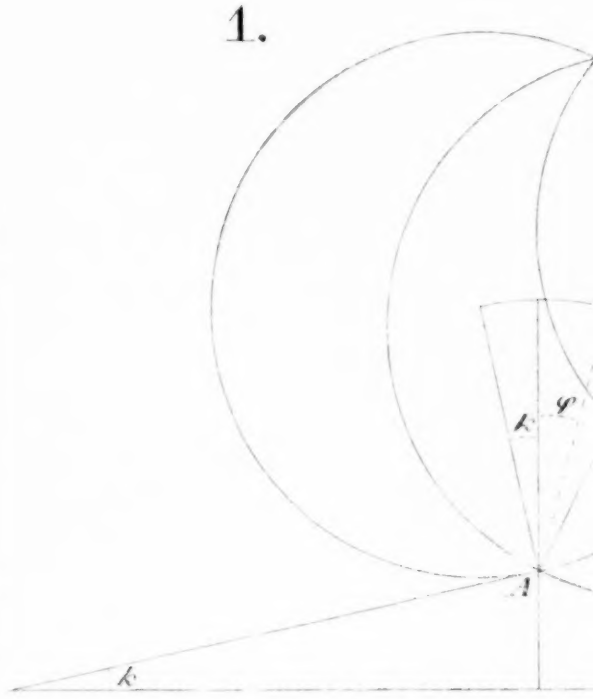
7.



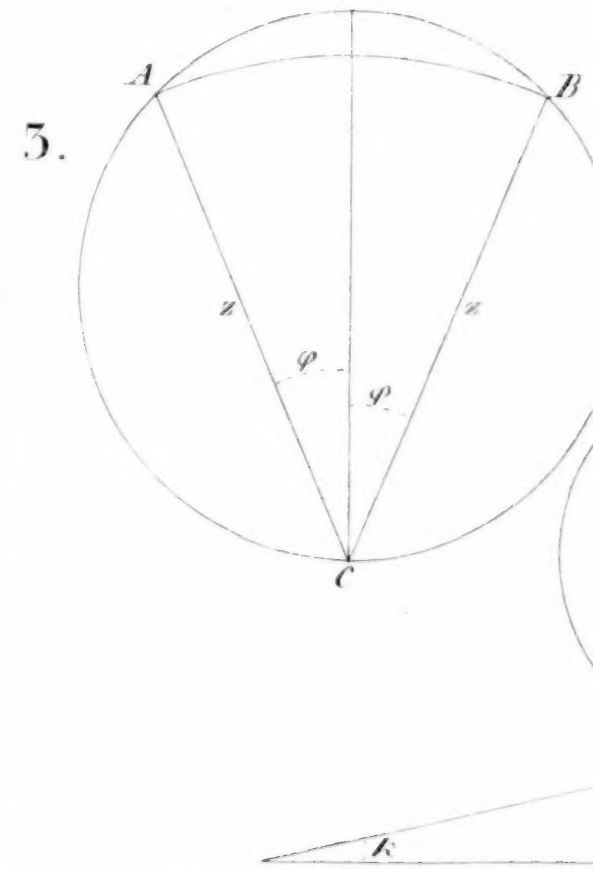
8.

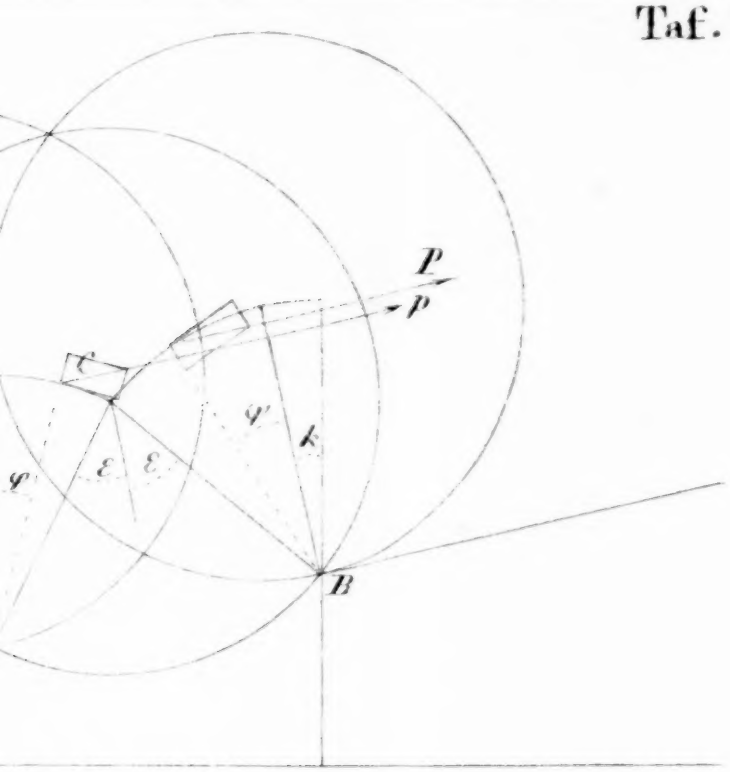


1.

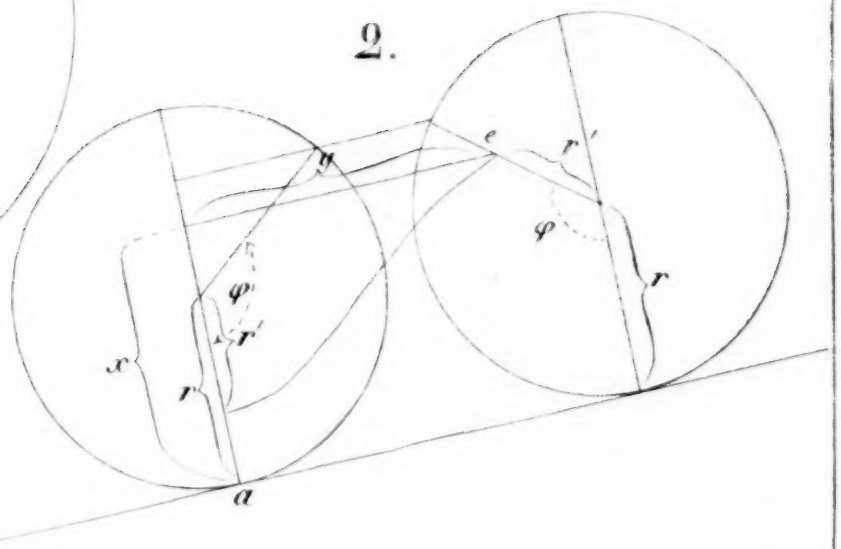


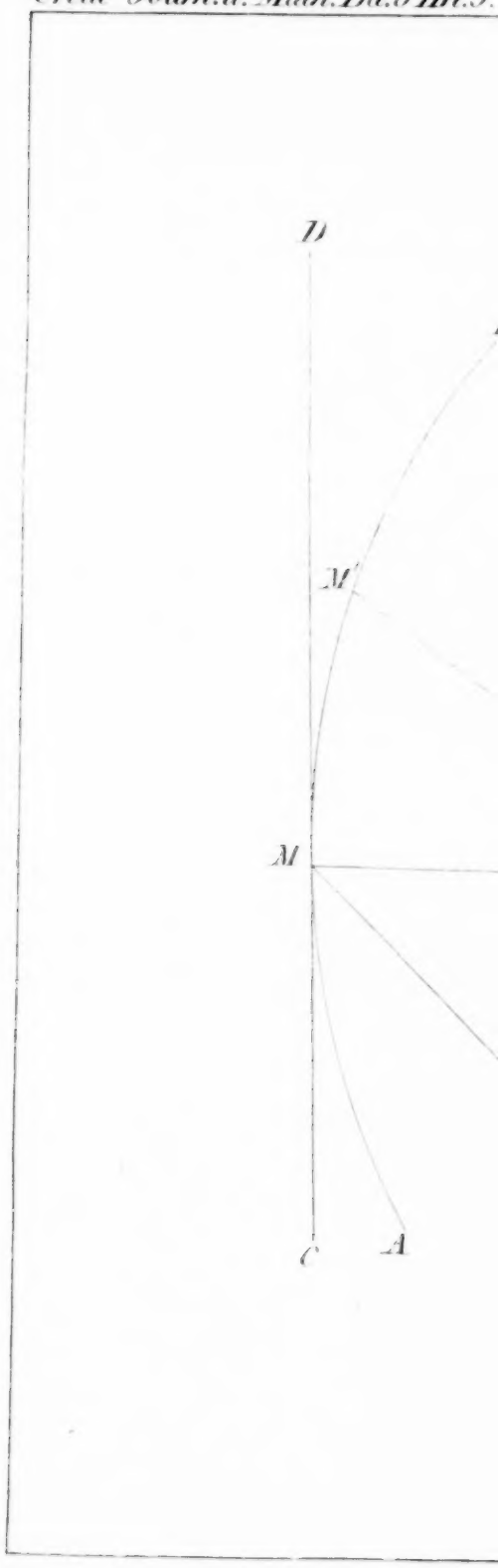
3.



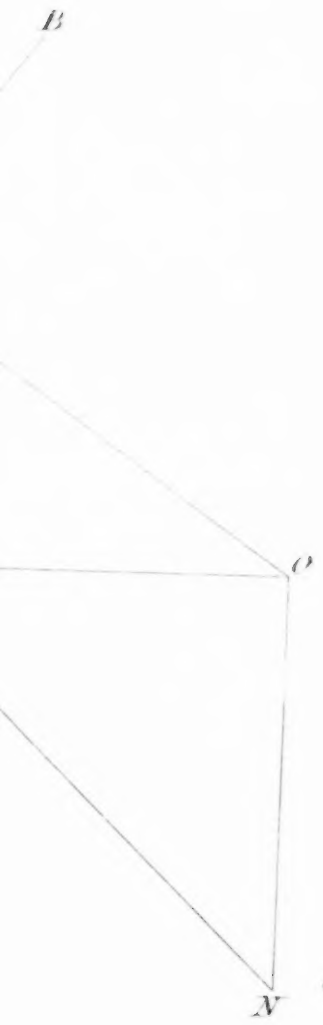


2.

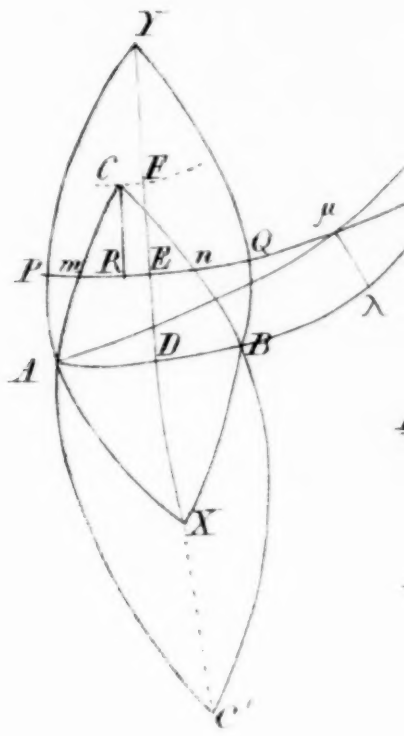


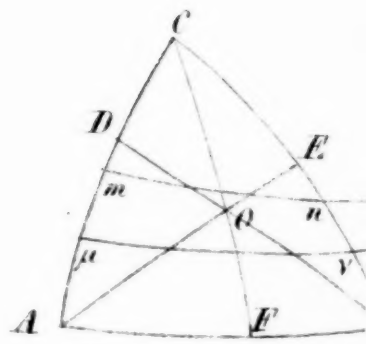

D
M
C
A

Taf. III.

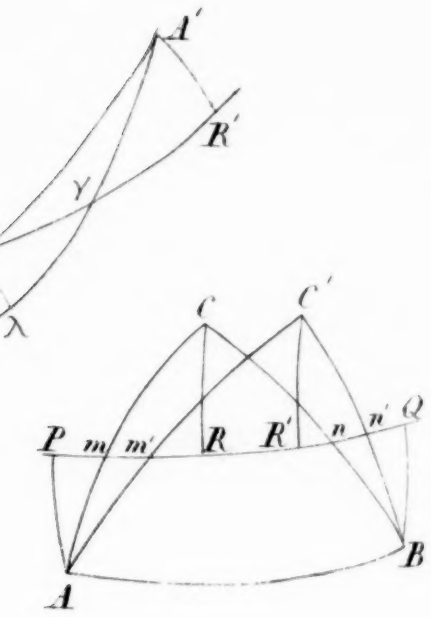


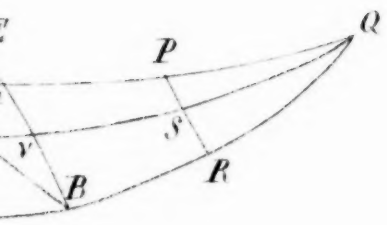
1.





Taf. IV.



2.

3.